УДК 517.98

В. Л. Островський (Ін-т математики НАН України, Київ)

ЗОБРАЖЕННЯ АЛГЕБРИ, АСОЦІЙОВАНОЇ З ГРАФОМ ДИНКІНА $\tilde{E}_7$*

We describe the structure of pairs of self-adjoint operators A, B whose spectra lie in the set $\{\pm 1/2, \pm 3/2\}$ and such that $(A+B)^2 = I$. Such pairs of operators determine the representation of an $*$-algebra $A_{\tilde{E}_7}$ associated with the extended Dynkin graph $\tilde{E}_7$.

Описано структуру пар самоспряжених операторів A, B, спектр яких міститься в множині $\{\pm 1/2, \pm 3/2\}$ і для яких $(A+B)^2 = I$. Такі пари операторів задають зображення $*$-алгебри $A_{\tilde{E}_7}$, асоційованої з розширеним графом Динкіна $\tilde{E}_7$.

Вступ. Серію недавніх робіт присвячено вивченню алгебр, породжених твірними a_j, $j = 1, \ldots, n$, з фіксованим спектром (тобто з умовами $p_j(a_j) = 0$, $j = 1, \ldots, n$, де $p_j(\cdot)$ — фіксовані многочлени з простими дійсними коренями), сума яких дорівнює λe, $\lambda > 0$ [1–4], та $*$-зображенням таких алгебр [5–10]. Алгебрі такого типу ставиться у відповідність граф, що складається з n гілок, з'єднаних у спільній вершині, причому кількість вершин кожної гілки дорівнює степеню відповідного полінома. Будемо вважати, що найменший корінь кожного многочлена p_j є нулем. Ненульові корені многочленів розмістимо у вершинах відповідних гілок графа за зростанням починаючи з крайніх вершин, а спільній вершині поставимо у відповідність λ.

Алгебри, що відповідають графам Динкіна A_n, $n \geq 1$, D_n, $n \geq 4$, E_6, E_7, E_8, є скінченновимірними [7], зображення таких алгебр досліджувалися в [6, 8]. Алгебри, що відповідають розширеним графам Динкіна $\tilde{D}_4$, $\tilde{E}_6$, $\tilde{E}_7$, $\tilde{E}_8$, — нескінченновимірні, але мають поліноміальний ріст. Вивчати $*$-зображення таких алгебр можна за допомогою техніки функторів Кокстера, яку в [7] використано для побудови дискретної серії $*$-зображень алгебр $\mathcal{P}_{n,\alpha}$, що відповідають поліномам $p_j(x) = x^2 - x$, $j = 1, \ldots, n$. Функтори Кокстера переводять зображення алгебри, що відповідають одному набору $(p_j(\cdot), \lambda)$, в зображення деякої іншої алгебри, що відповідає набору $(p'(\cdot), \lambda')$. У випадку алгебр, що відповідають звичайним графам Динкіна, цей підхід дозволяє одержати всі незвідні зображення з одновимірних. Проте вже у випадку розширених графів Динкіна множина параметрів, що визначає алгебру, містить гіперплощину, „інваріантну" відносно дії функторів Кокстера. Визначення $*$-зображень алгебр, що відповідають точкам цієї гіперплощини, природно почати з вивчення зображень алгебр, що відповідають точкам гіперплощини, нерухомим відносно функторів Кокстера.

Четвірки проекторів, сума яких дорівнює $2I$ (зображення $*$-алгебри, асоційованої з діаграмою $\tilde{D}_4$ та нерухомою точкою гіперплощини), описано в [5], зображення $*$-алгебри, породженої трьома частковими відбиттями, сума яких дорівнює 0 (цій алгебрі відповідає діаграма $\tilde{E}_6$ та нерухома точка гіперплощини), — в [9].

