УДК 517.5

С. Б. Вакарчук (Акад. таможен. службы Украины, Днепропетровск)

О НЕКОТОРЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЙ В КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

In the Hardy Banach spaces H_q, Bergman Banach spaces H'_q, and $\mathfrak{B}(p, q, \lambda)$ Banach spaces, we obtain the exact values of the Kolmogorov, Bernstein, Gel'fand, linear and trigonometric n-widths of classes of functions that are analytic in the disk $|z| < 1$ and whose averaged moduluses of continuity of r-th derivatives are majorized by some function. For these classes, we also consider the problems of the optimal recovery and the coding of functions.

У банахових просторах Харді H_q, Бергмана H'_q та $\mathfrak{B}(p, q, \lambda)$ одержано точні значення колмогоровського, бернштейнівського, гельфандівського, лінійного та тригонометричного n-поперечників класів аналітичних у колі $|z| < 1$ функцій, у яких усереднені модулі неперервності r-х похідних мажоруються деякою функцією. Для цих класів також розглянуто задачі оптимального відновлення та кодування функцій.

1. Пусть X — банахово пространство; L_n — подпространство размерности n, принадлежащее X; $V(f, L_n; \cdot)$ — линейный непрерывный оператор, переводящий X в L_n. Через $E(f, L_n, X)$ обозначим наилучшее приближение функции $f \in X$ элементами подпространства L_n в метрике пространства X, а через $\mathscr{E}(f, V(f, L_n), X)$ — уклонение функции $f \in X$ от $V(f, L_n; \cdot)$ в X.

Для множества $\mathfrak{M} \subset X$ полагаем

$$E(\mathfrak{M}, L_n, X) \overset{\text{df}}{=} \sup\{E(f, L_n, X) \colon f \in \mathfrak{M}\},$$

$$\mathscr{E}(\mathfrak{M}, V, L_n)_X \overset{\text{df}}{=} \sup\{\mathscr{E}(f, V(f, L_n), X) \colon f \in \mathfrak{M}\}.$$

В 1936 г. А. Н. Колмогоров [1] ввел понятие n-поперечника компакта

$$d_n(\mathfrak{M}, X) = \inf\{E(\mathfrak{M}, L_n, X) \colon L_n \subset X\}$$

и вычислил n-поперечник эллипсоида в гильбертовом пространстве, что явилось первым примером нахождения точного значения величины d_n. В начале семидесятых годов В. М. Тихомиров ввел в рассмотрение линейный δ_n, бернштейновский b_n и гельфандовский d^n n-поперечники и установил взаимосвязь между ними [2]. Напомним, что

$$\delta_n(\mathfrak{M}, X) = \inf\{\inf\{\mathscr{E}(\mathfrak{M}, V, L_n)_X \colon V(X) \subset L_n\} \colon L_n \subset X\},$$

$$b_n(\mathfrak{M}, X) = \sup\{\sup\{\varepsilon > 0 \colon \varepsilon S \cap L_{n+1} \subset \mathfrak{M}\} \colon L_{n+1} \subset X\},$$

$$d^n(\mathfrak{M}, X) = \inf\{\sup\{\|f\|_X \colon f \in \mathfrak{M} \cap L^n\} \colon L^n \subset X\},$$

где S — единичный шар в X; L^n — линейное подпространство из X коразмерности n. При этом для центрально-симметричного компакта $\mathfrak{M}$

$$b_n(\mathfrak{M}, X) \le \begin{matrix} d_n(\mathfrak{M}, X) \\ \\ d^n(\mathfrak{M}, X) \end{matrix} \le \delta_n(\mathfrak{M}, X). \qquad (1)$$

Если существует линейный оператор $\tilde{V} : X \to \tilde{L}_n$, для которого $\delta_n(\mathfrak{M}, X) =$

$= \mathscr{E}(\mathfrak{M}, \tilde{V}, \tilde{L}_n)_X$, то его называют наилучшим линейным методом приближения множества $\mathfrak{M}$ в пространстве X.

Пусть X — банахово пространство функций, аналитических в единичном круге $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Величину

$$d_n^T(\mathfrak{M}, X) = \inf\left\{\sup\left\{\inf\left\{\left\| f(z) - \sum_{k=1}^{n} c_k z^{m_k}\right\|_X : c_k \in \mathbb{C},\ k = \overline{1,n}\right\} : f \in \mathfrak{M}\right\} :\right.$$

$$\left. m_1 < m_2 < \ldots < m_n,\ m_k \in \mathbb{Z}_+,\ k = \overline{1,n}\right\}$$

называют тригонометрическим n-поперечником компакта $\mathfrak{M}$ в X. Впервые это понятие было введено Р. С. Исмагиловым в 1974 году. При этом

$$d_n(\mathfrak{M}, X) \le d_n^T(\mathfrak{M}, X). \tag{2}$$

В настоящее время известен ряд окончательных результатов, связанных с вычислением точных значений n-поперечников некоторых классов аналитических функций и построением наилучших линейных методов приближения данных классов (см., например, [2 – 13]).

Изучение асимптотического поведения приближений индивидуальных функций является важным разделом теории аппроксимации. Точность оценки приближения, полученной на том или ином классе $\mathfrak{M}$, не гарантирует того, что для каждой конкретной функции этого класса порядок приближения не окажется лучшим. Поэтому определенный интерес представляет задача построения функции $f \in \mathfrak{M}$, не зависящей от n, для которой погрешность приближения элементами конкретного рассматриваемого n-мерного подпространства асимптотически ведет себя так, как и погрешность приближения класса $\mathfrak{M}$ элементами этого же подпространства. Задачи подобного рода рассматривались еще А. Лебегом. В дальнейшем важные результаты в указанном направлении были получены в работах С. Н. Бернштейна, С. М. Никольского, С. Б. Стечкина, Г. Я. Доронина, П. Турана, П. Эрдеши, О. Киша, Й. Сабадоша, К. И. Осколкова, В. Н. Темлякова, О. В. Давыдова и других авторов.

Аналогичные проблемы представляют определенный интерес и для аналитических функций комплексной переменной. В связи с этим далее рассмотрим следующую задачу: в какой степени последовательность величин $\{E_n(\mathfrak{M}, L_n, X)\}_{n=1}^{\infty}$ характеризует соответствующие аппроксимативные свойства $\{E(f, L_n, X)\}_{n=1}^{\infty}$ отдельных функций $f(z) \in X$?

В предлагаемой статье получены решения указанных выше экстремальных задач для некоторых функциональных классов из $X(U)$, где $X(U)$ — любое из приведенных далее банаховых пространств.

2. Символом H_q, $1 \le q$, обозначим пространство Харди аналитических в U функций $f(z)$, для которых

$$\|f\|_{H_q} = \lim\{M_q(f, \rho) : \rho \to 1-0\} < \infty, \qquad 1 \le q < \infty,$$

где

$$M_q(f, \rho) \overset{\mathrm{df}}{=} \left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(\rho \exp(i\tau))|^q d\tau\right\}^{1/q}.$$

В случае $q = \infty$

$$\|f\|_{H_\infty} = \sup\{|f(z)| : z \in U\} < \infty.$$

Под H'_q, $1 \le q$, понимаем пространство Бергмана аналитических в U функций $f(z)$, удовлетворяющих условию

$$\|f\|_{H'_q} = \left\{\frac{1}{\pi}\iint_U |f(z)|^q dx\,dy\right\}^{1/q} = \left\{2\int_0^1 \rho M_q^q(f,\rho)d\rho\right\}^{1/q} < \infty, \quad 1 \le q < \infty.$$

При $q = \infty$

$$\|f\|_{H'_\infty} = \|f\|_{H_\infty}.$$

Ромберг, Дюрен и Шилдс [14] ввели пространства $\mathcal{B}_p$, $0 < p < 1$, аналитических в U функций $f(z)$, для которых

$$\|f\|_p = \int_0^1\int_0^{2\pi} (1-\rho)^{1/p-2}|f(\rho\exp(i\tau))|d\tau\,d\rho < \infty,$$

и изучили основные свойства входящих в них элементов. Естественным обобщением пространств $\mathcal{B}_p$, $0 < p < 1$, явились банаховы пространства $\mathcal{B}(p, q, \lambda)$ [15], где $0 < p < q \le \infty$, $\min(\lambda, q) \ge 1$, для элементов которых

$$\|f\|_{p,q,\lambda} = \left\{\int_0^1 (1-\rho)^{\lambda(1/p-1/q)-1} M_q^\lambda(f,\rho)d\rho\right\}^{1/\lambda} < \infty, \quad 1 \le \lambda < \infty,$$

$$\|f\|_{p,q,\infty} = \sup\left\{(1-\rho)^{1/p-1/q} M_q(f,\rho)\colon 0 < \rho < 1\right\} < \infty.$$

По сравнению с H_q данные пространства позволяют изучать аналитические функции с менее жесткими ограничениями на их поведение вблизи границы круга U. Очевидно, что $H_q \subset H'_q$ и $H_q \subset \mathcal{B}(p, q, \lambda)$.

