УДК 517.944

И. В. Скрыпник (Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк),
А. В. Журавская (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

РАВНОМЕРНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ЗАДАЧ В ПЕРФОРИРОВАННЫХ ОБЛАСТЯХ

We investigate the behavior of remainder term of the asymptotic expansion for solutions of the quasilinear parabolic Cauchy – Dirichlet problem in a sequence of domains with fine-granulated boundary. By using a modification of the asymptotic expansion and new pointwise estimates of a solution of model problem, we prove the uniform convergence of the remainder term to zero.

Досліджено поведінку залишкового члена асимптотичного розкладу для розв'язків квазілінійної параболічної задачі Коші – Діріхле в послідовності областей з дрібнозернистою межею. На підставі модифікації побудови асимптотичного розкладу та нових поточкових оцінок розв'язку модельної задачі доведено рівномірну збіжність залишкового члена до нуля.

1. Пусть Ω — ограниченное открытое множество в n-мерном евклидовом пространстве R^n, $n \le 2$. Предположим, что при $s = 1, 2, \ldots$ определены непересекающиеся замкнутые множества $F_i^{(s)}$, $i = 1, \ldots, I(s)$, содержащиеся в Ω. В цилиндрической области

$$Q_T^{(s)} = \Omega_s \times (0, T), \qquad \Omega_s = \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{I(s)} F_i^{(s)}$$

рассматривается нелинейная параболическая задача

$$\frac{\partial u_s}{\partial t} - \sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dx_j} a_j\left(x, t, u_s, \frac{\partial u_s}{\partial x}\right) + a_0\left(x, t, u_s, \frac{\partial u_s}{\partial x}\right) = 0, \qquad (x, t) \in Q_T^{(s)}, \tag{1}$$

$$u_s(x, t) = f(x, t), \qquad (x, t) \in \partial\Omega_s \times (0, T), \tag{2}$$

$$u_s(x, 0) = 0, \qquad x \in \Omega_s. \tag{3}$$

Предположение о нулевом начальном значении $u_s(x, t)$ не ограничивает общности рассмотрения, так как к условию (3) вычитанием можно свести решения вспомогательной задачи в $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$, если $u_s(x, 0) \neq 0$.

Усреднение квазилинейных параболических задач в областях с мелкозернистыми границами изучалось в работах [1, 2]. В этих работах выяснены условия, при которых последовательность $u_s(x, t)$ решений задач (1) – (3) сходится при $s \to \infty$ к предельной функции, и построена усредненная граничная задача. Эти построения связаны с изучением асимптотического разложения последовательности $u_s(x, t)$. При этом была доказана сильная сходимость остаточного члена асимптотического разложения в энергетической норме.

В данной работе продолжается изучение поведения остаточного члена $w_s(x, t)$ асимптотического разложения и доказывается его равномерная сходимость к нулю при $s \to \infty$. Аналогичный результат для линейной параболической задачи доказан в работе [3], для эллиптической задачи в областях с мелкозернистой границей — в [4].

2. Будем предполагать, что функции $a_j(x, t, u, \xi)$, $j = 0, 1, \ldots, n$, определены при $x \in \Omega$, $t \in [0, T]$, $u \in \mathbb{R}^1$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ и удовлетворяют следующим условиям:

A_1) $a_j(x, t, u, \xi)$ непрерывны по u, p при почти всех x, t, измеримы по x, t при всех u, ξ; $a_j(x, t, 0, 0) = 0$ при $(x, t) \in Q_T$, $j = 1, \ldots, n$;

A_2) существуют положительные постоянные ν_1, ν_2 такие, что при всех x, t, v, ξ, η выполнены неравенства

$$\sum_{j=1}^{n}\left[a_j(x,t,u,\xi)-a_j(x,t,u,\eta)\right](\xi_j-\eta_j) \geq \nu_1|\xi-\eta|^2,$$

$$\left|a_j(x,t,u,\xi)-a_j(x,t,u,\eta)\right| \leq \nu_2(|u-v|+|\xi-\eta|), \quad j=1,\ldots,n, \tag{4}$$

$$|a_0(x,t,u,\xi)| \leq \nu_2(|u|+|\xi|)+b(x,t)$$

с отрицательной функцией $b(x,t)$;

A_3) обобщенные производные функций $a_j(x,t,0,\xi)$, $j=1,\ldots,n$, удовлетворяют оценке

$$\left|\frac{\partial a_j(x,t,0,\xi)}{\partial x_k}\right| + \left|\frac{\partial a_j(x,t,0,\xi)}{\partial \xi_k}\right| \leq \nu_2, \quad k=1,\ldots,n.$$