У даній роботі вивчаються зображення $*$-алгебри $A_{\tilde{E}_7}$

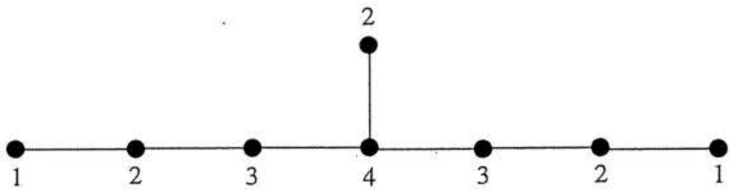
---

*Виконано за підтримки Державного фонду фундаментальних досліджень України (грант 01.07/071).

$$\mathbb{C}\langle a_1, a_2, a_3 \,|\, a_j = a_j^*, \ j = 1, 2, 3, \ a_1(a_1 - e)(a_1 - 2e)(a_1 - 3e) = 0,$$

$$a_2(a_2 - e)(a_2 - 2e)(a_2 - 3e) = 0, \ a_3(a_3 - 2e) = 0, \ a_1 + a_2 + a_3 = 4e\rangle, \qquad (1)$$

що еквівалентно вивченню структури пар самоспряжених операторів A, B спектр яких міститься в $\{\pm 1/2, \pm 3/2\}$ і для яких $(A+B)^2 = I$. Цій алгебрі відповідає розширена діаграма Динкіна $\tilde{E}_7$ з розміщенням чисел, що відповідають нерухомій точці гіперплощини:



Показано, що незвідні зображення цієї $*$-алгебри можуть мати розмірність 1, 2 або 4, причому існує 6 одновимірних, 3 двовимірних і двопараметрична сім'я чотиривимірних зображень. Наведено явні формули для зображень, які показують, що множина незвідних чотиривимірних зображень природно параметризується точками двовимірної сфери з виколотими трьома точками. У виколотих точках зображення розкладається на одно- та двовимірні незвідні зображення.

1. Співвідношення в алгебрі. Розглянемо $*$-алгебру $A_{\tilde{E}_7}$ з трьома самоспряженими твірними та співвідношеннями (1). Введемо нові твірні $a = a_1 - 3/2e$, $b = a_2 - 3/2e$. Тоді співвідношення в алгебрі наберуть вигляду

$$(a+b)^2 = e, \quad a^4 - \frac{5}{2}a^2 + \frac{9}{16}e = 0, \quad b^4 - \frac{5}{2}b^2 + \frac{9}{16}e = 0. \qquad (2)$$

Зауважимо, що при вивченні $*$-зображень алгебри, тобто пар самоспряжених операторів A, B, що задовольняють умови (2), останні дві умови еквівалентні тому, що спектр операторів A, B належить множині $\{\pm 1/2, \pm 3/2\}$.

Одержимо співвідношення, які будуть використовуватись у подальшому. З першого співвідношення в (2) маємо $b^2 = I - a^2 - \{a, b\}$. Підставляючи цей вираз у третє співвідношення і використовуючи $a^4 = \frac{5}{2}a^2 - \frac{9}{16}e$, одержуємо

$$\{a, b\}^2 + \{a^2, \{a, b\}\} + \frac{1}{2}\{a, b\} + 3a^2 - \frac{3}{2}e = 0. \qquad (3)$$

Із використанням (3) співвідношення в алгебрі можна переписати в еквівалентній формі

$$(a+b)^2 = e, \quad \left\{\{a, a+b\} - e, \{a, b\} + \frac{3}{2}e\right\} = 0, \quad a^4 - \frac{5}{2}a^2 + \frac{9}{16}e = 0.$$

Лема 1. *Елементи* $(\{a, b\} + 3/2e)^2$, $(\{a, a+b\} - e)^2$ *та* $(\{b, a+b\} - e)^2$ *комутують з* a *та* b, *тобто належать центру алгебри* $A_{\tilde{E}_7}$.

Доведення. Оскільки

$$[\{a^2, \{a, b\}\}, a] = [b, a^4], \quad [\{a, b\}, a] = [b, a^2],$$

використовуючи (3), одержуємо

$$\left(\{a, b\} + \frac{3}{2}e\right)^2 = (a+b)^2 + 3\{a, b\} + \frac{9}{4}e =$$

$$= -\{a^2, \{a, b\}\} - \frac{1}{2}\{a, b\} - 3a^2 + \frac{3}{2}e + 3\{a, b\} + \frac{9}{4}e =$$

$$= -\{a^2, \{a, b\}\} + \frac{5}{2}\{a, b\} - 3a^2 + \frac{15}{4}e.$$

Тоді з $a^4 - \frac{5}{2}a^2 = \frac{9}{16}e$ маємо

$$\left[\left(\{a, b\} + \frac{3}{2}e\right)^2, a\right] = -[b, a^4] + \frac{5}{2}[b, a^2] = \left[a^4 - \frac{5}{2}a^2, b\right] = 0.$$

Оскільки співвідношення в алгебрі та елемент $\left(\{a, b\} + \frac{3}{2}e\right)^2$ симетричні відносно перестановки a та b, цей елемент комутує також із b.