3. Производную r-го порядка функции $f(z)$ по аргументу θ комплексной переменной $z = \rho\exp(i\theta)$ обозначим через $f_a^{(r)}(z)$. Очевидно, что $f_a^{(1)}(z) \overset{\text{df}}{=} \overset{\text{df}}{=} \partial f(z)/\partial\theta = f^{(1)}(z)z_\theta^{(1)} = f^{(1)}(z)zi$ и $f_a^{(r)}(z) = \{f_a^{(r-1)}(z)\}_a^{(1)}$, $r = 2, 3, \ldots$.

Всюду далее полагаем $\Phi(x) = x^{\pi/2-1}$.

Для произвольной функции $f(z) \in X(U)$ запишем модуль непрерывности

$$\omega(f,t)_X = \sup\left\{\left\|f(ze^{ih/2}) - f(ze^{-ih/2})\right\|_X : |h| \le t\right\}, \quad t > 0.$$

Нетрудно показать, что функция

$$\omega^*(f,\tau) = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \omega(f,t)_X\,dt, \quad \tau > 0,$$

также будет модулем непрерывности.

Обозначим через $W_\Phi^r(X)$, $r \in \mathbb{N}$, класс аналитических в U функций $f(z)$, у которых r-е производные $f_a^{(r)}(z) \in X(U)$ и удовлетворяют условиям

$$\omega^*\left(f_a^{(r)}, \frac{\pi}{n}\right) \le \frac{4}{\pi}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Символом $X_\rho(U)$, $0 < \rho \le 1$, обозначим пространство аналитических в круге $|z| < \rho$ функций $f(z)$, для которых $\|f(z)\|_{X_\rho} \overset{\text{df}}{=} \|f(\rho z)\|_X < \infty$. Очевидно, что $X_\rho(U)$ — банахово пространство, и $X_1(U) \equiv X(U)$. Через $\mathcal{P}_n$ обозначим подпространство алгебраических полиномов комплексной переменной z степени $\le n-1$. Под $\widetilde{X(U)}$ понимаем банахово пространство комплекснозначных в U функций $\varphi(z)$, которые непрерывны в любом замкнутом круге $|z| \le \rho$ $(\rho < 1)$ и удовлетворяют условию $\|f\|_{\tilde{X}} \stackrel{\text{df}}{=} \|f\|_X < \infty$, где $\|\cdot\|_X$ задается одним из перечисленных выше способов.

4. Каждой функции $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) z^k \in X(U)$, где $c_k(f)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, — ее коэффициенты Тейлора, линейный оператор

$$V_{\rho,r-1}(f, \mathcal{P}_n; z) \stackrel{\text{df}}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \mu_{k,\rho,r-1} c_k(f) z^k,$$

где

$$\mu_{k,\rho,r-1} \stackrel{\text{df}}{=} \Big\{1, \text{ если } k=0;$$

$$1-\rho^{2(n-k)}[k/(2n-k)]^{r-1}[1-n\alpha_k(1-k^2/(2n-k)^2)], \text{ если } k=\overline{1, n-1}\Big\},$$

$$\alpha_k \stackrel{\text{df}}{=} \int_0^{\pi/(2n)} \cos(kx)\cos(nx)\,dx, \tag{4}$$

ставит в соответствие определенный полином $(n-1)$-й степени.

Теорема 1. *Для любых n, $r \in \mathbb{N}$ и $0 < \rho < 1$ справедливы равенства*

$$\Pi_n(W_\Phi^r(X), X_\rho(U)) = E(W_\Phi^r(X), \mathcal{P}_n, X_\rho(U)) =$$

$$= \mathcal{E}(W_\Phi^r(X), V_{\rho,r-1}, \mathcal{P}_n)_{X_\rho} = \frac{\rho^n}{n^r}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right). \tag{5}$$

Здесь $\Pi_n(\cdot)$ — любой из перечисленных выше n-поперечников d_n, b_n, d^n, δ_n либо d_n^T, а $X(U)$ — любое из банаховых пространств H_q, H_q' либо $\mathcal{B}(p, q, \lambda)$.

Символом $\tilde{\mathcal{P}}_n$ обозначим n-мерное подпространство, порожденное базисом

$$\tilde{\varphi}_k(z) = \Big\{1, \text{ если } k=0;$$

$$[1-(k/(2n-k))^{r-1}(1-n\alpha_k(1-k^2/(2n-k)^2))|z|^{2(n-k)}]z^k, \text{ если } k=\overline{1, n-1}\Big\}.$$

Для $f(z) \in X(U)$ полагаем

$$\tilde{V}_{r-1}(f, \tilde{\mathcal{P}}_n; z) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(f)\tilde{\varphi}_k(z).$$

Всюду далее под $B(a, b)$, a, $b > 0$, понимаем эйлеров интеграл первого рода.

Теорема 2. *Для произвольных n, $r \in \mathbb{N}$ выполнены соотношения*

$$\Pi_n(W_\Phi^r(H_q), \tilde{H}_q') = \overline{\Pi}_n(W_\Phi^r(H_q), H_q') = E(W_\Phi^r(H_q), \tilde{\mathcal{P}}_n, \tilde{H}_q') =$$

$$= \mathcal{E}(W_\Phi^r(H_q), \tilde{V}_{r-1}, \tilde{\mathcal{P}}_n) = \frac{\Phi(\pi/n)}{(nq/2+1)^{1/q}n^r}, \tag{6}$$

$$\Pi_n(W_\Phi^r(H_q); \tilde{\mathcal{B}}(p, q, \lambda)) = \overline{\Pi}_n(W_\Phi^r(H_q); \mathcal{B}(p, q, \lambda)) =$$

$$= E(W_\Phi^r(H_q), \tilde{\mathcal{P}}_n, \tilde{\mathcal{B}}(p, q, \lambda)) =$$

$$= \mathcal{E}(W_\Phi^r(H_q), \tilde{V}_{r-1}, \tilde{\mathcal{P}}_n)_{\tilde{\mathcal{B}}(p,q,\lambda)} = \Phi(\pi/n)B^{1/\lambda}(n\lambda+1;\, \lambda(1/p-1/q))n^{-r}, \tag{7}$$

где $\Pi_n(\cdot)$ — любой из n-поперечников d_n, δ_n, b_n, d^n либо d_n^T, а $\overline{\Pi}_n(\cdot)$ — один из поперечников d^n либо b_n.

Теорема 3. *Существует функция* $\tilde{f}(z) \in W_{\Phi}^{r}(X)$, $r \in \mathbb{N}$, *для которой*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{E(\tilde{f}, \mathcal{P}_n, X_\rho(U))}{E(W_\Phi^r(X), \mathcal{P}_n; X_\rho(U))} = 1, \tag{8}$$

где $X(U)$ — *любое из перечисленных выше банаховых пространств.*

Вопросы вычисления точных верхних граней модулей коэффициентов Фурье на различных классах функций действительной переменной рассматривались, например, в работах А. В. Ефимова, А. Ф. Тимана, Н. П. Корнейчука, В. И. Бердышева, С. Милорадовича, С. А. Теляковского и других. В связи с этим определенный интерес представляет и вычисление точных верхних граней модулей коэффициентов Тейлора на классах аналитических в круге функций.