Относительно функций $f(x,t)$, $b(x,t)$ предполагаем выполненным условие

A_4) $f(x,t)$ определена при $x\in\Omega$, $t\in R^1$, равна нулю при $t<0$ и удовлетворяет неравенству

$$\|F\|_{p,q,Q_T} + \|f\|_{C^{\alpha,\alpha/2}(Q_T)} = \nu_2, \quad \frac{1}{p}+\frac{n}{2q}\leq 1, \quad q\geq 1, \tag{5}$$

где

$$F(x,t) = 1+\left|\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\right|+b(x,t),$$

$\|\cdot\|_{p,q,Q_T}$ — норма в $L_p(0,T;L_q(\Omega))$, $\alpha\in(0,1)$.

Предположим, что условие регулярности границы $\partial\Omega$ области Ω имеет следующий вид:

d) существуют положительные числа R_0, κ такие, что для произвольной точки $x_0\in\partial\Omega$ выполнено неравенство

$$\operatorname{mes}\{B(x_0,R)\setminus\Omega\} \geq \kappa R^n$$

при $0<R\leq R_0$, где $B(x_0,R)$ — шар радиуса R с центром в точке x_0.

Под решением задачи (1) – (3) будем понимать функцию

$$u(x,t)\in C([0,T],L_2(\Omega_s))\cap L_2(0,T;W_2^1(\Omega_s))$$

такую, что $u(x,t)-f(x,t)\in L_2(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega_s))$, выполнено условие (3) и для произвольных функции $\psi(x,t)\in L_2(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega_s))$ и $h\in(0,T)$ справедливо интегральное тождество

$$\iint\limits_{Q_{T-h}^{(s)}}\left\{\frac{\partial[u_s]_h}{\partial t}\psi+\sum_{j=1}^{n}\left[a_j\left(x,t,u_s,\frac{\partial u_s}{\partial x}\right)\right]_h\frac{\partial\psi}{\partial x_j}+\left[a_0\left(x,t,u_s,\frac{\partial u_s}{\partial x}\right)\right]_h\psi\right\}dx\,dt = 0. \tag{6}$$

Здесь использовано обозначение

$$[g(x,t)]_h = \frac{1}{h}\int_t^{t+h} g(x,\tau)\,d\tau \tag{7}$$

для стекловского усреднения по t произвольной функции $g(x,t)$.

Известно [5], что условия A_1), A_2), A_4) обеспечивают разрешимость задачи (1), (3) и справедливость оценок

$$\max\left\{\left|u_s(x,t)\right|:(x,t)\in Q_T^{(s)}\right\}\le M_0,\qquad \left\|\frac{\partial u_s}{\partial x}\right\|_{L_2(Q_T^{(s)})}\le M_1 \tag{8}$$

с постоянными M_0, M_1, зависящими только от n, ν_1, ν_2, T и области Ω.

В дальнейшем n, ν_1, ν_2, T, α, R_0, κ называем известными параметрами.

Продолжаем $u_s(x,t)$ на Q_T, полагая ее равной $f(x,t)$ вне $Q_T^{(s)}$. Используя вторую оценку в (8) и переходя, если нужно, к подпоследовательности, можем предполагать слабую сходимость $u_s(x,t)$ к $u_0(x,t)\in L_2(0,T;W_2^1(\Omega))$.

Сформулируем условия на $F_i^{(s)}$, обеспечивающие нахождение $u_0(x,t)$ как решения усредненной задачи. Обозначим через $d_i^{(s)}$ нижнюю грань радиусов шаров, содержащих $F_i^{(s)}$, и определим точку $x_i^{(s)}$ так, чтобы $F_i^{(s)}\subset$ $\subset \overline{B(x_i^{(s)},d_i^{(s)})}$. Через $r_i^{(s)}$ обозначим расстояние от $B(x_i^{(s)},d_i^{(s)})$ до $\bigcup\limits_{j\ne i}B(x_i^{(s)},d_i^{(s)})\cup\partial\Omega$. Предполагаем, что выполнены условия:

B$_1$) $\lim\limits_{s\to\infty}r^{(s)}=0$, где $r^{(s)}=\max\{r_i^{(s)}: i=1,\dots,I(s)\}$;

B$_2$) существует положительное число ν_3 такое, что

$$d_i^{(s)}\le\nu_3[r_i^{(s)}]^{n/(n-2)}\qquad\text{при}\quad i=1,\dots,I(s),\quad s=1,2,\dots .$$

