УДК 519.6

І. І. Демків (Нац. ун-т „Львів. політехніка")

ПРО ВЛАСТИВОСТІ ОПЕРАТОРНИХ ПОЛІНОМІВ ТИПУ БЕРНШТЕЙНА, ЩО НАБЛИЖАЮТЬ ОПЕРАТОР УРИСОНА

We generalize properties of the Bernstein polynomials to the Bernstein-type operator polynomials approximating the Urison operator.

Узагальнюються властивості поліномів Бернштейна на операторні поліноми типу Бернштейна, що наближають оператор Урисона.

1. Вступ. Вивченню поліномів Бернштейна присвячено значну кількість робіт (див., наприклад, [1, 2] та наведені в них списки бібліографії). Подальше дослідження якісних властивостей поліномів Бернштейна знайшло відображення у роботах [3 – 7]. Зокрема, у згаданих роботах доведено наступні властивості поліномів Бернштейна:

I. Якщо функція $f(x)$ є неспадною на проміжку $[0, 1]$, то для будь-якого $n \geq 1$ поліном Бернштейна $B_n(f; x)$ також є неспадним.

II. Якщо $f \in \mathrm{Lip}_A \mu$, то для будь-якого $n \geq 1$ поліном Бернштейна $B_n(f; x) \in \mathrm{Lip}_A \mu$. Нагадаємо, що функція f належить класу Ліпшиця $\mathrm{Lip}_A \mu$, якщо $w(f, t) \leq A t^{\mu}$ для $0 < t \leq 1$, де $0 < \mu \leq 1$, $A \geq 0$, $w(f, t) = \max_{x_1, x_2 \in [0, 1]} |f(x_2) - f(x_1)|$ — модуль неперервності $f(x)$.

III. Якщо функція $f(x)$ опукла донизу, то для будь-якого $n \geq 1$ поліном Бернштейна $B_n(f; x)$ також опуклий донизу і

$$B_n(f; x) \geq B_{n+1}(f; x) \geq \ldots \geq f(x), \quad x \in [0, 1].$$

IV. Якщо $w(t)$ є модулем неперервності, то з того, що $f \in H^w$, випливає, що $B_n(f; x) \in H^{2w}$ $\forall n \geq 1$; якщо ж $w(t)$ є опуклою догори, то з того, що $f \in H^w$, випливає, що $B_n(f; x) \in H^w$ $\forall n \geq 1$. Нагадаємо, що функція $w(t)$ на проміжку $[0, 1]$ називається модулем неперервності, якщо $w(t)$ є неперервною, неспадною, напівадитивною і $\lim_{t \to 0+0} w(t) = w(0) = 0$. Через H^w позначено клас неперервних функцій на проміжку $[0, 1]$, що задовольняють нерівність $w(f, t) \leq w(t)$.

Дана робота узагальнює властивості I – IV поліномів Бернштейна на операторні поліноми типу Бернштейна

$$B_n(F, x(\cdot)) = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} f\left(t, z, \frac{k}{n}\right) C_n^k x^k(z)[1 - x(z)]^{n-k} dz, \tag{1}$$

які використовуються для наближення оператора Урисона

$$F(t, x(\cdot)) = \int_0^1 f(t, z, x(z)) dz \tag{2}$$

з невідомим ядром $f(t, z, x(z))$ при заданих континуальних інтерполяційних умовах

$$F(t, x_i(\cdot)) = \int_0^1 f(t, z, x_i(z)) dz, \quad x_i(z) = \frac{i}{n} H(z - \xi), \quad \xi \in [0, 1], \quad i = \overline{0, n}, \tag{3}$$

де $H(y)$ — функція Хевісайда [8]. У роботі [8] доведено теореми про збіжність та швидкість збіжності поліномів (1) до оператора Урисона (2).

Згідно з [8], з використанням інтерполяційних умов (3) формулу (1) можна записати у вигляді

$$B_n(F, x(\cdot)) = F(t,0) - \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial F\left(t, \frac{k}{n} H(\cdot - z)\right)}{\partial z} C_n^k x^k(z)[1-x(z)]^{n-k}\, dz, \quad (4)$$

де

$$f\left(t, z, \frac{k}{n}\right) = -\frac{\partial F\left(t, \frac{k}{n} H(\cdot - z)\right)}{\partial z} + f(t, z, 0). \quad (5)$$