Теорема 4. *Пусть* $\mathcal{L}_n(\mathfrak{M}) \overset{\mathrm{df}}{=} \sup\{|c_n(f)| : f \in \mathfrak{M}\}$. *Тогда для любого натурального числа* n *справедливы равенства*

$$\mathcal{L}_n(W_\Phi^r(H_q)) = \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)n^{-r}, \tag{9}$$

$$\mathcal{L}_n(W_\Phi^r(H_q')) = \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)\left(\frac{nq}{2}+1\right)^{1/q} n^{-r}, \tag{10}$$

$$\mathcal{L}_n(W_\Phi^r(\mathcal{B}(p,q,\lambda))) = \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)B^{-1/\lambda}(n\lambda+1;\ \lambda(1/p-1/q))n^{-r}. \tag{11}$$

На основании теорем 1 и 2 в конце статьи рассмотрены задачи оптимального восстановления и кодирования функций из классов $W_\Phi^r(X)$.

5. Нам понадобится следующее утверждение.

Утверждение 1. *Для функции* $\Phi(x)$ *имеют место неравенства*

$$\frac{\Phi(\eta x)}{\Phi(x)} = \eta^{\pi/2-1} \geq \begin{cases} \dfrac{2}{\eta}\sin^2\dfrac{\pi\eta}{4}, & 0 < \eta \leq 1, \\ \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{\eta}\left(\dfrac{\pi}{2}-1\right), & \eta \geq 1. \end{cases} \tag{12}$$

Доказательство. Пусть $\Omega(\eta) \overset{\mathrm{df}}{=} \eta^{\pi/2-1} + \eta^{-1}(\pi/2-1) - \pi/2$, где $\eta \geq 1$. Поскольку $\Omega^{(1)}(\eta) = \eta^{-1}(\pi/2-1)(\eta^{\pi/2-1}-\eta^{-1})$, очевидно, что $\Omega^{(1)}(\eta) \geq 0$ и функция $\Omega(\eta)$ является неубывающей. Учитывая равенство $\Omega(1) = 0$, отсюда заключаем, что $\Omega(\eta) \geq 0$, т. е. выполнено второе неравенство в соотношении (12).

Обозначим $\Omega_1(\eta) \overset{\mathrm{df}}{=} \eta^{\pi/4} - \sqrt{2}\sin(\pi\eta/4)$, где $0 \leq \eta \leq 1$. Поскольку при $\eta \to 0$ $\Omega_1(\eta) = O(\eta^{\pi/4})$, то в достаточно малой окрестности нуля $\Omega_1(\eta) > 0$. Покажем, что функция $\Omega_1(\eta)$ является знакопостоянной на интервале $(0, 1)$. Для этого, рассуждая от противного, полагаем, что существует по крайней мере одна точка на $(0, 1)$, в которой $\Omega_1(\eta)$ меняет знак. Поскольку $\Omega_1(0) = \Omega_1(1) = 0$, в силу теоремы Ролля первая производная

$$\Omega_1^{(1)}(\eta) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\eta^{\pi/4-1}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{\pi\eta}{4}\right)$$

должна иметь на $(0, 1)$ не менее двух нулей. Так как $\Omega_1^{(1)}(1) = 0$, на основании аналогичных соображений заключаем, что и вторая производная

$$\Omega_1^{(2)}(\eta) = \frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\sin\frac{\pi\eta}{4} - \left(1-\frac{\pi}{4}\right)\eta^{\pi/4-2}\right)$$

должна иметь не менее двух нулей на интервале $(0, 1)$. Однако $\Omega_1^{(2)}(\eta)$, как разность монотонно возрастающей выпуклой вверх и монотонно убывающей выпуклой вниз функций, может иметь на $(0, 1)$ не более одного нуля. Из полученного противоречия следует, что $\Omega_1(\eta) \geq 0$ при $0 < \eta \leq 1$, а это, в свою очередь, означает справедливость соотношения $\eta^{\pi/2} \geq 2\sin^2(\pi\eta/4)$, $0 < \eta \leq$ ≤ 1, эквивалентного первому неравенству в соотношении (12).

Утверждение 1 доказано.

6. Для доказательства теоремы 1 потребуется следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть $f(z)$ — произвольная функция из класса $W_\Phi^r(X)$ и $X(U)$ — любое из банаховых пространств H_q, H_q' либо $\mathcal{B}(p, q, \lambda)$. Тогда для любого числа $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство*

$$\left\| f - V_{\rho,r-1}(f, \mathcal{P}_n) \right\|_{X_\rho} \leq \frac{\rho^n}{n^r} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right), \quad 0 < \rho < 1. \tag{13}$$

При этом существует такой элемент $f_0(z) \in W_\Phi^r(X)$, для которого соотношение (13) *обращается в равенство.*

Доказательство. Для произвольной функции $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) z^k \in$ $\in X(U)$, у которой $f_a^{(r)}(z) \in X(U)$, запишем представление [12]

$$f(\rho z) = \Lambda_{\rho,r-1}(f, \mathcal{P}_n; \rho z) + \frac{\rho^n}{2\pi i^{r-1}} \int_0^{2\pi} f_a^{(r-1)}(ze^{-i\tau}) e^{in\tau} Q_{\rho,r-1,n}(\tau) d\tau, \tag{14}$$

где $z \in U$, $0 < \rho < 1$;

$$Q_{\rho,r-1,n}(\tau) \overset{\mathrm{df}}{=} n^{-r+1} + 2 \sum_{k=n+1}^{\infty} \rho^{k-n} k^{-r+1} \cos(k-n)\tau;$$

$$\Lambda_{\rho,r-1}(f, \mathcal{P}_n; z) \overset{\mathrm{df}}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \nu_{k,\rho,r-1} c_k(f) z^k;$$

$$\nu_{k,\rho,r-1} \overset{\mathrm{df}}{=} \left\{ 1, \text{ если } k=0;\ 1-(k/(2n-k))^{r-1} \rho^{2(n-k)}, \text{ если } k = \overline{1, n-1} \right\}.$$

В справедливости равенства (14) можно убедиться, разложив функцию $f_a^{(r)}(z)$ в ряд Тейлора и выполнив почленное интегрирование.

Для анализа поведения функции $Q_{\rho,r-1,n}(\tau)$ воспользуемся следующей леммой.

Лемма А [16]. *Если $a_k \to 0$ при $k \to \infty$ и последовательность a_0, a_1, a_2, … выпуклая, то ряд $a_0/2 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\tau$ сходится всюду, за исключением, быть может, точки $\tau = 0$, к некоторой неотрицательной интегрируемой функции $\psi(\tau)$ и является рядом Фурье этой функции.*

Поскольку последовательность $\{\rho^{k-n}/k^{r-1}\}_{k=n}^{\infty}$, $0 < \rho < 1$, является выпуклой и ее общий член стремится к нулю при $k \to \infty$, из леммы А следует, что для произвольного числа $\tau \in (0, 2\pi)$ выполнено неравенство $Q_{\rho,r-1,n}(\tau) \geq 0$.

В качестве промежуточного приближения далее нам понадобится следующая функция из [6, с. 343] (случай $u = \pi/(2n)$):

$$g(f, z) \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{n}{2} \int_0^{\pi/(2n)} [f(ze^{i\tau}) + f(ze^{-i\tau})] \cos n\tau \, d\tau = n \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k c_k(f) z^k, \tag{15}$$

$$z = \rho e^{it}, \quad 0 < \rho < 1.$$

Полагая $F(\rho, t) \overset{\mathrm{df}}{=} f(\rho e^{it})$ и используя интегрирование по частям, записываем

$$\left(g(f,z)\right)_a^{(1)} = \frac{n}{2}\int\limits_0^{\pi/(2n)} \left[F^{(0,1)}(\rho, t+\tau) + F^{(0,1)}(\rho, t-\tau)\right]\cos n\tau\, d\tau =$$

$$= \frac{n^2}{2}\int\limits_0^{\pi/(2n)} \left[F(\rho, t+\tau) - F(\rho, t-\tau)\right]\sin n\tau\, d\tau.$$

Учитывая в каждом конкретном случае специфику определения нормы в пространстве $X(U)$, на основании интегрального неравенства Минковского и определения модуля непрерывности получаем

$$\left\|\left(g(f,z)\right)_a^{(1)}\right\|_X \le \frac{n^2}{2}\int\limits_0^{\pi/(2n)} \left\|f(ze^{i\tau}) - f(ze^{-i\tau})\right\|_X \sin n\tau\, d\tau \le$$

$$\le \frac{n^2}{4}\int\limits_0^{\pi/n} \omega(f,\tau)_X \sin\frac{n\tau}{2}\, d\tau. \qquad (16)$$

Поскольку $f_a^{(r-1)}(z) = i^{r-1}\sum_{k=1}^{\infty} k^{r-1}c_k(f)z^k$, используя (15) и полиномиальный оператор $\Lambda_{1,2}(\cdot, \mathcal{P}_n; z)$, имеем

$$\Lambda_{1,2}(g(f_a^{(r-1)}), \mathcal{P}_n; z) = i^{r-1} n\sum_{k=1}^{n-1}\left[1-\left(\frac{k}{2n-k}\right)^2\right]k^{r-1}\alpha_k c_k(f)z^k,$$

где числа α_k определяются формулой (4).