Розглянемо елемент

$$(\{a, a+b\} - e)^2 = (2a^2 + \{a, b\} - e)^2 =$$

$$= 4a^4 + \{a, b\}^2 + 2\{a^2, \{a, b\}\} - 2\{a, b\} - 4a^2 + e.$$

Із рівностей (3) та $a^4 = \frac{5}{2}a^2 - \frac{9}{16}e$ маємо

$$(\{a, a+b\} - e)^2 = \{a^2, \{a, b\}\} - \frac{5}{2}\{a, b\} + 3a^2 + \frac{1}{4}e =$$

$$= -\left(\{a, b\} + \frac{3}{2}e\right)^2 + \frac{1}{2}e.$$

Завершуючи доведення, зауважимо, що міркуваннями, аналогічними наведеним, отримуємо $(\{b, a+b\} - e)^2 = (\{a, a+b\} - e)^2$.

Зауваження **1.** Наведена лема фактично описує один елемент центру (вказані елементи відрізняються на константу). У роботі [4] показано, що центр алгебри $A_{\tilde{E}_7}$ породжений трьома елементами, пов'язаними одним поліноміальним співвідношенням.

2. Вироджені зображення. Перейдемо до вивчення зображень $*$-алгебри (1) — пар самоспряжених операторів A, B, що задовольняють співвідношення (2). Наша мета — описати, з точністю до унітарної еквівалентності, всі незвідні зображення алгебри (1). Із наведеного нижче опису зображень видно, що незвідні зображення існують лише в розмірностях 1, 2 та 4. Вивчимо спочатку одно- та двовимірні незвідні зображення.

Теорема 1. *Нижче перераховано усі одно- та двовимірні зображення алгебри* $A_{\tilde{E}_7}$:

шість одновимірних:

$$A = B = \pm\frac{1}{2}; \quad A = \pm\frac{1}{2}, \quad B = \mp\frac{3}{2}; \quad A = \pm\frac{3}{2}, \quad B = \mp\frac{1}{2}$$

та три двовимірних:

$$A = \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -7 & 4\sqrt{2} \\ 4\sqrt{2} & 7 \end{pmatrix},$$

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 2 \end{pmatrix},$$

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -2 \end{pmatrix}.$$

Кожне з таких зображень однозначно визначається спектрами операторів A, B.

Доведення. Оскільки при незвідному зображенні елементи центру переходять у скалярні оператори, за доведеною лемою маємо $X^2 = \lambda^2 I$, $Y^2 = \mu^2 I$, λ, $\mu \geq 0$, де $X = \{A, A+B\} - I$, $Y = 2\{A, B\} + 3I$. Оскільки $\{X, Y\} = 0$, за теоремою про класифікацію пар антикомутуючих самоспряжених операторів робимо висновок, що або $XY = YX = 0$, або має місце розклад

$$X = \begin{pmatrix} \lambda I & 0 \\ 0 & -\lambda I \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & \mu I \\ \mu I & 0 \end{pmatrix},$$

де $\lambda, \mu > 0$.

Розглянемо спочатку випадок, коли $XY = YX = 0$.

Оскільки квадрат кожного з співмножників належить центру, для незвідного зображення або $X = 0$, або $Y = 0$.

Нехай $X = 0$. Оскільки $X = 2A^2 + \{A, B\} - I = A^2 - B^2$, для операторів A, B маємо співвідношення $A^2 - B^2 = 0$. Згідно з [5] такі незвідні пари операторів або одновимірні $A = a$, $B = b$, $a^2 = b^2$, або двовимірні,

$$A = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = a\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}, \quad a > 0, \quad \varphi \in (0, \pi).$$

В одновимірному випадку умови на спектр операторів A, B та умова $(A + B)^2 = I$ дають два одновимірних зображення $A = B = \pm\frac{1}{2}$.

У двовимірному випадку $a = \frac{1}{2}$ або $a = \frac{3}{2}$ і одержуємо незвідне зображення

$$A = \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -7 & 4\sqrt{2} \\ 4\sqrt{2} & 7 \end{pmatrix}.$$

Спектр операторів A та B однаковий, $\sigma(A) = \sigma(B) = \{\pm 3/2\}$.