Зауважимо, що операторний поліном типу Бернштейна (3) буде інтерполяційним на одному континуальному вузлі вигляду $x_n(z) = H(z-\xi)$, $\xi \in [0,1]$, $i = n$, а на всіх інших вузлах з (3) при $i \neq n$ він не буде інтерполювати оператор $F(t, x(\cdot))$. Дійсно, маємо

$$B_n(F, x_i(\cdot)) = F(t,0) - \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial F\left(t, \frac{k}{n} H(\cdot - z)\right)}{\partial z} C_n^k x_i^k(z)[1-x_i(z)]^{n-k}\, dz =$$

$$= F(t,0) - \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial F\left(t, \frac{k}{n} H(\cdot - z)\right)}{\partial z} C_n^k \left[\frac{i}{n} H(z-\xi)\right]^k \left[1 - \frac{i}{n} H(z-\xi\right]^{n-k} dz =$$

$$= F(t,0) - \int_0^1 \frac{\partial F(t,0)}{\partial z} \left[1 - \frac{i}{n} H(z-\xi\right]^n dz -$$

$$- \int_\xi^1 \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F\left(t, \frac{k}{n} H(\cdot - z)\right)}{\partial z} C_n^k \left[\frac{i}{n}\right]^k \left[1 - \frac{i}{n}\right]^{n-k} dz =$$

$$= F(t,0) - \left[\xi + \left(1 - \frac{i}{n}\right)^n (1-\xi)\right] \frac{\partial F(t,0)}{\partial z} -$$

$$- \sum_{k=1}^{n} \left[F(t,0) - F\left(t, \frac{k}{n} H(\cdot - \xi)\right)\right] C_n^k \left[\frac{i}{n}\right]^k \left[1 - \frac{i}{n}\right]^{n-k} =$$

$$= F(t,0) - F(t,0)\left(1 - \left(1 - \frac{i}{n}\right)^n\right) + \sum_{k=1}^{n} F\left(t, \frac{k}{n} H(\cdot - \xi)\right) C_n^k \left[\frac{i}{n}\right]^k \left[1 - \frac{i}{n}\right]^{n-k} =$$

$$= F(t,0)\left(1 - \frac{i}{n}\right)^n + \sum_{k=1}^{n} F\left(t, \frac{k}{n} H(\cdot - \xi)\right) C_n^k \left[\frac{i}{n}\right]^k \left[1 - \frac{i}{n}\right]^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} F\left(t, \frac{k}{n} H(\cdot - \xi)\right) C_n^k \left[\frac{i}{n}\right]^k \left[1 - \frac{i}{n}\right]^{n-k},$$

а останній вираз збігається з $F\left(t, \frac{i}{n} H(\cdot - \xi)\right)$ лише тоді, коли $i = n$ або $i = 0$. Але випадок $i = 0$ міститься у випадку $i = n$. Тут враховано, що

$$\left.\frac{\partial F(t, y\, H(\cdot - z))}{\partial z}\right|_{y=0} = [f(t,z,0) - f(t,z,y)]|_{y=0} \equiv 0.$$

Уперше континуальні інтерполяційні вузли з'явились у роботі [9] при побудові функціональних інтерполяційних поліномів типу Ньютона. Оскільки у такого типу інтерполянтів (див. також [10]) використовується інформація про оператор, що інтерполюється, на континуумі елементів із відповідного функціонального простору, важливим є побудова таких інтерполянтів, які задовольняють інтерполяційні умови також на континуальних вузлах. Як показано вище, операторні поліноми типу Бернштейна (4) мають таку властивість. Основні результати даної роботи викладено у наступному пункті.

2. Властивості операторних поліномів типу Бернштейна.

Властивість 1. *Нехай* $x(z) \in \Phi = \{x(z) \in C[0,1]\colon 0 \le x(t) \le 1\}$, *тоді якщо функція* $\left[-\dfrac{\partial F(t, x(\cdot)H(\cdot - z))}{\partial z}\right]$ *монотонно зростає по* $x(z)$, *то для будь-якого* $n \ge 1$ $B_n(F, x(\cdot))$ *також монотонно зростає по* $x(z)$.