Полагаем

$$\mathcal{T}_{\rho,r-1}(f, \mathcal{P}_n; \rho z) \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{\rho^n}{2\pi i^{r-1}}\int\limits_0^{2\pi} \Lambda_{1,2}\left(g(f_a^{(r-1)}), \mathcal{P}_n; ze^{-i\tau}\right)e^{in\tau}Q_{\rho,r-1,n}(\tau)\, d\tau.$$

Нетрудно проверить, что

$$\mathcal{T}_{\rho,r-1}(f, \mathcal{P}_n; z) = n\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{2n-k}\right)^{r-1}\left[1-\left(\frac{k}{2n-k}\right)^2\right]\rho^{2(n-k)}\alpha_k c_k(f)z^k.$$

Использовав построенные полиномиальные операторы, обозначим

$$V_{\rho,r-1}(f, \mathcal{P}_n; z) \overset{\mathrm{df}}{=} \Lambda_{\rho,r-1}(f, \mathcal{P}_n; z) + \mathcal{T}_{\rho,r-1}(f, \mathcal{P}_n; z)$$

и запишем соотношение, вытекающее из (14) и вида $\mathcal{T}_{\rho,r-1}(f, \mathcal{P}_n; z)$:

$$f(\rho z) - V_{\rho,r-1}(f, \mathcal{P}_n; \rho z) = \frac{\rho^n}{2\pi i^{r-1}}\int\limits_0^{2\pi}\left[f_a^{(r-1)}(ze^{-i\tau}) -\right.$$

$$\left. - \Lambda_{1,2}(g(f_a^{(r-1)}), \mathcal{P}_n; ze^{-i\tau})\right]e^{in\tau}Q_{\rho,r-1,n}(\tau)\, d\tau, \quad z \in U. \qquad (17)$$

Используя интегральное неравенство Минковского, неотрицательность функции $Q_{\rho,r-1,n}(\tau)$ и неравенство треугольника, из (17) получаем

$$\left\|f - V_{\rho,r-1}(f, \mathcal{P}_n)\right\|_{X_\rho} \le \frac{\rho^n}{n^{r-1}}\left\{\left\|f_a^{(r-1)} - g(f_a^{(r-1)})\right\|_X +\right.$$

$$\left. + \left\|g(f_a^{(r-1)}) - \Lambda_{1,2}(g(f_a^{(r-1)}), \mathcal{P}_n)\right\|_X\right\}. \qquad (18)$$

Поскольку $f_a^{(r-1)}(ze^{\pm i\tau}) = F^{(0,r-1)}(\rho, t\pm\tau)$, $z = \rho\exp(it)$, учитывая вид (15) вспомогательной функции $g(\cdot, z)$, имеем

$$f_a^{(r-1)}(z) - g(f_a^{(r-1)}, z) = \frac{n}{2} \int\limits_0^{\pi/(2n)} \Big[2F^{(0,r-1)}(\rho, t) - F^{(0,r-1)}(\rho, t+\tau) - - F^{(0,r-1)}(\rho, t-\tau)\Big] \cos n\tau \, d\tau. \tag{19}$$

Применяя в правой части равенства (19) интегрирование по частям, имеем

$$f_a^{(r-1)}(z) - g(f_a^{(r-1)}, z) = -\frac{1}{2} \int\limits_0^{\pi/(2n)} \Big[F^{(0,r)}(\rho, t+\tau) - F^{(0,r)}(\rho, t-\tau)\Big](1 - \sin n\tau) \, d\tau. \tag{20}$$

Используя интегральное неравенство Минковского и учитывая, что $F^{(0,r)} = f_a^{(r)}$, из (19), (20) получаем оценку сверху

$$\left\| f_a^{(r-1)} - g(f_a^{(r-1)}) \right\|_X \le \frac{1}{4} \int\limits_0^{\pi/n} \omega(f_a^{(r)}, \tau)_X \left(1 - \sin \frac{n\tau}{2}\right) d\tau. \tag{21}$$

Для оценки второго слагаемого правой части неравенства (18) воспользуемся соотношением

$$g(f_a^{(r-1)}, z) - \Lambda_{1,2}(g(f_a^{(r-1)}), \mathcal{P}_n; z) =$$
$$= -\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left(g(f_a^{(r)}; ze^{-i\tau})\right)_a^{(1)} e^{in\tau} Q_{1,2,n}(\tau) \, d\tau, \quad z \in U,$$

которое получим на основании формулы (14), положив в ней $\rho = 1$ и заменив $f(\cdot)$ на $g(f_a^{(r-1)}, \cdot)$. Применяя лемму А, имеем

$$\left\| g(f_a^{(r-1)}) - \Lambda_{1,2}(g(f_a^{(r-1)}), \mathcal{P}_n) \right\|_X \le n^{-2} \left\| \left(g(f_a^{(r)}, z)\right)_a^{(1)} \right\|_X \le$$
$$\le \frac{1}{4} \int\limits_0^{\pi/n} \omega(f_a^{(r)}, \tau)_X \sin \frac{n\tau}{2} \, d\tau. \tag{22}$$

Таким образом, оценка (13) следует из неравенств (18), (21), (22) и определения класса $W_\Phi^r(X)$, т. е.

$$\left\| f - V_{\rho,r-1}(f, \mathcal{P}_n) \right\|_{X_\rho} \le \frac{\rho^n}{4n^{r-1}} \int\limits_0^{\pi/n} \omega(f_a^{(r)}, \tau)_X \, d\tau \le \frac{\rho^n}{n^r} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Покажем, что в классе $W_\Phi^r(X)$ существует функция, для которой соотношение (13) обращается в равенство.

Рассмотрим функцию $f_0(z) \overset{\text{df}}{=} \rho^n (in)^{-r} \Phi(\pi/n) z^n / \|z^n\|_{X_\rho}$ и покажем, что $f_0(z) \in W_\Phi^r(X)$. Использовав полиномиальное неравенство, доказанное Л. В. Тайковым (см. [5, с. 293; 6, с. 345]) для произвольного полинома $p_n(z) = \sum_{k=0}^n c_k z^k$ из подпространства $\mathcal{P}_{n+1}$, запишем соотношение

$$\left\{ \int\limits_0^{2\pi} \left| (p_n)_a^{(r)}(Re^{i(\tau+t/2)}) - (p_n)_a^{(r)}(Re^{i(\tau-t/2)}) \right|^q d\tau \right\}^{1/q} \le$$
$$\le 2\left(\sin \frac{nt}{2}\right)_* \left\{ \int\limits_0^{2\pi} \left| (p_n)_a^{(r)}(Re^{i\tau}) \right|^q d\tau \right\}^{1/q}, \quad 0 < R \le 1, \tag{23}$$

где

$$(\sin x)_* \overset{\text{df}}{=} \left\{\sin x, \text{ если } 0 \le x < \pi/2; \ 1, \text{ если } x \ge \pi/2\right\}.$$