Нехай тепер $Y = 0$, тобто $\{A, B\} = -\frac{3}{2}$. Оскільки $\{A, B\} = I - A^2 - B^2$, маємо співвідношення $A^2 + B^2 = \frac{5}{2}I$. Знову згідно з [5] для цього випадку можуть існувати одновимірні пари $A = a$, $B = b$, для яких $ab = -\frac{3}{4}$, та двовимірні

$$A = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = b\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}, \quad a, b > 0, \quad \varphi \in (0, \pi),$$

причому $a^2+b^2=\frac{5}{2}$. Враховуючи умови на спектр операторів, одержуємо дві одновимірні пари

$$A=\pm\frac{1}{2},\quad B=\mp\frac{3}{2};\qquad A=\pm\frac{3}{2},\quad B=\mp\frac{1}{2}.$$

Двовимірні зображення не виникають (сукупність усіх умов приводить до $\cos\varphi=\pm 1$, що суперечить незвідності).

Розглянемо тепер двовимірні пари, для яких

$$X=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & -\lambda\end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix}0 & \mu\\ \mu & 0\end{pmatrix},\quad \lambda,\mu>0,$$

де $X=\{A, A+B\}-I=A^2-B^2$, $Y=2\{A,B\}+3I = 5I-A^2-B^2$. Тоді $A^2=$ $=\frac{1}{4}(5I+2X-Y)$, $B^2=\frac{1}{4}(5I-2X-Y)$ і

$$A^2=\frac{1}{4}U_1\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 9\end{pmatrix}U_1^*,\quad B^2=\frac{1}{4}U_2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 9\end{pmatrix}U_2^*,$$

де

$$U_1=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{2-\lambda} & -\sqrt{2+\lambda}\\ \sqrt{2+\lambda} & \sqrt{2-\lambda}\end{pmatrix},\quad U_2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{2+\lambda} & -\sqrt{2-\lambda}\\ \sqrt{2-\lambda} & \sqrt{2+\lambda}\end{pmatrix},\quad \lambda\in(0,2).$$

Звідси робимо висновок, що

$$A=\frac{1}{2}U_1\begin{pmatrix}a_1 & 0\\ 0 & 3a_2\end{pmatrix}U_1^*,\quad B=\frac{1}{2}U_2\begin{pmatrix}b_1 & 0\\ 0 & 3b_2\end{pmatrix}U_2^*,\quad a_1^2=a_2^2=b_1^2=b_2^2=1.$$

Враховуючи умови $(A+B)^2=I$, $\lambda\in(0,2)$, одержуємо $b_1=-a_1$, $b_2=-a_2$, $\lambda=$ $=1$, $a_2=-a_1$ і остаточно маємо дві незвідні двовимірні пари

$$A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2 & \sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 0\end{pmatrix},\quad B=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -\sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & 2\end{pmatrix},$$

$$A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & -\sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & 0\end{pmatrix},\quad B=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & \sqrt{3}\\ \sqrt{3} & -2\end{pmatrix}.$$

Для першої пари $\sigma(A)=\{-3/2,1/2\}$, $\sigma(B)=\{3/2,-1/2\}$, для другої пари $\sigma(A)=\{3/2,-1/2\}$, $\sigma(B)=\{-3/2,1/2\}$. Щоб одержати формули, наведені в формулюванні теореми, слід перейти до унітарно еквівалентних пар $U_1^*AU_1$, $U_1^*BU_1$.

Теорему 1 доведено.

3. Загальний випадок.

Теорема 2. *Наступні пари операторів утворюють зображення алгебри* $A_{\tilde{E}_7}$:

$$A=\frac{1}{8\varphi}\begin{pmatrix}-16-\beta & 2\gamma & \sqrt{4\varphi^4-\beta^2} & 0\\ 2\gamma & 16+\beta & 0 & -\sqrt{4\varphi^4-\beta^2}\\ \sqrt{4\varphi^4-\beta^2} & 0 & -16+\beta & 2\gamma\\ 0 & -\sqrt{4\varphi^4-\beta^2} & 2\gamma & 16-\beta\end{pmatrix},$$

$$B = \frac{1}{8\varphi}\begin{pmatrix} 16-\beta & 2\gamma\omega & -\sqrt{4\varphi^4-\beta^2} & 0 \\ 2\gamma\overline{\omega} & -16+\beta & 0 & \sqrt{4\varphi^4-\beta^2} \\ -\sqrt{4\varphi^4-\beta^2} & 0 & 16+\beta & 2\gamma\omega \\ 0 & \sqrt{4\varphi^4-\beta^2} & 2\gamma\overline{\omega} & -16-\beta \end{pmatrix},$$

де $\gamma^2 = -\varphi^4 + 20\varphi^2 - 64$, $\beta^2 = 16\varphi^2 - \gamma^2(1+\omega)(1+\overline{\omega})$, $|\omega| = 1$, $\varphi \in [2, 4]$.