Доведення. Нехай $x_2(z) > x_1(z)$ $\forall\, z \in [0,1]$. Знайдемо різницю

$$B_n(F, x_2(\cdot)) - B_n(F, x_1(\cdot)) =$$

$$= -\int_0^1 \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial F\left(t, \frac{k}{n} H(\cdot - z)\right)}{\partial z} \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(x_2^k(z)(1 - x_2(z))^{n-k} - x_1^k(z)(1 - x_1(z))^{n-k}\right) dz.$$

Враховуючи, що

$$x_2^k(z)(1 - x_2(z))^{n-k} - x_1^k(z)(1 - x_1(z))^{n-k} =$$

$$= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \xi}\left((x_1(z) + \xi(x_2(z) - x_1(z)))^k (1 - x_1(z) - \xi(x_2(z) - x_1(z)))^{n-k}\right) d\xi,$$

одержуємо

$$B_n(F, x_2(\cdot)) - B_n(F, x_1(\cdot)) =$$

$$= -\int_0^1 \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial F\left(t, \frac{k}{n} H(\cdot - z)\right)}{\partial z} \frac{n!}{k!(n-k)!} \int_0^1 \Big\{k(x_1(z) + \xi(x_2(z) - x_1(z)))^{k-1} \times$$

$$\times (x_2(z) - x_1(z))(1 - x_1(z) - \xi(x_2(z) - x_1(z)))^{n-k} -$$

$$-(n-k)(x_1(z) + \xi(x_2(z) - x_1(z)))^k (1 - x_1(z) - \xi(x_2(z) - x_1(z)))^{n-k-1} \times$$

$$\times (x_2(z) - x_1(z))\Big\} d\xi\, dz =$$

$$= -\int_0^1 \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F\left(t, \frac{k}{n} H(\cdot - z)\right)}{\partial z} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \int_0^1 \Big\{(x_1(z) + \xi(x_2(z) - x_1(z)))^{k-1} \times$$

$$\times (1 - x_1(z) - \xi(x_2(z) - x_1(z)))^{n-k}(x_2(z) - x_1(z))\Big\} d\xi\, dz +$$

$$+ \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\partial F\left(t, \frac{k}{n} H(\cdot - z)\right)}{\partial z} \frac{n!}{k!(n-k-1)!} \int_0^1 \Big\{(x_1(z) + \xi(x_2(z) - x_1(z)))^k \times$$

$$\times (1 - x_1(z) - \xi(x_2(z) - x_1(z)))^{n-k-1}(x_2(z) - x_1(z))\Big\} d\xi\, dz =$$

$$= -\int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{\partial F\left(t, \frac{k+1}{n} H(\cdot - z)\right)}{\partial z} - \frac{\partial F\left(t, \frac{k}{n} H(\cdot - z)\right)}{\partial z} \right] \frac{n!}{k!(n-k-1)!} \times$$

$$\times \int_0^1 \{(x_1(z) + \xi(x_2(z) - x_1(z)))^k (1 - x_1(z) - \xi(x_2(z) - x_1(z)))^{n-k-1} d\xi (x_2(z) - x_1(z)) dz. \tag{6}$$

Оскільки

$$(1 - x_1(z) - \xi(x_2(z) - x_1(z))) \geq (1 - x_1(z) - (x_2(z) - x_1(z))) = 1 - x_2(z) \geq 0,$$

то на підставі монотонності функції $\dfrac{\partial F(t, y\, H(\cdot - z))}{\partial z}$ по y останній вираз є додатним.

Властивість доведено.

Для встановлення властивості 2 наведемо наступне означення.

Означення 1. *Функція* $\dfrac{\partial F(t, x(\cdot)\, H(\cdot - z))}{\partial z}$ *належить класу Ліпшиця* $\mathrm{Lip}_A \mu$, *якщо* $w\left(\dfrac{\partial F(t, x(\cdot)\, H(\cdot - z))}{\partial z}, r\right) \leq A r^{\mu}$ *для* $0 < r \leq 1$, *де* $0 < \mu \leq 1$, $A \geq 0$,

$$w\left(\frac{\partial F(t, x(\cdot)\, H(\cdot - z))}{\partial z}, r\right) =$$

$$= \max_{t \in [0,1]} \max_{\substack{\|x_1 - x_2\|_\infty \leq r \\ x_1(z),\, x_2(z) \in \Phi}} \left| \frac{\partial F(t, x_2(\cdot)\, H(\cdot - z))}{\partial z} - \frac{\partial F(t, x_1(\cdot)\, H(\cdot - z))}{\partial z} \right| \tag{7}$$

— *модуль неперервності функції* $\dfrac{\partial F(t, x(\cdot)\, H(\cdot - z))}{\partial z}$.

Властивість 2. *Якщо функція* $\dfrac{\partial F(t, x(\cdot)\, H(\cdot - z))}{\partial z} \in \mathrm{Lip}_A \mu$, *то для всіх* $n \geq 1$ $B_n(F, x(\cdot)) \in \mathrm{Lip}_{e^2 A} \mu$ *при* $r = 1/n$.