Для формулировки еще одного условия введем функции $v_i^{(s)}(x,t)$, играющие основную роль при построении асимптотического поведения последовательности $\{u_s(x,t)\}$. Определим $\tilde v_i^{(s)}(x,t,q(t))$ как решение задачи

$$\frac{\partial v}{\partial t}-\sum_{j=1}^{n}\frac{d}{dx_j}a_j\left(x,t,0,\frac{\partial v}{\partial x}\right)=0,\qquad (x,t)\in\{\Omega\setminus F_i^{(s)}\}\times(0,T), \tag{9}$$

$$v(x,t)=q(t)\omega\left(\frac{\left|x-x_i^{(s)}\right|}{2d_i^{(s)}}\right),\qquad (x,t)\in\partial(\Omega\setminus F_i^{(s)})\times(0,T), \tag{10}$$

$$v(x,0)=0,\qquad x\in\Omega\setminus F_i^{(s)}, \tag{11}$$

где $q(t)$ — кусочно-гладкая функция на отрезке $[0,T]$, $\omega: R^1\to R^1$ — фиксированная бесконечно дифференцируемая функция, равная единице на $(-\infty, 1/2]$, нулю на $[1,\infty)$ и такая, что $0\le\omega(z)\le 1$ при $z\in R^1$.

Предполагаем выполненным условие

c) существует непрерывная функция $c(x,t,q)$, определенная при $(x,t)\in$ $\in Q_T$, $q\in\mathbb{R}^1$ такая, что для произвольных $t_1,t_2\in(0,T)$, произвольного шара $B\subset\Omega$ выполнено равенство

$$\lim_{s\to\infty}\sum_{i\in I_s(B)}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{q}\int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega}a_j\left(x,t,0,\frac{\partial\tilde v_i^{(s)}(x,t,q)}{\partial x}\right)\frac{\partial\tilde v_i^{(s)}(x,t,q)}{\partial x_j}dx\,dt=$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\int_{B}c(x,t,q)\,dx\,dt \tag{12}$$

и предел в (12) является равномерным по q. Здесь $I_s(B)=\{i: 1\le i\le I(s),$ $x_i^{(s)}\in B\}$, $\tilde v_i^{(s)}(x,t,q)$ — решение задачи (9), (10) при $q(t)=q$ для $0<t<T$.

Известно [2], что при выполнении условий A$_1$), A$_2$), A$_4$), B$_1$), B$_2$), c) функция $u_0(x,t)$ принадлежит $C(0,T;L_2(\Omega))$ и является решением задачи

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} a_j\left(x, t, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x}\right) + a_0\left(x, t, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x}\right) -$$
$$- c(x, t, f - u_0) = 0, \quad (x, t) \in Q_T, \tag{13}$$
$$u_0(x, t) = f(x, t), \quad (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \tag{14}$$
$$u_0(x, 0) = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T). \tag{15}$$

Отметим, что условия $A_1) - A_4)$, d), а также легко проверяемый линейный рост функции $c(x, t, q)$ относительно $|q|$ влекут за собой (см. [5]) гельдеровость функции $u_0(x, t)$, так что с некоторым $\beta > 0$ выполнено неравенство

$$\left|u_0(x', t') - u_0(x'', t'')\right| \le H\left(\left|x' - x''\right|^{\beta} + \left|t' - t''\right|^{\beta/2}\right)$$

при (x', t'), $(x'', t'') \in \overline{Q}_T$.

Перейдем к построению асимптотического разложения и определим срезывающие функции по переменным x, t. Введем функции $\varphi_i^{(s)}(x)$, $\overline{\varphi}_i^{(s)}(x)$, $\tilde{\varphi}_i^{(s)}(x)$ равенствами

$$\varphi_i^{(s)}(x) = \omega\left(\frac{\left|x - x_i^{(s)}\right|}{2\rho_i^{(s)}}\right), \quad \overline{\varphi}_i^{(s)}(x) = \omega\left(\frac{\left|x - x_i^{(s)}\right|}{\rho_i^{(s)}}\right),$$
$$\tilde{\varphi}_i^{(s)}(x) = \omega\left(\frac{\left|x - x_i^{(s)}\right|}{4\rho_i^{(s)}}\right), \quad \rho_i^{(s)} = \left[r_i^{(s)}\right]^{n/(n-2+\beta)}, \tag{16}$$

где функция ω та же, что и в (10).