При $\varphi = 2$ *зображення розкладається у пряму суму чотирьох одновимірних зображень* $A = \pm 1/2$, $B = \mp 3/2$ *та* $A = \pm 3/2$, $B = \mp 1/2$.

При $\varphi = 2\sqrt{2}$, $\omega = 1$ *зображення розкладається у пряму суму двох одновимірних зображень* $A = B = \pm 1/2$ *та одного двовимірного зображення*

$$A = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 1/2 \\ 1/2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1/2 \\ 1/2 & -\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

для якого $\sigma(A) = \sigma(B) = \{-3/2, 3/2\}$.

При $\varphi = 4$ *зображення розкладається у пряму суму двох незвідних двовимірних зображень*

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -3/2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\sigma(A) = \{1/2, -3/2\}, \; \sigma(B) = \{-1/2, 3/2\}$$

та

$$A = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\sigma(A) = \{-1/2, 3/2\}, \; \sigma(B) = \{1/2, -3/2\}.$$

Для всіх інших значень параметрів (φ, ω), $\varphi \in (2, 4)$, $|\omega| = 1$ *зображення незвідне, причому* $\sigma(A) = \sigma(B) = \{\pm 1/2, \pm 3/2\}$.

Довільне незвідне зображення алгебри $A_{\tilde{E}_7}$ *унітарно еквівалентне одному з наведених вище.*

Доведення. Аналогічно випадку двовимірних зображень маємо

$$A^2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} (5+2\lambda)I & -\mu I \\ -\mu I & (5-2\lambda)I \end{pmatrix}, \quad B^2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} (5-2\lambda)I & -\mu I \\ -\mu I & (5+2\lambda)I \end{pmatrix}$$

та на підставі співвідношення $\{A, B\} = I - A^2 - B^2$

$$\{A, B\} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3I & \mu I \\ \mu I & -3I \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Умова на спектр оператора A виконується тоді і лише тоді, коли

$$\mu^2 + 4\lambda^2 = 16.$$

Зокрема, з останнього співвідношення випливає умова $\lambda \in [0, 2]$, причому незвідність зберігається лише для значень λ всередині відрізка.

Лема 2. *Оператори* A^2, B^2 *мають вигляд*

$$A^2 = \frac{1}{4}U_1\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 9I \end{pmatrix}U_1^*, \quad B^2 = \frac{1}{4}U_2\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 9I \end{pmatrix}U_2^*,$$

де

$$U_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2-\lambda}\,I & -\sqrt{2+\lambda}\,I \\ \sqrt{2+\lambda}\,I & \sqrt{2-\lambda}\,I \end{pmatrix}, \quad U_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2+\lambda}\,I & -\sqrt{2-\lambda}\,I \\ \sqrt{2-\lambda}\,I & \sqrt{2+\lambda}\,I \end{pmatrix}.$$

Доведення зводиться до безпосереднього обчислення власного базису операторів A^2, B^2.

Наша подальша мета — знайти квадратні корені з операторів A^2, B^2 таким чином, щоб виконувалась умова (4). За наведеною лемою маємо

$$A = \frac{1}{2}U_1\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 3A_2 \end{pmatrix}U_1^*, \quad B = \frac{1}{2}U_2\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 3B_2 \end{pmatrix}U_2^*, \tag{5}$$