Доведення. З (6) маємо

$$|B_n(F, x_2(\cdot)) - B_n(F, x_1(\cdot))| \leq$$

$$\leq \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{\partial F\left(t, \frac{k+1}{n} H(\cdot - z)\right)}{\partial z} - \frac{\partial F\left(t, \frac{k}{n} H(\cdot - z)\right)}{\partial z} \right| \frac{n!}{k!(n-k-1)!} \times$$

$$\times \int_0^1 |x_1(z) + \xi(x_2(z) - x_1(z))|^k |1 - x_1(z) - \xi(x_2(z) - x_1(z))|^{n-k-1} d\xi |x_2(z) - x_1(z)| dz.$$

Звідси

$$w\left(B_n(F, x(\cdot)), \frac{1}{n}\right) = \max_{t \in [0,1]} \max_{\substack{\|x_2 - x_1\|_\infty \leq \frac{1}{n} \\ x_1(z),\, x_2(z) \in \Phi}} |B_n(F, x_2(\cdot)) - B_n(F, x_1(\cdot))| \leq$$

$$\leq \int_0^1 \max_{t, z \in [0,1]} \left| \frac{\partial F\left(t, \frac{k+1}{n} H(\cdot - z)\right)}{\partial z} - \frac{\partial F\left(t, \frac{k}{n} H(\cdot - z)\right)}{\partial z} \right| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{k!(n-k-1)!} \times$$

$$\times \max_{\|x_2-x_1\|_\infty \le \frac{1}{n}} \int_0^1 \left|x_1(z)+\xi(x_2(z)-x_1(z))\right|^k \left|1-x_1(z)-\xi(x_2(z)-x_1(z))\right|^{n-k-1} d\xi\, dz \le$$

$$\le \int_0^1 \max_{t,z\in[0,1]} \max_{\substack{\|x_2-x_1\|_\infty \le \frac{1}{n} \\ x_1(z),\, x_2(z)\in\Phi}} \left|\frac{\partial F(t, x_2(\cdot)\, H(\cdot - z))}{\partial z} - \frac{\partial F(t, x_1(\cdot)\, H(\cdot - z))}{\partial z}\right| \frac{1}{n} \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{k!(n-k-1)!} \max_{x_1(z)\in\Phi} \int_0^1 \left|x_1(z)+\frac{\xi}{n}\right|^k \left|1-x_1(z)+\frac{\xi}{n}\right|^{n-k-1} d\xi\, dz. \tag{8}$$

Оскільки похідна по ξ від $\left(x_1(z)+\frac{\xi}{n}\right)^k \left(1-x_1(z)+\frac{\xi}{n}\right)^{n-k-1}$ додатна, то можна записати

$$w\left(B_n(F, x(\cdot)), \frac{1}{n}\right) \le$$

$$\le \int_0^1 \max_{z,t\in[0,1]} \max_{\substack{\|x_2-x_1\|_\infty \le \frac{1}{n} \\ x_1(z),\, x_2(z)\in\Phi}} \left|\frac{\partial F(t, x_2(\cdot)\, H(\cdot - z))}{\partial z} - \frac{\partial F(t, x_1(\cdot)\, H(\cdot - z))}{\partial z}\right| \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} \max_{x_1(z)\in\Phi} \int_0^1 \left|x_1(z)+\frac{1}{n}\right|^k \left|1-x_1(z)+\frac{1}{n}\right|^{n-k-1} d\xi\, dz.$$

Використовуючи формулу бінома Ньютона, маємо

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} \max_{x_1(z)\in\Phi} \int_0^1 \left|x_1(z)+\frac{1}{n}\right|^k \left|1-x_1(z)+\frac{1}{n}\right|^{n-k-1} d\xi =$$

$$= \max_{x_1(z)\in\Phi} \int_0^1 \left|x_1(z)+\frac{1}{n}+1-x_1(z)+\frac{1}{n}\right|^{n-1} d\xi =$$

$$= \left|1+\frac{2}{n}\right|^{n-1} = \left|\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\right|^{\frac{2(n-1)}{n}} < e^2,$$

що попередню оцінку приводить до вигляду

$$w\left(B_n(F, x(\cdot)), \frac{1}{n}\right) \le e^2 \int_0^1 w\left(\frac{\partial F(t, x(\cdot)\, H(\cdot - z))}{\partial z}, \frac{1}{n}\right) dz \le e^2 A\left(\frac{1}{n}\right)^{\mu}.$$

Отже, ми довели, що кожен поліном типу Бернштейна (4) при $n \ge 1$ має такий самий порядок Ліпшиця і константу Ліпшиця $e^2 A$.

