

С. С. Романов (Нац. научн. центр „Харьков. физ.-техн. ин-т“)

КУСОЧНО-МАКСИМАЛЬНЫЕ ЗАМКНУТЫЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ТРАЕКТОРИИ НА ОГРАНИЧЕННЫХ ТОРОИДАЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

By using toroidal coordinates, we study maximal geodesic trajectories for arbitrary parameters of a torus. We consider conditions under which these trajectories are situated at the bounded part of a toroidal manifold. By using global invariants, we construct closed piecewise maximal geodesic trajectories.

Із використанням тороїдальних координат досліджуються максимальні геодезичні траєкторії при довільних параметрах тора. Розглянуто умови, при яких траєкторії розташовані в обмеженій частині тороїдальної множини. За допомогою глобальних інваріантів конструюються замкнені кусково-максимальні геодезичні траєкторії.

1. Введение. Тороидальные многообразия — один из примеров поверхностей в (по) которых (м) происходят 3D финитные движения. Таковыми являются экспериментальные условия токамаков, стеллараторов, стеллатронов [1], ловушек для пленения заряженных и нейтральных атомов [2] и др. Движение частиц в них осуществляется по естественным траекториям. Естественные траектории, при отсутствии внешних сил, представляют собой геодезические линии.

Геодезические, плотно покрывающие тороидальные многообразия, исследованы в работах [3–5]. Там же изучены геодезические траектории, которые при определенных связях между глобальными инвариантами являются замкнутыми.

Цель настоящей работы — исследовать свойства геодезических траекторий на ограниченных тороидальных многообразиях. Рассмотрена модель, в которой из максимальных геодезических конструируются кусочно-максимальные замкнутые траектории.

2. Метрика тороидального многообразия. Определим отображение $\varphi: U \rightarrow R^3$ (U — открытое множество в R^3) формулой

$$\varphi(\eta, \phi, \theta) = \frac{c}{\operatorname{ch} \eta - \cos \phi} (\operatorname{sh} \eta \cos \theta, \operatorname{sh} \eta \sin \theta, \sin \phi), \quad (1)$$

$U = \{(\phi, \theta) \in R^2, -\pi < \theta \leq \pi, -\pi < \phi \leq \pi\}$, c — масштабный множитель, η, ϕ, θ — тороидальные координаты [6].

Метрика отображения (1)

$$g = \frac{c^2}{(\operatorname{ch} \eta - \cos \phi)^2} (d\eta^2 + d\phi^2 + \operatorname{sh}^2 \eta d\theta^2) \quad (2)$$

является локально невырожденной. Порядок дифференцирования g в U в точности совпадает с порядком дифференцируемости метрических коэффициентов.

3. Интегралы геодезических. Локальные уравнения геодезических с метрикой (2) на торе $\eta = \eta_0 = \operatorname{const}$ [7] имеют два интеграла. Первый (интеграл Клеро) [5]

$$\sin \alpha = h(\operatorname{ch} \eta_0 - \cos \phi) \quad (3)$$

определяет связь угла α наклона геодезической к меридиану $\theta = \operatorname{const}$, h — постоянная интегрирования (константа Клеро) — не зависит от координат точки на траектории. Константа Клеро в (3) имеет ограниченное значение на многообразии. Например, при $h = (\operatorname{ch} \eta_0 + 1)^{-1}$ максимальная геодезическая

[8] касается малого экватора тора со стороны больших и меньших значений ϕ , не пересекая его.

Второй интеграл геодезических [5]

$$\theta(\phi) = -\int \frac{h(\operatorname{ch} \eta_0 - \cos \phi) d\phi}{\operatorname{sh} \eta_0 \sqrt{1 - h^2 (\operatorname{ch} \eta_0 - \cos \phi)^2}} \quad (4)$$

с помощью замены переменной $x = \operatorname{tg}(\phi/2)$ запишем в виде

$$\theta(x) = 2h \frac{\operatorname{ch} \eta_0 + 1}{\operatorname{sh} \eta_0} (A_1 + A_2), \quad (5)$$

$$A_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - h(\operatorname{ch} \eta - 1) + (1 - h(\operatorname{ch} \eta + 1))x^2} \sqrt{1 + h(\operatorname{ch} \eta - 1) + (1 + h(\operatorname{ch} \eta + 1))x^2}}, \quad (6)$$

$$A_2 = \frac{-2}{\operatorname{ch} \eta + 1} \times$$

$$\times \int \frac{dx}{(1 + x^2) \sqrt{1 - h(\operatorname{ch} \eta - 1) + (1 - h(\operatorname{ch} \eta + 1))x^2} \sqrt{1 + h(\operatorname{ch} \eta - 1) + (1 + h(\operatorname{ch} \eta + 1))x^2}}. \quad (7)$$

Здесь и далее индекс 0 у η опущен.