де $A_1^2 = A_2^2 = B_1^2 = B_2^2 = I$ та A_i, B_i задовольняють додаткові співвідношення, що необхідні і достатні для виконання (4). Знайдемо ці співвідношення. Підставляючи (5) в (4) та враховуючи $\mu = 2\sqrt{4-\lambda^2}$, для незвідних зображень одержуємо співвідношення

$$-96I = 2\gamma_1^2\gamma_2^2\{A_1, B_1\} + 3\left(\gamma_1^4 - \gamma_1^2\gamma_2^2\right)\{A_1, B_2\} +$$
$$+ 3\left(\gamma_2^4 - \gamma_1^2\gamma_2^2\right)\{A_2, B_1\} + 18\gamma_1^2\gamma_2^2\{A_2, B_2\},$$
$$64I = 2\left(\gamma_1^2A_1B_1 + \gamma_2^2B_1A_1\right) + 3\left(\gamma_2^2 - \gamma_1^2\right)[A_1, B_2] +$$
$$+ 3\left(\gamma_2^2 - \gamma_1^2\right)[A_2, B_1] - 18\left(\gamma_2^2A_2B_2 + \gamma_1^2B_2A_2\right),$$
$$64I = 2\left(\gamma_2^2A_1B_1 + \gamma_1^2B_1A_1\right) + 3\left(\gamma_1^2 - \gamma_2^2\right)[A_1, B_2] +$$
$$+ 3\left(\gamma_1^2 - \gamma_2^2\right)[A_2, B_1] - 18\left(\gamma_1^2A_2B_2 + \gamma_2^2B_2A_2\right),$$
$$-96I = 2\gamma_1^2\gamma_2^2\{A_1, B_1\} + 3\left(\gamma_2^4 - \gamma_1^2\gamma_2^2\right)\{A_1, B_2\} +$$
$$+ 3\left(\gamma_1^4 - \gamma_1^2\gamma_2^2\right)\{A_2, B_1\} + 18\gamma_1^2\gamma_2^2\{A_2, B_2\},$$

де $\gamma_1 = \sqrt{2-\lambda}$, $\gamma_2 = \sqrt{2+\lambda}$. Перепишемо ці співвідношення в еквівалентній формі

$$\{A_1, B_2\} - \{A_2, B_1\} = 0,$$
$$\{A_1, B_1\} - 9\{A_2, B_2\} = 16I,$$
$$[A_1, B_1] - 3[A_1, B_2] - 3[A_2, B_1] + 9[A_2, B_2] = 0,$$
$$(4-\lambda^2)\{A_1, B_1\} + 3\lambda^2\{A_1, B_2\} = 8(4-\lambda^2)I.$$

Розглянемо оператори

$$C_1 = A_1 - 3A_2, \quad C_2 = A_1 + 3A_2,$$
$$C_3 = B_1 - 3B_2, \quad C_4 = B_2 + 3B_2.$$

Співвідношення між A_1, A_2, B_1, B_2 набирають вигляду

$$[C_1, C_3] = 0, \quad \{C_1, C_4\} = 16I, \quad \{C_2, C_3\} = 16I,$$

$$\{C_2, C_4\} = \left(\frac{\lambda^2}{2} - 1\right)\{C_2, C_3\} - 24I.$$

Умови $A_j^2 = B_j^2 = I$ в термінах операторів C_j такі:

$$C_1^2 + C_2^2 = 20I, \quad \{C_1, C_2\} = -16I,$$

$$C_3^2 + C_4^2 = 20I, \quad \{C_3, C_4\} = -16I.$$

Безпосередня перевірка показує, що C_1^2 та C_2^2 комутують з усіма C_j, і оскільки $C_1^2 + C_2^2 = 20I$, $C_3^2 + C_4^2 = 20I$, оператори C_2^2 та C_4^2 теж комутують з усіма C_j, $j = 1, \ldots, 4$. Крім цього,

$$[C_1 C_3, C_2] = 16(C_1 + C_3), \quad [C_3 C_1, C_2] = -16(C_1 + C_3)$$

і, оскільки $C_1 C_3 = C_3 C_1$, приходимо до висновку, що $C_3 = -C_1$. Таким чином, оператори C_j, $j = 1, \ldots, 4$, визначають зображення алгебри $A_{\tilde{E}_7}$ тоді і тільки тоді, коли для них виконуються умови

$$\{C_1, C_2\} = -16I, \quad \{C_1, C_4\} = 16I, \tag{6}$$

$$C_3 = -C_1, \quad C_1^2 + C_2^2 = 20I, \quad C_4^2 = C_2^2, \tag{7}$$

$$\{C_2, C_4\} = -24I + (2 - \lambda^2)C_1^2. \tag{8}$$

Незвідним наборам C_j відповідають незвідні зображення алгебри $A_{\tilde{E}_7}$ і навпаки.