В силу (23), неравенства С. Н. Бернштейна для полиномов, определения норм в пространствах $X(U)$ и определения модуля непрерывности получим

$$\omega((p_n)_a^{(r)}, t)_X \le 2\left(\sin\frac{nt}{2}\right)_* \left\|(p_n)_a^{(r)}\right\|_X \le 2\left(\sin\frac{nt}{2}\right)_* n^r \|p_n\|_X. \tag{24}$$

Для произвольных $\rho \in (0, 1)$ и полиномов $p_n(z) \in \mathcal{P}_{n+1}$ запишем равенство

$$p_n(Re^{it}) = \frac{\rho^{-n}}{2\pi}\int_0^{2\pi} p_n(\rho Re^{i(t-\tau)})e^{in\tau}\left(1+2\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k\cos k\tau\right)d\tau,$$

в справедливости которого можно убедиться непосредственной проверкой. Применив лемму А, интегральное неравенство Минковского и использовав в каждом конкретном случае определения норм в пространствах H_q, H_q' и $\mathcal{B}(p, q, \lambda)$, из последнего равенства получим

$$\|p_n\|_X \le \rho^{-n}\|p_n\|_{X_\rho}. \tag{25}$$

Убедимся в том, что для функции $f_0(z)$ выполнены неравенства

$$\frac{m}{4}\int_0^{\pi/m} \omega((f_0)_a^{(r)}, t)_X\, dt \le \Phi\left(\frac{\pi}{m}\right) \quad \forall\, m \in \mathbb{N}. \tag{26}$$

Для этого рассмотрим два случая: $m \ge n$ и $m \le n$. Пусть, например, $m \ge n$. Тогда в силу (24) и (25) имеем

$$\frac{m}{4}\int_0^{\pi/m} \omega((f_0)_a^{(r)}, t)_X\, dt \le 2\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)\frac{m}{n}\sin^2\frac{\pi n}{4m}. \tag{27}$$

В случае $m \le n$ на основании аналогичных соображений запишем

$$\frac{m}{4}\int_0^{\pi/m} \omega((f_0)_a^{(r)}, t)_X\, dt \le \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)\left[\frac{m}{n} + \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{m}{n}\right)\right]. \tag{28}$$

Полагая $\eta = n/m$ и $x = \pi/n$, из (27), (28) в силу (12) получаем соотношение (26), эквивалентное неравенству $\omega^*((f_0)_a^{(r)}, \pi/m)_X \le (4/\pi)\,\Phi(\pi/m)$, где $m \in \mathbb{N}$. Следовательно, $f_0(z) \in W_\Phi^r(X)$ и

$$\left\|f_0 - V_{\rho,r-1}(f_0, \mathcal{P}_n)\right\|_{X_\rho} = \|f_0\|_{X_\rho} = \frac{\rho^n}{n^r}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Лемма 1 доказана.

7. ***Доказательство теоремы* 1.** Использовав (13) и определения линейного и тригонометрического n-поперечников, запишем следующие оценки сверху:

$$\left.\begin{aligned} &\delta_n(W_\Phi^r(X), X_\rho(U)) \\ &d_n^T(W_\Phi^r(X), X_\rho(U)) \end{aligned}\right\} \le \mathcal{E}(W_\Phi^r(X), X_{\rho,r-1}, \mathcal{P}_n) \le \frac{\rho^n}{n^r}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right). \tag{29}$$

Для получения оценки снизу рассмотрим в подпространстве $\mathcal{P}_{n+1}$ шар

$$S_{n+1} \overset{\text{df}}{=} \left\{p_n(z) \in \mathcal{P}_{n+1} : \|p_n\|_{X_\rho} \le \frac{\rho^n}{n^r}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)\right\}.$$

Используя далее неравенства (24), (25) и рассуждения, проведенные в конце доказательства леммы 1, аналогичным образом показываем принадлежность S_{n+1}

классу $W^r_\Phi(X)$. Из данного включения и определения бернштейновского n-поперечника имеем

$$b_n(W^r_\Phi(X), X_\rho(U)) \ \ge\ \frac{\rho^n}{n^r}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right). \tag{30}$$

Сопоставив оценки (29), (30) и неравенства (1), (2) между различными n-поперечниками, получим соотношение (5).

Из леммы 1 и равенства $\delta_n(W^r_\Phi(X), X_\rho(U)) \ =\ \rho^n n^{-r}\Phi(\pi/n)$ следует, что $V_{\rho,r-1}(f, \mathcal{P}_n, z)$ является наилучшим линейным методом приближения класса $W^r_\Phi(X)$ в метрике пространства $X_\rho(U)$.

Теорема 1 доказана.

8. При ***доказательстве теоремы*** **2** нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

Утверждение А [12]. *Для любого полинома* $p_n(z) \in \mathcal{P}_{n+1}$ *имеют место неравенства*

$$\begin{gathered}\left\|(p_n)^{(r)}_a\right\|_{H_q} \ \le\ n^r\left(\frac{nq}{2}+1\right)^{1/q}\|p_n\|_{H'_q};\\ \left\|(p_n)^{(r)}_a\right\|_{H_q} \ \le\ n^r B^{-1/\lambda}\left(n\lambda+1;\ \lambda\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\right)\|p_n\|_{p,q,\lambda},\end{gathered} \tag{31}$$

где $0 < p < q < \infty,\ \min(q,\lambda) \ge 1.$

Учитывая приведенный в п. 4 вид оператора $V_{r-1}(f, \tilde{\mathcal{P}}_n, z)$ и используя равенство (17), где $z = \exp(it)$, лемму А и неравенство Минковского, получаем

$$\begin{gathered}M_q(f - \tilde{V}_{r-1}(f, \tilde{\mathcal{P}}_n); \rho) \ \le\\ \le\ \frac{\rho^n}{n^{r-1}}\left\|f^{(r-1)}_a - \Lambda_{1,2}(g(f^{(r-1)}_a), \mathcal{P}_n)\right\|_{H_q} \ \le\\ \le\ \frac{\rho^n}{n^{r-1}}\left\{\left\|f^{(r-1)}_a - g(f^{(r-1)}_a)\right\|_{H_q} + \left\|g(f^{(r-1)}_a) - \Lambda_{1,2}(g(f^{(r-1)}_a), \mathcal{P}_n)\right\|_{H_q}\right\}.\end{gathered} \tag{32}$$

Докажем справедливость равенств (6), поскольку равенства (7) устанавливаются аналогично.

В силу определения пространства H'_q и неравенств (21), (22) из (32) имеем

$$\mathcal{E}(W^r_\Phi(H_q), \tilde{V}_{r-1}, \tilde{\mathcal{P}}_n) \ \le\ \frac{\Phi(\pi/n)}{n^r(nq/2+1)^{1/q}}.$$

Отсюда следует, что

$$\left.\begin{aligned}\delta_n(W^r_\Phi(H_q),\ \tilde{H}'_q)\\ d^T_n(W^r_\Phi(H_q),\ \tilde{H}'_q)\end{aligned}\right\} \ \le\ \frac{\Phi(\pi/n)}{n^r(nq/2+1)^{1/q}}. \tag{33}$$

Поскольку пространство H'_q изоморфно и изометрично вложено в пространство $\tilde{H}'_q$, на основании определений и свойств бернштейновского и гельфандовского n-поперечников (см., например, [3]) запишем равенства

$$\begin{gathered}d^n(W^r_\Phi(H_q),\ H'_q) \ =\ d^n(W^r_\Phi(H_q),\ \tilde{H}'_q),\\ b_n(W^r_\Phi(H_q),\ H'_q) \ =\ b_n(W^r_\Phi(H_q),\ \tilde{H}'_q).\end{gathered} \tag{34}$$

Из (33), (34) и (1), (2) следуют оценки сверху рассматриваемых n-поперечников.