Аналитические свойства второго интеграла (4) определяются величиной константы Клеро.

4. Максимальные геодезические на ограниченном тороидальном многообразии. При $h = (\operatorname{ch} \eta + 1)^{-1}$ второй интеграл (4) не имеет особенностей и может быть найден точно.

Траектория на торе имеет вектор скорости, который сохраняется при движении. Такие геодезические называются максимальными [8]. Интегралы (6), (7) являются гладкими функциями:

$$A_1 = \frac{\sqrt{\operatorname{ch} \eta + 1}}{2} \ln \left| x + \sqrt{\frac{\operatorname{ch} \eta}{\operatorname{ch} \eta + 1} + x^2} \right|, \quad (8)$$

$$A_2 = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{\operatorname{ch} \eta + (\operatorname{ch} \eta + 1)x^2} + x}{\sqrt{\operatorname{ch} \eta + (\operatorname{ch} \eta + 1)x^2} - x} \right|. \quad (9)$$

Выбрав ориентацию траектории (4) так, чтобы возрастанию ϕ соответствовал рост θ , можно описать течение максимальной геодезической по поверхности тора. В соответствии с (5) и (8), (9) линия пересекает большой экватор тора при

$$\theta = \frac{\sqrt{\operatorname{ch} \eta + 1}}{2 \operatorname{sh} \eta} \ln \frac{\operatorname{ch} \eta}{\operatorname{ch} \eta + 1} \quad (10)$$

и с увеличением ϕ достигает малого экватора тора со стороны $\phi = \pi + 0$, касаясь его.

Поскольку (4) определено с точностью до вращений, (10) можно принять за начало отсчета азимутов максимальной геодезической траектории.

5. Гладкие замкнутые геодезические. Из максимальных геодезических

$$\theta(\phi) = \frac{1}{\text{sh} \eta} \left(\sqrt{\text{ch} \eta + 1} \ln \left| \text{tg} \frac{\phi}{2} + \sqrt{\frac{\text{ch} \eta}{\text{ch} \eta + 1} + \text{tg}^2 \frac{\phi}{2}} \right| - \ln \left| \frac{\sqrt{\text{ch} \eta + \sin^2 \frac{\phi}{2} + \sin \frac{\phi}{2}}}{\sqrt{\text{ch} \eta + \sin^2 \frac{\phi}{2} - \sin \frac{\phi}{2}}} \right| \right)$$

составим кусочно-максимальную замкнутую траекторию, которая является гладкой функцией аргумента.

Сделать это позволяет аналог теоремы Дарбу [9, с. 6].

Предложение. Пусть (S^2, g) — поверхность вращения, снабженная координатными функциями (ϕ, θ) на U , при которых g имеет вид (2).

Необходимым и достаточным условием замкнутости всех геодезических метрики g является выполнение равенства

$$\varepsilon_1 \varepsilon \theta(\phi) = \frac{1}{\text{sh} \eta} \times \left(\sqrt{\text{ch} \eta + 1} \ln \left| \text{tg} \frac{\phi}{2} + \sqrt{\frac{\text{ch} \eta}{\text{ch} \eta + 1} + \text{tg}^2 \frac{\phi}{2}} \right| - \ln \left| \frac{\sqrt{\text{ch} \eta + \sin^2 \frac{\phi}{2} + \sin \frac{\phi}{2}}}{\sqrt{\text{ch} \eta + \sin^2 \frac{\phi}{2} - \sin \frac{\phi}{2}}} \right| \right) = \frac{p}{q} \pi$$

при целых p и q .

При этом любая геодезическая γ в U состоит из $2q$ геодезических отрезков между точками касания с малым экватором ($\phi = \pi + 0$) и ($\phi = -\pi - 0$). Она огибает тор p раз (см. рисунок, $p = q = 1$).