Властивість 3. *Якщо* $x(z)\in\Phi$ *і функція* $-\frac{\partial F(t, y\, H(\cdot - z))}{\partial z}$ *має властивість*

$$-\Delta^2 \frac{\partial F\left(t, \frac{j}{n+1} H(\cdot - z)\right)}{\partial z} = -\frac{\partial F\left(t, \frac{j+2}{n+1} H(\cdot - z)\right)}{\partial z} +$$

$$+ 2\frac{\partial F\left(t, \frac{j+1}{n+1} H(\cdot - z)\right)}{\partial z} - \frac{\partial F\left(t, \frac{j}{n+1} H(\cdot - z)\right)}{\partial z} \ge 0, \tag{9}$$

$$j = 0, 1, \ldots, n-1, \quad t,\ z\in[0,1],$$

то поліноми типу Бернштейна (4) *задовольняють нерівність*

$$B_n(F, x_1(\cdot)) - 2B_n\left(F, \frac{x_1(\cdot)+x_2(\cdot)}{2}\right) + B_n(F, x_2(\cdot)) \geq 0 \quad \forall t \in [0,1]. \tag{10}$$

Якщо ж функція $-\dfrac{\partial F(t, y H(\cdot - z))}{\partial z}$ *задовольняє нерівність*

$$\frac{\partial F\left(t, \frac{j}{n+1} H(\cdot - z)\right)}{\partial z} \geq$$

$$\geq \frac{n-j+1}{n+1} \frac{\partial F\left(t, \frac{j}{n} H(\cdot - z)\right)}{\partial z} + \frac{j}{n+1} \frac{\partial F\left(t, \frac{j-1}{n} H(\cdot - z)\right)}{\partial z}, \quad j = \overline{0, n}, \tag{11}$$

і, як функція трьох змінних, належить класу $C\left([0,1]^3\right)$, *тобто*

$$\frac{\partial F(t, y H(\cdot - z))}{\partial z} \in C\left([0,1]^3\right), \tag{12}$$

то виконується ланцюжок нерівностей

$$B_n(F, x(\cdot)) \geq B_{n+1}(F, x(\cdot)) \geq \ldots \geq \int_0^1 f(t, z, x(z))\, dz \equiv$$

$$\equiv F(t, x(\cdot)) \quad \forall x(z) \in \Phi, \quad \forall t \in [0,1].$$

Доведення. Обчислимо

$$B_n(F, x_1(\cdot)) - 2B_n\left(F, \frac{x_1(\cdot)+x_2(\cdot)}{2}\right) + B_n(F, x_2(\cdot)) =$$

$$= -\int_0^1 \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial F\left(t, \frac{k}{n} H(\cdot - z)\right)}{\partial z} \left(P_{n,k}(x_1(z)) + P_{n,k}(x_2(z)) - 2P_{n,k}\left(\frac{x_1(z)+x_2(z)}{2}\right)\right) dz, \tag{13}$$

де $P_{n,k}(x(z)) = C_n^k x^k(z)(1 - x(z))^{n-k}$.

Маємо

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial\eta}\left(\left(x_2(z) + (\xi+\eta)\left(\frac{x_1(z)-x_2(z)}{2}\right)\right)^k \times\right.$$

$$\left.\times \left(1 - x_2(z) - (\xi+\eta)\left(\frac{x_1(z)-x_2(z)}{2}\right)\right)^{n-k}\right) d\xi\, d\eta =$$

$$= x_1^k(z)(1 - x_1(z))^{n-k} + x_2^k(z)(1 - x_2(z))^{n-k} -$$

$$- 2\left(\frac{x_1(z)+x_2(z)}{2}\right)^k \left(1 - \frac{x_1(z)+x_2(z)}{2}\right)^{n-k}.$$

Тоді з рівності (13) одержуємо

$$B_n(F, x_1(\cdot)) - 2B_n\left(F, \frac{x_1(\cdot)+x_2(\cdot)}{2}\right) + B_n(F, x_2(\cdot)) =$$

$$= -\int_0^1 \sum_{k=2}^{n} \frac{\partial F\left(t, \frac{k}{n} H(\cdot - z)\right)}{\partial z} \frac{n!}{(k-2)!(n-k)!} \int_0^1\int_0^1 \left(x_2(z) + (\xi+\eta)\left(\frac{x_1(z)-x_2(z)}{2}\right)\right)^{k-2} \times$$