Для получения оценок снизу введем шар

$$\tilde{S}_{n+1} = \left\{ p_n(z) \in \mathcal{P}_{n+1} : \| p_n \|_{H'_q} \leq \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)(nq/2+1)^{-1/q} n^{-r} \right\}.$$

Из (24) и (31) имеем

$$\omega\left((p_n)_a^{(r)}, t\right)_{H_q} \leq 2\left(\sin\frac{nt}{2}\right)_* n^r \left(\frac{nq}{2}+1\right)^{1/q} \| p_n \|_{H'_q}. \tag{35}$$

Доказательство включения $\tilde{S}_{n+1} \subset W_\Phi^r(H_q)$ основано на применении неравенства (35) и аналогично установлению факта $S_{n+1} \subset W_\Phi^r(X)$ при доказательстве теоремы 1. Используя определение бернштейновского n-поперечника, получаем

$$b_n(W_\Phi^r(H_q),\, H'_q) \geq b_n(\tilde{S}_{n+1},\, H'_q) \geq \frac{\Phi(\pi/n)}{n^r\,(nq/2+1)^{1/q}}. \tag{36}$$

Очевидно, что равенства (6) следуют из (33), (34), (36) и (1), (2).

Теорема 2 доказана.

9. ***Доказательство теоремы* 3.** Приведем необходимые понятия и определения из [17]. Пусть $\mathcal{H} = \{\mathcal{H}_t\}_{t\in A}$ — семейство полунорм $\mathcal{H}_t$, определенных в банаховом пространстве Y и индексированных элементами t множества $A \subset (0, 1]$, имеющего нуль своей предельной точкой и содержащего точку $t = 1$. Функция

$$\varphi(t) \overset{\mathrm{df}}{=} \sup\left\{\mathcal{H}_t(f) : \|f\|_Y \leq 1\right\}, \quad t \in A,$$

при любом $0 < \sigma \leq 1$ удовлетворяет условию

$$\sup\left\{\varphi(t) : t \in (\sigma, 1] \cap A\right\} < \infty. \tag{37}$$

В пространстве Y рассмотрим классы

$$\mathfrak{N} = \left\{ f \in Y : \sup_{t\in A} \mathcal{H}_t(f) \leq 1 \right\}, \tag{38}$$

$$\mathfrak{N}_* = \left\{ f \in \mathfrak{N} : \lim_{\substack{t\to 0\\ (t\in A)}} \mathcal{H}_t(f) = 0 \right\}. \tag{39}$$

Далее нам понадобятся следующие факты.

Теорема А [17]. *Пусть число* $\beta \geq 1$. *Если множество* $\beta\mathfrak{N}_*$ *плотно в* $\mathfrak{N}$, *то для любой последовательности полунорм* P_n, *ограниченных на* Y, *и элементов* $f_n \in \mathfrak{N}$ *таких, что* $P_n(f_n) \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, *и*

$$\lim_{n\to\infty} \| f_n \|_Y = 0,$$

существует элемент $f \in \mathfrak{N}$, *для которого*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{P_n(f)}{P_n(f_n)} \geq \frac{1}{\beta}.$$

Утверждение В [18]. *Пусть* $n_0, n_1, \ldots, n_k$ — *целые неотрицательные числа, для которых* $n_l \neq n_j$ *при* $l \neq j$. *Тогда*

$$\inf\left\{ \left\| z^{n_0} - \sum_{j=1}^{k} c_j z^{n_j} \right\|_X : c_j \in \mathbb{C},\ j = \overline{1, k} \right\} = \| z^{n_0} \|_X,$$

где $X(U)$ — *любое из перечисленных в п.2 банаховых пространств.*

Пусть Y — множество функций $f(z) \in X(U)$, у которых r-я производная $f_a^{(r)}(z) \in X(U)$. Введя в Y норму $\|f\|_Y \stackrel{\text{df}}{=} \max\left\{\|f\|_X, \left\|f_a^{(r)}\right\|_X\right\}$, превратим его в банахово пространство. Функциональный класс $W_\Phi^r(X)$ можно задать в Y как класс $\mathfrak{N}$ вида (38) посредством семейства полунорм

$$\mathcal{H}_t(f) \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{4t\,\Phi(\pi t)} \int_0^{\pi t} \omega(f_a^{(r)}, \tau)_X \, d\tau, \tag{40}$$

где $t \in A_* \stackrel{\text{df}}{=} \{1/m\}_{m\in\mathbb{N}}$. При этом условие (37) для полунорм (40) имеет место.

Покажем, что множество $\mathfrak{N}_*$ вида (39), порожденное полунормами вида (40), плотно в $\mathfrak{N}$. Для этого воспользуемся вспомогательными функциями, построенными на основе функций $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) z^k \in X(U)$. Положив $\nu_0 \stackrel{\text{df}}{=} 1$, $\nu_k \stackrel{\text{df}}{=} (hk)^{-1} \sin hk$, $h > 0$, $k \in \mathbb{N}$, запишем ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) \nu_k z^k$, сумма которого $f_h(z)$ есть аналитическая в круге U функция, представимая в виде

$$f_h(z) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} f(ze^{i\tau}) d\tau.$$

Используя в каждом конкретном случае определение нормы в пространстве $X(U)$ и интегральное неравенство Минковского, нетрудно показать, что $f_h(z) \in X$ и

$$\|f - f_h\|_X \le \frac{1}{h} \int_0^h \omega(f, \tau)_X \, d\tau. \tag{41}$$

Пусть $f(z) = f(Re^{it}) \stackrel{\text{df}}{=} F(R, t)$. Поскольку

$$(f_h(z))_a^{(1)} = \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} F^{(0,1)}(R, t+\tau) d\tau =$$

$$= \frac{1}{2h} \left[F(R, t+h) - F(R, t-h) \right],$$

имеет место очевидное соотношение

$$\left\|(f_h)_a^{(1)}\right\|_X \le \frac{1}{h} \omega(f, h)_X. \tag{42}$$

Учитывая, что $(f_h(z))_a^{(r)} = (f_a^{(r)}(z))_h$, для любой функции $f(z) \in Y$ записываем неравенство $\omega((f_h)_a^{(r)}, \tau)_X \le \omega(f_a^{(r)}, \tau)_X$. Тогда при любом $t \in A_*$ для произвольного элемента $f(z) \in W_\Phi^r(X)$ имеем

$$\omega^*((f_h)_a^{(r)}, \pi t) \le \frac{1}{\pi t} \int_0^{\pi t} \omega(f_a^{(r)}, \tau)_X \, d\tau = \omega^*(f_a^{(r)}, \pi t) \le \frac{4}{\pi} \Phi(\pi t),$$

а это означает справедливость включения $f_h(z) \in W_\Phi^r(X)$ или, что то же самое, $f_h(z) \in \mathfrak{N}$.

Воспользовавшись интегральным неравенством Минковского и инвариантностью нормы пространства $X(U)$ относительно поворота, т. е. равенством $\left\|f(ze^{i\tau})\right\|_X = \|f(z)\|_X$, запишем

$$\left\|(f_h)_a^{(r)}(ze^{it/2}) - (f_h)_a^{(r)}(ze^{-it/2})\right\|_X \le \int_{-t/2}^{t/2} \left\|(f_h)_a^{(r+1)}(ze^{i\tau})\right\|_X d\tau =$$

$$= t\left\|(f_h)_a^{(r+1)}\right\|_X = t\left\|\left[(f_a^{(r)})_h\right]_a^{(1)}\right\|_X.$$

Отсюда в силу определения модуля непрерывности и (42) получим

$$\omega((f_h)_a^{(r)}, t)_X \le \frac{t}{h}\omega(f_a^{(r)}, h)_X. \tag{43}$$

Из (40) и (43) следует оценка сверху

$$\mathcal{K}_t(f_h) \le \pi^2 \frac{t\,\omega(f_a^{(r)}, h)_X}{8h\,\Phi(\pi t)} \qquad \forall\, t \in A_*.$$

Поскольку $\lim\{\mathcal{K}_t(f_h)\colon t \to 0,\ t \in A_*\} = 0$, это означает, что $f_h(z) \in \mathfrak{N}_*$.

На основании (41) для произвольной функции $f(z) \in Y$ запишем

$$\left\|f_a^{(r)} - (f_a^{(r)})_h\right\|_X \le \omega(f_a^{(r)}, h)_X \quad \text{и} \quad \|f - f_h\|_X \le \omega(f, h)_X.$$

Тогда

$$\lim_{h\to 0}\|f - f_h\|_Y = \lim_{h\to 0}\max\left\{\|f - f_h\|_X, \left\|f_a^{(r)} - (f_a^{(r)})_h\right\|_X\right\} = 0.$$

Отсюда следует, что множество $\mathfrak{N}_*$ плотно в $\mathfrak{N}$.