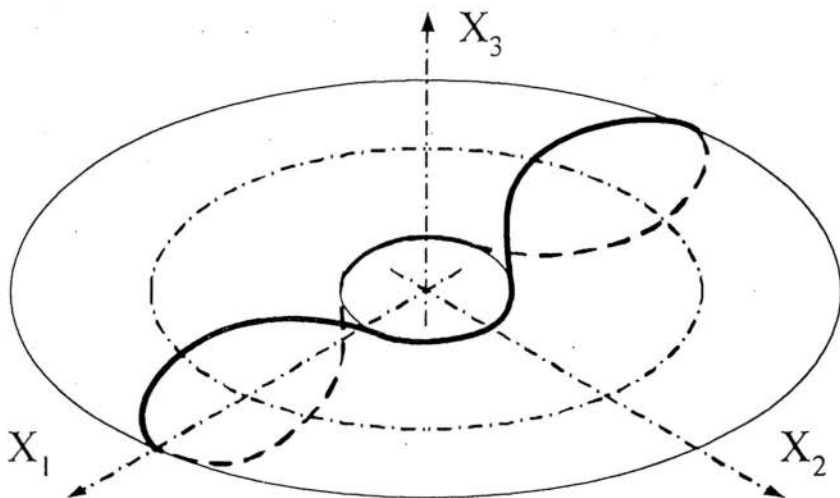


Рис. 1

Знак числа $\varepsilon_1 = \pm 1$ определяет ориентацию геодезической. Знак числа $\varepsilon = \pm 1$ постоянен на отрезке геодезической, идущей от $\phi = -\pi - 0$ до $\phi = \pi + 0$ и меняется каждый раз, когда ϕ достигает значения $-\pi - 0$ или $\pi + 0$.

Угол между двумя последовательными точками касания с малым экватором равен

$$\theta(\phi = \pi) - \theta(\phi = 0) = \frac{2}{\text{sh} \eta} \left(\frac{\sqrt{\text{ch} \eta + 1}}{2} \ln \frac{\text{ch} \eta + 1}{\text{ch} \eta} - \ln \frac{\sqrt{\text{ch} \eta + 1} + 1}{\sqrt{\text{ch} \eta + 1} - 1} \right).$$

Геодезическая γ_ϕ замкнута тогда и только тогда, когда

$$\varepsilon_1 \varepsilon \theta(\phi) = \frac{1}{\operatorname{sh} \eta} \times$$

$$\times \left(\sqrt{\operatorname{ch} \eta + 1} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\phi}{2} + \sqrt{\frac{\operatorname{ch} \eta}{\operatorname{ch} \eta + 1} + \operatorname{tg}^2 \frac{\phi}{2}} \right| - \ln \left| \frac{\sqrt{\operatorname{ch} \eta + \sin^2 \frac{\phi}{2}} + \sin \frac{\phi}{2}}{\sqrt{\operatorname{ch} \eta + \sin^2 \frac{\phi}{2}} - \sin \frac{\phi}{2}} \right| \right) = \frac{p(\phi)}{q(\phi)} \pi$$

для некоторого рационального $\frac{p(\phi)}{q(\phi)}$.

Замыкание геодезической γ_ϕ происходит при изменении угла θ на $2p(\phi)\pi$. Если замкнуты все геодезические, то функция $\varepsilon_1 \varepsilon \theta$, отображающая $]0, \pi[\subset R$ в R , непрерывна. Поскольку ее значения принадлежат $Q\pi$, она должна быть постоянной, $\frac{p(\phi)}{q(\phi)} = \frac{p}{q} \in Q$.

1. Chernin D. Beam dynamics in high-current cyclic electron accelerators // Phys. Fluids. – 1990. – 2, № 6. – P. 1478 – 1485.
2. Пауль В. Электромагнитные ловушки заряженных и нейтральных частиц // Успехи физ. наук. – 1990. – 160, № 12. – С. 109 – 127.
3. Романов С. С. Токовые линии на торе круглого сечения // Докл. НАН Украины. – 2001. – № 9. – С. 84 – 88.
4. Romanov S. S. Smooth trajectories on toroidal manifolds // Sci. Paper Inst. Nucl. Res. – 2001. – 4 (6). – P. 189 – 193.
5. Romanov S. S. Smooth geodesic trajectories on toroidal manifolds // Probl. Atom. Sci. and Technol. Ser. „Nucl. Phys. Invest.“, Nat. Sci. Center „Kharkov Inst. Phys. and Technol.“. – 2002. – 40, № 2. – P. 112 – 115.
6. Гобсон Е. В. Теория сферических и эллипсоидальных функций. – М.: Изд-во илостр. лит., 1952. – 476 с.
7. Фишков С. П. Курс дифференциальной геометрии. – М.: Гостехгеориздат, 1952. – 343 с.
8. Торн Дж. Начальные главы дифференциальной геометрии. – М.: Мир, 1982. – 360 с.
9. Darboux G. Lecons sur la Théorie générale des Surfaces / Ed. Chelsea. – 1972. – 3.

Получено 09.01.2003