$$\times \left(1 - x_2(z) - (\xi+\eta)\left(\frac{x_1(z)-x_2(z)}{2}\right)\right)^{n-k} \left(\frac{x_1(z)-x_2(z)}{2}\right)^2 d\eta\, d\xi\, dz +$$

$$+ 2\int_0^1 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial F\left(t, \frac{k}{n} H(\cdot - z)\right)}{\partial z} \frac{n!}{(k-1)!(n-k-1)!} \times$$

$$\times \int_0^1\int_0^1 \left(x_2(z) + (\xi+\eta)\left(\frac{x_1(z)-x_2(z)}{2}\right)\right)^{k-1} \times$$

$$\times \left(1 - x_2(z) - (\xi+\eta)\left(\frac{x_1(z)-x_2(z)}{2}\right)\right)^{n-k-1} \left(\frac{x_1(z)-x_2(z)}{2}\right)^2 d\eta\, d\xi\, dz -$$

$$-\int_0^1 \sum_{k=0}^{n-2} \frac{\partial F\left(t, \frac{k}{n} H(\cdot - z)\right)}{\partial z} \frac{n!}{k!(n-k-2)!} \int_0^1\int_0^1 \left(x_2(z) + (\xi+\eta)\left(\frac{x_1(z)-x_2(z)}{2}\right)\right)^{k} \times$$

$$\times \left(1 - x_2(z) - (\xi+\eta)\left(\frac{x_1(z)-x_2(z)}{2}\right)\right)^{n-k-2} \left(\frac{x_1(z)-x_2(z)}{2}\right)^2 d\eta\, d\xi\, dz =$$

$$= -\int_0^1 \sum_{k=0}^{n-2} \left(\frac{\partial F\left(t, \frac{k+2}{n} H(\cdot - z)\right)}{\partial z} - 2\frac{\partial F\left(t, \frac{k+1}{n} H(\cdot - z)\right)}{\partial z} + \frac{\partial F\left(t, \frac{k}{n} H(\cdot - z)\right)}{\partial z} \right) \times$$

$$\times \frac{n!}{k!(n-k-2)!} \int_0^1\int_0^1 \left(x_2(z) + (\xi+\eta)\left(\frac{x_1(z)-x_2(z)}{2}\right)\right)^{k} \times$$

$$\times \left(1 - x_2(z) - (\xi+\eta)\left(\frac{x_1(z)-x_2(z)}{2}\right)\right)^{n-k-2} d\eta\, d\xi \left(\frac{x_1(z)-x_2(z)}{2}\right)^2 dz.$$

Оскільки вираз під подвійним інтегралом невід'ємний для будь-яких $x_1(z)$, $x_2(z) \in \Phi$, то, враховуючи (9), переконуємось у справедливості першої частини твердження.

Тепер розглянемо різницю

$$B_n(F, x(\cdot)) - B_{n+1}(F, x(\cdot)) =$$

$$= -\int_0^1 \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial F\left(t, \frac{k}{n} H(\cdot - z)\right)}{\partial z} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k(z)(1-x(z))^{n-k} dz +$$

$$+ \int_0^1 \sum_{k=0}^{n+1} \frac{\partial F\left(t, \frac{k}{n+1} H(\cdot - z)\right)}{\partial z} \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!} x^k(z)(1-x(z))^{n-k+1} dz. \qquad (14)$$

Враховуючи (11), з (14) маємо

$$B_n(F, x(\cdot)) - B_{n+1}(F, x(\cdot)) \geq$$

$$\geq -\int_0^1 \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial F\left(t, \frac{k}{n} H(\cdot - z)\right)}{\partial z} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k(z)(1-x(z))^{n-k} dz +$$

$$+ \int_0^1 \sum_{k=0}^{n+1} \frac{n-k+1}{n+1} \frac{\partial F\left(t, \frac{k}{n} H(\cdot - z)\right)}{\partial z} \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!} x^k(z)(1-x(z))^{n-k+1} dz +$$

$$+\int_0^1 \sum_{k=0}^{n+1} \frac{k}{n+1} \frac{\partial F\left(t, \frac{k-1}{n} H(\cdot - z)\right)}{\partial z} \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!} x^k(z)(1-x(z))^{n-k+1} dz =$$

$$= -\int_0^1 \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial F\left(t, \frac{k}{n} H(\cdot - z)\right)}{\partial z} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k(z)(1-x(z))^{n-k} dz +$$

$$+\int_0^1 \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial F\left(t, \frac{k}{n} H(\cdot - z)\right)}{\partial z} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k(z)(1-x(z))^{n-k+1} dz +$$