Рассмотрим функцию $f_0(z) \in W_\Phi^r(X)$, введенную при доказательстве леммы 1. Из утверждения B следует

$$E(f_0, \mathcal{P}_n, X_\rho(U)) = \|f_0\|_{X_\rho} = \frac{\rho^n}{n^r}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right). \tag{44}$$

Очевидно, что

$$\lim_{n\to\infty}\|f_0\|_Y = 0.$$

Понимая под последовательностью полунорм $P_n(f)$ величины наилучших полиномиальных приближений $E(f, \mathcal{P}_n, X_\rho(U))$ и используя теорему A, условия которой выполнены, записываем

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{E(\tilde f, \mathcal{P}_n, X_\rho(U))}{E(f_0, \mathcal{P}_n, X_\rho(U))} \ge 1,$$

где $\tilde f(z)$ — некоторая функция из класса $W_\Phi^r(X)$.

В силу (44) и равенств (5) имеем

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{E(\tilde f, \mathcal{P}_n, X_\rho(U))}{E(W_\Phi^r(X), \mathcal{P}_n, X_\rho(U))} \ge 1. \tag{45}$$

Поскольку

$$\frac{E(\tilde f, \mathcal{P}_n, X_\rho(U))}{E(W_\Phi^r(X), \mathcal{P}_n, X_\rho(U))} \le 1,$$

из данного неравенства и (45) следует соотношение (8).

Теорема 3 доказана.

10. ***Доказательство теоремы* 4.** Для аналитической в U функции $f(z)$ запишем

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=\rho} f(\xi)\xi^{-n-1}d\xi = \frac{1}{2\pi\rho^n}\int_0^{2\pi}\left[f(\rho e^{i\tau}) - V_{\rho,r-1}(f, \mathcal{P}_n; \rho e^{i\tau})\right]e^{-in\tau}d\tau, \tag{46}$$

где $V_{\rho,r-1}(f, \mathcal{P}_n; z)$ — линейный оператор, определенный в п. 4.

В силу неравенства Гельдера и соотношения (5) для произвольной функции $f(z) \in W_\Phi^r(H_q)$ имеем

$$|c_n(f)| \le \frac{1}{\rho^n}\mathcal{E}(f; V_{\rho,r-1}(f, \mathcal{P}_n); H_{q,\rho}) \le \frac{1}{n^r}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Отсюда следует

$$\mathcal{L}_n(W_\Phi^r(H_q)) \le \frac{1}{n^r}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right). \tag{47}$$

Очевидно, что

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi(\rho R)^n}\int_0^{2\pi}\left[f(\rho R e^{i\tau}) - V_{\rho,r-1}(f, \mathcal{P}_n; \rho R e^{i\tau})\right]e^{-in\tau}d\tau, \tag{48}$$

где $0 < \rho,\ R < 1$. На основании неравенства Гельдера из (48) получаем

$$R^n|c_n(f)| \le \rho^{-n}M_q(f - V_{\rho,r-1}(f, \mathcal{P}_n); \rho R).$$

В силу определения нормы в пространствах $X(U) = H_q'$ и $X(U) = \mathcal{B}(p, q, \lambda)$ для произвольной функции $f(z) \in W_\Phi^r(X)$ отсюда следует

$$|c_n(f)| \le \frac{1}{\rho^n}\mathcal{E}(f; V_{\rho,r-1}(f, \mathcal{P}_n); X_\rho)\begin{cases}\left(\dfrac{nq}{2}+1\right)^{1/q}, & X(U) = H_q',\\ B^{-1/\lambda}\left(n\lambda+1;\ \lambda\left(\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{q}\right)\right), & X(U) = \mathcal{B}(p, q, \lambda).\end{cases}$$

Из этого неравенства и соотношения (5) получаем оценки сверху

$$\mathcal{L}_n(W_\Phi^r(X)) \le \frac{1}{n^r}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)\begin{cases}\left(\dfrac{nq}{2}+1\right)^{1/q}, & X(U) = H_q',\\ B^{-1/\lambda}\left(n\lambda+1;\ \lambda\left(\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{q}\right)\right), & X(U) = \mathcal{B}(p, q, \lambda).\end{cases} \tag{49}$$

Для получения оценок снизу рассмотрим введенную при доказательстве леммы 1 функцию $f_0(z) \in W_\Phi^r(X)$ (случай $\rho = 1$). Исходя из вида функции $f_0(z)$ (см. п. 6) и определения величины $\mathcal{L}_n(W_\Phi^r(X))$, записываем оценки снизу

$$\mathcal{L}_n(W_\Phi^r(X)) \ge |c_n(f_0)| =$$

$$= \frac{1}{n^r}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)\begin{cases}1, & X(U) = H_q,\\ \left(\dfrac{nq}{2}+1\right)^{1/q}, & X(U) = H_q',\\ B^{-1/\lambda}\left(n\lambda+1;\ \lambda\left(\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{q}\right)\right), & X(U) = \mathcal{B}(p, q, \lambda).\end{cases} \tag{50}$$

Сравнивая соотношения (47), (49) и (50), получаем требуемые равенства (9) – (11).

Теорема 4 доказана.

11. Результаты, полученные в пп. 4 – 8, можно интерпретировать с точки зрения задач оптимального восстановления и кодирования функций. Рассмотрим постановки указанных задач в стиле Н. П.Корнейчука (см., например, [19 – 21]) и приведем необходимые понятия и определения.

Пусть в нормированном функциональном пространстве X задан набор $\mathfrak{N}_n = \{\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n\}$ определенных на X функционалов η_k, $k = \overline{1, n}$. Множество $\mathfrak{N}_n$ можно рассматривать как метод кодирования, сопоставляющий функции $f \in X$ вектор $T(f, \mathfrak{N}_n) = \{\eta_1(f), \ldots, \eta_n(f)\}$. Задачу восстановления функции f по информации T решают, сопоставляя вектору $T(f, \mathfrak{N}_n)$ функцию

$$\psi(f; \mathfrak{N}_n, G_n, \Gamma_n; z) = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \eta_k(f) g_k(z),$$

где $G_n = \{g_j(z)\}_{j=1}^{n}$ и $\Gamma_n = \{\gamma_j\}_{j=1}^{n}$ — соответственно произвольные система линейно независимых функций из X и набор числовых коэффициентов, позволяющий наилучшим образом воспроизводить элементы класса $\mathfrak{M} \subset X$.

Погрешность восстановления на классе $\mathfrak{M}$ считают равной

$$R(\mathfrak{M}; \mathfrak{N}_n, G_n) = \inf\left\{\sup\left\{\|f - \psi(f; \mathfrak{N}_n, G_n, \Gamma_n)\|_X : f \in \mathfrak{M}\right\} : \Gamma_n\right\} \qquad (51)$$

и полагают

$$R_n(\mathfrak{M}, X) = \inf\left\{R(\mathfrak{M}; \mathfrak{N}_n, G_n) : \mathfrak{N}_n, G_n\right\}.$$

Пусть $\mathfrak{N}'_n$ — набор заданных на X линейных ограниченных функционалов. Тогда рассматривают следующую характеристику:

$$R'_n(\mathfrak{M}, X) = \inf\left\{R(\mathfrak{M}; \mathfrak{N}'_n, G_n) : \mathfrak{N}'_n, G_n\right\}.$$

Метод восстановления $(\mathring{\mathfrak{N}}_n, \mathring{G}_n, \mathring{\Gamma}_n)$ $\{(\mathring{\mathfrak{N}}'_n, \mathring{G}_n, \mathring{\Gamma}_n)\}$, для которого

$$R_n(\mathfrak{M}, X) = \sup\left\{\left\|f - \psi(f; \mathring{\mathfrak{N}}_n, \mathring{G}_n, \mathring{\Gamma}_n)\right\|_X : f \in \mathfrak{M}\right\}$$

$$\left(R'_n(\mathfrak{M}, X) = \sup\left\{\left\|f - \psi(f; \mathring{\mathfrak{N}}'_n, \mathring{G}_n, \mathring{\Gamma}_n)\right\|_X : f \in \mathfrak{M}\right\}\right),$$

называют оптимальным (оптимальным линейным) методом восстановления функций из класса $\mathfrak{M}$. Важную роль в оценке рассмотренных здесь величин играет следующее утверждение.