Опишемо незвідні набори самоспряжених операторів, що задовольняють (6) – (8). У незвідному випадку маємо $C_1^2 = \varphi^2 I$, де $\varphi^2 \neq 0$, оскільки $C_1 \neq 0$. Тоді співвідношення (6), (8) можна переписати у вигляді

$$\{C_1, C_2 + 8\varphi^{-2}C_1\} = 0, \quad \{C_1, C_4 - 8\varphi^{-2}C_1\} = 0, \tag{9}$$

$$\{C_2 + 8\varphi^{-2}C_1,\ C_4 - 8\varphi^{-2}C_1\} = 2\varphi^{-2}((1 - \lambda^2/2)\varphi^4 - 12\varphi^2 + 64)I. \tag{10}$$

Розглянемо окремо кожен з наступних можливих випадків:

1) $[C_1, C_2] = 0, \quad [C_1, C_4] = 0,$

2) $[C_1, C_2] = 0, \quad [C_1, C_4] \neq 0,$

3) $[C_1, C_2] \neq 0, \quad [C_1, C_4] = 0,$

4) $[C_1, C_2] \neq 0, \quad [C_1, C_4] \neq 0.$

У випадку 1 незвідні набори C_j одновимірні, $C_1 = c$, $c^2 = \varphi^2$. Тоді $C_2^2 = -64\varphi^{-2}$, $C_4 = 8\varphi^{-2}C_1$, і з співвідношення $C_2^2 = 20 - \varphi^2 I$ маємо або $\varphi_1^2 = 4$, або $\varphi^2 = 16$. У випадку $\varphi^2 = 4$ з рівності (10) маємо $\lambda = 2$, що суперечить умові $\lambda \in (0, 2)$. У випадку $\varphi^2 = 16$ з умови (10) випливає $\lambda = 1$, $C_1 = \pm 4$, $C_2 = \mp 2$, $C_3 = \mp 4$, $C_4 = \pm 2$, або

$$A_1 = \pm 1;\ A_2 = \mp 1,\ B_1 = \mp 1,\ B_2 = \pm 1,$$

і в результаті одержуємо двовимірні незвідні пари, спектр яких має вигляд $\sigma(A) = \left\{\pm\frac{1}{2}, \mp\frac{3}{2}\right\}$, $\sigma(B) = \left\{\mp\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}\right\}$.

У випадку 2 маємо $C_2 = -8\varphi^{-2}C_1$ і за структурною теоремою для пари антикомутуючих самоспряжених операторів

$$C_1 = \begin{pmatrix} \varphi I & 0 \\ 0 & -\varphi I \end{pmatrix}, \quad C_4 - 8\varphi^{-2}C_1 = \begin{pmatrix} 0 & \psi I \\ \psi I & 0 \end{pmatrix}, \quad \psi > 0.$$

Із співвідношення $C_4^2 = C_2^2$ робимо висновок, що $\psi = 0$, що неможливо. Аналогічно, у випадку 3 зображень немає.

Нехай жоден з операторів C_2 та C_4 не комутує з C_1. Тоді за теоремою про структуру пар антикомутуючих самоспряжених операторів ці оператори мають таку структуру:

$$C_1 = \begin{pmatrix} \varphi I & 0 \\ 0 & -\varphi I \end{pmatrix}, \quad C_2 + 8\varphi^{-2}C_1 = \begin{pmatrix} 0 & \psi I \\ \psi I & 0 \end{pmatrix}, \quad C_4 - 8\varphi^{-2}C_1 = \begin{pmatrix} 0 & T \\ T^* & 0 \end{pmatrix}$$

для деяких $\psi > 0$ та оператора T. Із співвідношення $C_2^2 = 20I - C_1^2$ маємо $\psi^2 = -\varphi^{-2}(\varphi^4 - 20\varphi^2 + 64)$, а умова $C_4^2 = C_2^2$ еквівалентна тому, що $T = \psi W$, де W — унітарний оператор. Отже, оператори C_2 та C_4 мають вигляд

$$C_2 = \begin{pmatrix} -8\varphi^{-1}I & \psi I \\ \psi I & 8\varphi^{-1}I \end{pmatrix}, \quad C_4 = \begin{pmatrix} 8\varphi^{-1}I & \psi W \\ \psi W^* & -8\varphi^{-1}I \end{pmatrix}, \tag{11}$$

$$\psi^2 = -\frac{1}{\varphi^2}(\varphi^4 - 20\varphi^2 + 64). \tag{12}$$

Остання умова також накладає обмеження $4 < \varphi^2 < 16$. Оскільки довільний інваріантний підпростір оператора W породжує інваріантний підпростір операторів C_1, C_2, C_4, для незвідного зображення W є оператором множення на комплексну константу ω, для якої $|\omega| = 1$ і співвідношення (8) набирає вигляду

$$\psi^2(\omega + \overline{\omega}) = (-24 + \varphi^2(2 - \lambda^2) + 128/\varphi^2). \tag{13}$$