$$+\int_0^1 \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\partial F\left(t, \frac{k-1}{n} H(\cdot - z)\right)}{\partial z} \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} x^k(z)(1-x(z))^{n-k+1} dz =$$

$$= -\int_0^1 \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial F\left(t, \frac{k}{n} H(\cdot - z)\right)}{\partial z} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k(z)(1-x(z))^{n-k} dz +$$

$$+\int_0^1 \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial F\left(t, \frac{k}{n} H(\cdot - z)\right)}{\partial z} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k(z)(1-x(z))^{n-k+1} dz +$$

$$+\int_0^1 \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial F\left(t, \frac{k}{n} H(\cdot - z)\right)}{\partial z} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^{k+1}(z)(1-x(z))^{n-k} dz =$$

$$= -\int_0^1 \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial F\left(t, \frac{k}{n} H(\cdot - z)\right)}{\partial z} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k(z)(1-x(z))^{n-k} dz +$$

$$+\int_0^1 \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial F\left(t, \frac{k}{n} H(\cdot - z)\right)}{\partial z} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k(z)(1-x(z))^{n-k+1} dz +$$

$$+\int_0^1 \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial F\left(t, \frac{k}{n} H(\cdot - z)\right)}{\partial z} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^{k+1}(z)(1-x(z))^{n-k} dz = 0.$$

Таким чином, ми довели, що

$$B_n(F, x(\cdot)) \geq B_{n+1}(F, x(\cdot)) \geq \ldots \geq \int_0^1 f(t, z, x(z))\, dz \equiv F(t, x(\cdot)).$$

Остання нерівність випливає з теореми 1 з [8] при умові (12). Властивість доведено.

Зауваження **1.** Замість умов (9), (11) можна вимагати виконання більш жорсткої умови, а саме: функція $-\dfrac{\partial F(t, y\, H(\cdot - z))}{\partial z}$, як функція від y, повинна бути опуклою донизу, тобто для будь-якої січної графік цієї функції між сусідніми точками перетину лежить нижче графіка прямої, що сполучає ці точки.

Означення 2. *Функція* $\dfrac{\partial F(t, x(\cdot)\, H(\cdot - z))}{\partial z}$ *належить класу* H^w, *якщо* $w\left(\dfrac{\partial F(t, x(\cdot)\, H(\cdot - z))}{\partial z}, r\right) \le w(r)$ (*див.* (7)). *Поліном Бернштейна* $B_n(F, x(\cdot)) \in H^w$, *якщо* $w\left(B_n(F, x(\cdot)), \dfrac{1}{n}\right) \le w\left(\dfrac{1}{n}\right)$ (*див.* (8)).

Властивість 4. *Нехай* $w(t)$ *є модулем неперервності* $\dfrac{\partial F(t, x(\cdot)\, H(\cdot - z))}{\partial z} \in H^w$, *тоді для всіх* $n \ge 1$ $B_n(F, x(\cdot)) \in H^{2w}$; *якщо ж* $w(t)$ *є опуклою догори, то з того, що* $\dfrac{\partial F(t, x(\cdot)\, H(\cdot - z))}{\partial z} \in H^w$, *випливає, що* $B_n(F, x(\cdot)) \in H^w$ $\forall\, n \ge 1$.

Доведення. Нехай $x_1(z)$, $x_2(z)$ — довільні функції з Φ. Припустимо, що вони збігаються у точках $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$, тобто $x_1(\xi_i) = x_2(\xi_i)$, $i = \overline{1, m}$. Якщо $m = 0$, то таких точок не існує. Позначимо об'єднання інтервалів $[\xi_{i-1}, \xi_i]$, на яких $x_1(z) \le x_2(z)$, через S_-, а об'єднання інтервалів $[\xi_{i-1}, \xi_i]$, на яких $x_1(z) \ge x_2(z)$, через S_+. Зрозуміло, що $S_- \cup S_+ = [0, 1]$. Використаємо такі зображення поліномів Бернштейна (див., наприклад, [4]) для функції однієї змінної $f(x)$:

$$B_n(f; x_1) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{n-k} q_{n,k,l}(x_1, x_2)\, f\left(\frac{k}{n}\right),$$

$$B_n(f; x_2) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{n-k} q_{n,k,l}(x_1, x_2)\, f\left(\frac{k+l}{n}\right),$$

де $q_{n,k,l}(x_1, x_2) = \dfrac{n!}{k!\,l!\,(n-k-l)!}\, x_1^k (x_2 - x_1)^l (1 - x_2)^{n-k-l}$.