Утверждение C [19]. *Справедливы следующие соотношения*:

$$R'_n(\mathfrak{M}, X) = \delta_n(\mathfrak{M}, X),$$
$$R_n(\mathfrak{M}, X) \geq d_n(\mathfrak{M}, X),$$

причем если $\mathfrak{M} = \tilde{\mathfrak{M}} \oplus L$, *где* $\tilde{\mathfrak{M}}$ — *компакт, а* L — *конечномерное подпространство, то в последнем соотношении имеет место знак равенства.*

Из утверждения C следует, что с формальной точки зрения задачи о поперечниках и об оптимальном восстановлении во многих случаях эквивалентны, а нахождение оптимальных методов восстановления, гарантирующих минимальную погрешность на классе $\mathfrak{M}$, является актуальным для многих вопросов прикладного характера.

Наряду с (51) рассматривают величину [22]

$$\mathcal{K}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}_n) = \sup\left\{\|f_1 - f_2\|_X : f_1, f_2 \in \mathfrak{M},\ T(f_1, \mathfrak{N}_n) = T(f_2, \mathfrak{N}_n)\right\},$$

которую можно интерпретировать как погрешность метода кодирования на классе $\mathfrak{M}$ с помощью фиксированного набора функционалов $\mathfrak{N}_n$.

Полагая

$$\lambda^n(\mathfrak{M}, X) = \inf\{\mathcal{K}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}_n): \mathfrak{N}_n\},$$

где inf берется по всем наборам $\mathfrak{N}_n$ линейных функционалов, определенных на X^*, получаем [19]

$$\lambda^n(\mathfrak{M}, X) \le 2R'_n(\mathfrak{M}, X).$$

Если $\mathfrak{M}$ — центрально-симметричное и выпуклое множество, то

$$\lambda^n(\mathfrak{M}, X) = 2d^n(\mathfrak{M}, X).$$

Теорема 5. *Наилучший метод кодирования функций из класса* $W^r_\Phi(X)$ *в банаховом пространстве* $X_\rho(U)$, *где* $X(U)$ — *любое из банаховых пространств* H_q, H'_q *либо* $\mathcal{B}(p, q, \lambda)$, *доставляет набор* $\mathring{\mathfrak{N}}_n$ *функционалов*

$$\mathring{\eta}_k(f) = c_k(f), \quad k = \overline{0, n-1}. \tag{52}$$

Оптимальным линейным методом восстановления $(\mathring{\mathfrak{N}}'_n, G_n, \mathring{\Gamma}_n)$ *функций* $f(z)$ *из класса* $W^r_\Phi(X)$ *в пространстве* $X_\rho(U)$ *является определенная в п.* 4 *функция* $V_{\rho, r-1}(f, \mathcal{P}_n; z)$. *При этом для любого* $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{2}\lambda^n(W^r_\Phi(X), X_\rho(U)) = R_n(W^r_\Phi(X), X_\rho(U)) =$$

$$= R'_n(W^r_\Phi(X), X_\rho(U)) = \rho^n n^{-r}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Теорема 6. *Оптимальным линейным методом восстановления элементов* $f(z) \in W^r_\Phi(H_q)$ *в банаховых пространствах* $\tilde{H}'_q$ *либо* $\widetilde{\mathcal{B}(p, q, \lambda)}$ *является определенная в п.* 4 *функция* $\tilde{V}_{r-1}(f, \tilde{\mathcal{P}}_n; z)$, *а наилучшим методом кодирования* — *набор функционалов* (52). *При этом для любого* $n \in \mathbb{N}$ *справедливы равенства*

$$\frac{1}{2}\lambda^n(W^r_\Phi(H_q), \tilde{X}(U)) = R_n(W^r_\Phi(H_q), \tilde{X}(U)) =$$

$$= R'_n(W^r_\Phi(H_q), \tilde{X}(U)) = n^{-r}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)\begin{cases}\left(\dfrac{nq}{2}+1\right)^{-1/q}, & \tilde{X}(U) = \tilde{H}'_q, \\ B^{1/\lambda}(n\lambda+1;\ \lambda(1/p-1/q)), & \tilde{X}(U) = \widetilde{\mathcal{B}(p, q, \lambda)}.\end{cases}$$

1. *Kolmogorov A. N.* Über die beste Annaherung von Funktionen einer gegebenen Funktionklassen // Ann. Math. – 1936. – № 37. – S. 107 – 111.
2. *Тихомиров В. М.* Теория приближений // Итоги науки и техники. Совр. пробл. мат. Фундам. направления / ВИНИТИ. – 1987. – **14**. – С. 103 – 260.
3. *Pinkus A.* n-Widths in approximation theory. – Berlin: Springer-Verlag, 1985. – 292 p.
4. *Тихомиров В. М.* Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений // Успехи мат. наук. – 1960. – **15**, № 3. – С. 81 – 120.
5. *Тайков Л. В.* Поперечники некоторых классов аналитических функций // Мат. заметки. – 1977. – **22**, № 2. – С. 285 – 295.
6. *Айнуллоев Н., Тайков Л. В.* Наилучшее приближение в смысле Колмогорова классов аналитических в единичном круге функций // Там же. – 1986. – **40**, № 3. – С. 341 – 351.
7. *Fisher S. D., Micchelli C. A.* The n-widths of sets of analytic functions // Duke Math. J. – 1980. – **47**, № 7. – P. 789 – 801.

8. *Бабенко К. И.* О наилучших приближениях одного класса аналитических функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1958. – **22**, № 5. – С. 631 – 640.
9. *Фарков Ю. А.* Поперечники классов Харди и Бергмана в шаре из $\mathbb{C}^n$ // Успехи мат. наук. – 1990. – **45**, № 5. – С. 197 – 198.
10. *Осипенко К. Ю., Стесин М. И.* О поперечниках класса Харди H_2 в n-мерном шаре // Там же. – С. 193 – 194.
11. *Вакарчук С. Б.* О точных оценках поперечников некоторых классов аналитических функций многих комплексных переменных // Изв. вузов. Математика. – 1993. – № 7. – С. 3 – 7.
12. *Вакарчук С. Б.* Наилучшие линейные методы приближения и поперечники классов аналитических в круге функций // Мат. заметки. – 1995. – **57**, № 1. – С. 30 – 39.
13. *Вакарчук С. Б.* О наилучших линейных методах приближения и поперечниках некоторых классов аналитических функций // Там же. – 1999. – **65**, № 2. – С. 186 – 193.
14. *Duren P. L., Romberg B. W., Shields A. L.* Linear functionals in H_p spaces with $0 < p < 1$ // J. reine und angew. Math. – 1969. – **238**. – S. 4 – 60.
15. *Гварадзе М. И.* Об одном классе пространств аналитических функций // Мат. заметки. – 1977. – **21**, № 2. – С. 141 – 150.
16. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2 т. – М.: Мир, 1965. – Т. 1. – 616 с.
17. *Давыдов О. В.* Асимптотическое поведение наилучших приближений индивидуальных функций классов $W^r H_\omega$ в метрике L_p // Докл. АН СССР. – 1989. – **306**, № 4. – С. 777 – 781.
18. *Двейрин М. З., Чебаненко И. В.* О полиномиальной аппроксимации в банаховом пространстве аналитических функций // Теория отображений и приближение функций. – Киев, 1983. – С. 62 – 73.
19. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987. – 424 с.
20. *Корнейчук Н. П.* Поперечники в L_p классов непрерывных и дифференцируемых функций и оптимальные методы кодирования и восстановления функций и их производных // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1981. – **45**, № 2. – С. 266 – 286.
21. *Корнейчук Н. П.* Оптимальные методы кодирования и восстановления функций // Proc. Int. Symp. Optimal Algorithms (Blagoevgrad, April 21-25, 1986). – Sofia: Bulgar. Acad. Sci., 1986. – P. 157 – 171.
22. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. – 304 с.

Получено 10.04.2000,
после доработки — 18.06.2004