Таким чином, незвідні зображення наборів C_1, C_2, C_4 у невироджених випадках є двовимірними і породжують сім'ю чотиривимірних зображень алгебри $A_{\tilde{E}_7}$.

Оскільки $-2 \le \omega + \overline{\omega} \le 2$, крім умови $2 < \varphi^2 < 4$ одержуємо наступні обмеження на φ:

$$\varphi \le \frac{16}{2 - \lambda}, \quad \varphi \le \frac{16}{\lambda^2}, \quad \varphi \ge \frac{16}{2 + \lambda}, \quad \lambda \in (0, 2). \tag{14}$$

Для пар (φ, λ), що задовольняють (14), вибираючи ω, дійсна частина якого визначається умовами (13) та (12), одержуємо незвідний набір

$$C_1 = \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & -\varphi \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} -8\varphi^{-1} & \psi \\ \psi & 8\varphi^{-1} \end{pmatrix},$$

$$C_3 = \begin{pmatrix} -\varphi & 0 \\ 0 & \varphi \end{pmatrix}, \quad C_4 = \begin{pmatrix} 8\varphi^{-1} & \psi\omega \\ \psi\overline{\omega} & -8\varphi^{-1} \end{pmatrix},$$

який визначає оператори A_1, A_2, B_1, B_2 та за формулою (5) дає необхідні формули для операторів A, B.

Решту тверджень теореми легко одержати з наведених формул.

Автор висловлює щиру вдячність Ю. С. Самойленку, М. О. Власенко та А. С. Мелліту за надзвичайно корисні обговорення предмету статті та зауваження щодо її змісту.

1. *Crawley-Boevey W., Holland M. P.* Noncommutative deformations of Kleinian singularities // Duke Math. J. – 1998. – **92**, № 3. – P. 605 – 635.
2. *Гельфанд И. М., Пономарев В. А.* Модельные алгебры и представления графов // Функцион. анализ и его прил. – 1979. – **13**, вып. 3. – С 1 – 12.
3. *Рабанович В. И., Самойленко Ю. С., Стрелец А. В.* О тождествах в алгебрах $Q_{n,\lambda}$, порожденных идемпотентами // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 10. – С. 1380 – 1390.
4. *Власенко М. А., Меллит А. С., Самойленко Ю. С.* О алгебрах, порожденных линейно связанными генераторами с заданным спектром // Функцион. анализ и его прил. – 2004. – **38**, вып. 4. – С. 72 – 74.
5. *Ostrovskyi V., Samoilenko Yu.* Introduction to the theory of representations of finitely presented *-algebras. I. Representations by bounded operators // Rev. Math. and Math. Phys. – 1999. – **11**, № 1. – 262 p.
6. *Кругляк С. А., Попович С. В., Самойленко Ю. С.* Представления *-алгебр, связанных с графами Дынкина, и проблема Хорна // Учен. зап. Таврич. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика и кибернетика. – 2003. – **16**, № 2. – С. 132 – 139.
7. *Кругляк С. А., Рабанович В. И., Самойленко Ю. С.* О суммах проекторов // Функцион. анализ и его прил. – 2002. – **36**, вып. 3. – С. 20 – 25.
8. *Кругляк С. А., Ройтер А. В.* Локально-скалярные представления графов в категории гильбертовых пространств // Локально-скалярные представления и разделяющие функции. – Киев, 2003. – С. 3 – 36. – (Препринт / НАН Украины. Ин-т математики, 2003.8).
9. *Меллит А. С.* Когда сумма трех частичных отражений равна нулю // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 9. – С. 1277 – 1283.
10. *Меллит А. С., Рабанович В. И., Самойленко Ю. С.* Когда сумма частичных отражений равна скалярному оператору // Функцион. анализ и его прил. – 2004. – **38**, вып. 2. – С. 91 – 94.

Одержано 19.04.2004