Тепер, використовуючи властивість IV з [7], записуємо

$$|B_n(F, x_2(\cdot)) - B_n(F, x_1(\cdot))| \le$$

$$\le \int_{S_-} \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n-k} q_{n,k,l}(x_1(z), x_2(z)) \left| \frac{\partial F\left(t, \frac{k+l}{n} H(\cdot - z)\right)}{\partial z} - \frac{\partial F\left(t, \frac{k}{n} H(\cdot - z)\right)}{\partial z} \right| dz +$$

$$+ \int_{S_+} \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n-k} q_{n,k,l}(x_2(z), x_1(z)) \left| \frac{\partial F\left(t, \frac{k+l}{n} H(\cdot - z)\right)}{\partial z} - \frac{\partial F\left(t, \frac{k}{n} H(\cdot - z)\right)}{\partial z} \right| dz \le$$

$$\le \int_{S_-}^{1} \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n-k} q_{n,k,l}(x_1(z), x_2(z))\, w\left(F_1(t, z, \cdot), \frac{l}{n}\right) dz +$$

$$+ \int_{S_+}^{1} \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n-k} q_{n,k,l}(x_2(z), x_1(z))\, w\left(F_1(t, z, \cdot), \frac{l}{n}\right) dz \le$$

$$\le \int_{S_-} \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n-k} q_{n,k,l}(x_1(z), x_2(z))\, w\left(\frac{l}{n}\right) dz + \int_{S_+} \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n-k} q_{n,k,l}(x_1(z), x_2(z))\, w\left(\frac{l}{n}\right) dz =$$

$$= \int_{S_-} B_n(w, x_2(z) - x_1(z))\, dz + \int_{S_+} B_n(w, x_1(z) - x_2(z))\, dz \le$$

$$\leq 2 \int_{S_-} w(x_2(z) - x_1(z))\,dz + 2 \int_{S_+} w(x_2(z) - x_1(z))\,dz =$$

$$= 2 \int_0^1 w(x_2(z) - x_1(z))\,dz.$$

З останньої нерівності одержуємо

$$w\left(B_n(F, x(\cdot)), \frac{1}{n}\right) =$$

$$= \max_{0 \leq t,\, z \leq 1} \max_{\substack{\|x_1 - x_2\|_\infty \leq \frac{1}{n} \\ x_1(z),\, x_2(z) \in \Phi}} \left| B_n(F(t, z, x_2(\cdot))) - B_n(F(t, z, x_1(\cdot))) \right| \leq 2w\left(\frac{1}{n}\right).$$

Якщо модуль неперервності $w(s)$ є опуклою функцією, то згідно з [7] маємо

$$w\left(B_n(F, x(\cdot)), \frac{1}{n}\right) \leq w\left(\frac{1}{n}\right),$$

і властивість 4 доведено.

1. *Davis P. J.* Interpolation and approximation. – Blaisdell, Waltham: MA, 1963. – 321 p.
2. *Lorentz G. G.* Bernstein polynomials // Math. Exposition. – 1953. – **8**. – 212 p.
3. *Bloom W. R., Elliot D.* The modulus of continuity of the remainder in the approximation of Lipschitz function // J. Approxim. Theory. – 1981. – **31**. – P. 59 – 66.
4. *Brown B. M., Elliot D., Paget D. F.* Lipschitz constants for the Bernstein polynomials of a Lipschitz continuous function // Ibid. – 1987. – **49**. – P. 196 – 199.
5. *Chang G. Z., Davis P. J.* The convexity of Bernstein polynomials over triangles // Ibid. – 1984. – **40**. – P. 11 – 28.
6. *Chang G. Z., Zhang J. Z.* Converse theorems of convexity of Bernstein polynomials over triangles // Ibid. – 1990. – **61**. – P. 265 – 278.
7. *Zhong Kai Li.* Bernstein polynomials and modulus of continuity // Ibid. – 2000. – **102**. – P. 171 – 174.
8. *Демків І. І.* Про наближення оператора Урисона операторними поліномами типу Бернштейна // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. математика та інформатика. – 2000. – Вип. 2. – С. 26 – 30.
9. *Макаров В. Л., Хлобыстов В. В.* Интерполяционная формула типа Ньютона для нелинейных функционалов // Докл. АН СССР. – 1989. – **307**. № 3. – С. 534 – 537.
10. *Янович Л. А.* Приближенное вычисление континуальных интегралов по гауссовым мерам. – Минск: Наука и техника, 1976. – 384 с.

Одержано 29.11.2002,
після доопрацювання — 24.06.2004