В силу условий $B_1)$, $B_2)$ при достаточно больших s выполняется неравенство

$$4 d_i^{(s)} \le \rho_i^{(s)} \le \frac{r_i^{(s)}}{4}, \quad i = 1, \ldots, I(s).$$

Поэтому, не ограничивая общности, можем считать выполненным последнее неравенство при всех s.

Для данной пары (i, s) таких, что $1 \le i \le I(s)$, $s \ge 1$, разделим отрезок $[0, T]$ на $K(i, s)$ отрезков одинаковой длины точками $t_{il}^{(s)}$, $l = 0, \ldots, K(i, s)$, так, что

$$0 = t_{i0}^{(s)} < t_{i1}^{(s)} < \ldots < t_{i,K(i,s)}^{(s)} = T, \quad \left[\rho_i^{(s)}\right]^2/2 \le T\left[K(i,s)\right]^{-1} \le \left[\rho_i^{(s)}\right]^2.$$

Определим на $[0, T)$ функцию $q_i^{(s)}(t)$, линейную на промежутке $\left[t_{il}^{(s)}, t_{i,l+1}^{(s)}\right]$ и равную $f_{il}^{(s)} - u_{il}^{(s)}$ в точках $t_{il}^{(s)}$, $l = 0, 1, \ldots, K(i, s)$, где

$$f_{il}^{(s)} = \frac{1}{\operatorname{mes} Q_{il}^{(s)}} \iint\limits_{Q_{il}^{(s)}} f(x, t)\, dx\, dt, \quad u_{il}^{(s)} = \frac{1}{\operatorname{mes} Q_{il}^{(s)}} \iint\limits_{Q_{il}^{(s)}} u_0(x, t)\, dx\, dt$$

— средние значения функций $f(x, t)$, $u_0(x, t)$ относительно цилиндра $Q_{il}^{(s)} = B\left(x_i^{(s)}, 2\rho_i^{(s)}\right) \times \left(t_{il}^{(s)}, t_{i,l+1}^{(s)}\right)$.

Обозначим

$$v_i^{(s)}(x, t) = \tilde{v}_i^{(s)}\left(x, t, q_i^{(s)}(t)\right), \tag{17}$$

где $\tilde{v}_i^{(s)}$ — решение задачи (9) – (11), и определим асимптотическое разложение последовательности $u_s(x, t)$:

$$u_s(x,t) = u_0(x,t) + r_s(x,t) + w_s(x,t). \tag{18}$$

Здесь $r_s(x,t)$ — корректирующая функция:

$$r_s(x,t) = \sum_{i=1}^{I(s)} \left[v_i^{(s)}(x,t) + f(x,t) - u_0(x,t) - q_i^{(s)}(t) \right] \varphi_i^{(s)}(x), \tag{19}$$

$w_s(x,t)$ — остаточный член асимптотического разложения (18).

Асимптотическое разложение вида (18) изучалось в работе [1]. Отличия в построении корректирующих функций в (19) и [1] не принципиальны при изучении сходимости последовательности $\{w_s(x,t)\}$ в энергетической норме. Поэтому с помощью рассуждений из работы [1] доказывается следующая теорема.

Теорема 1. *Предположим, что выполнены условия* A_1), A_2), A_4), B_1), B_2). *Тогда последовательность* $w_s(x,t)$ *ограничена в* $L_\infty(Q_T)$ *и сходится к нулю в пространстве* $L_2(0,T;W_2^1(\Omega))$.

Основным результатом статьи является следующая теорема.

Теорема 2. *Предположим, что выполнены условия* A_1) – A_4), B_1), B_2), c), d). *Тогда*

$$\lim_{s\to\infty} \left\{ \operatorname{vrai\,max} \left[|w_s(x,t)| : (x,t) \in Q_T \right] \right\} = 0, \tag{20}$$

где $w_s(x,t)$ — *остаточный член асимптотического разложения* (18).

Сходимость (20) доказывается методом Мозера в п. 4. Основные априорные оценки, необходимые для доказательства теоремы 2, установлены в п. 3.

3. Анализ поведения остаточного члена $w_s(x,t)$ разложения (18) основан на поточечных оценках решения задачи (9), (10). Сформулируем их применительно к функции $v_i^{(s)}(x,t)$. Будем предполагать, что $n > 2$. Случай $n = 2$ рассматривается аналогично и приводит только к изменению вида поточечной оценки (21).

Лемма 1. *Предположим, что выполнены условия* A_1), A_2). *Тогда существует постоянная* K_1, *зависящая лишь от* n, ν_1, ν_2, T, *такая, что при* $s = 1, 2, \ldots$, $i = 1, \ldots, I(s)$, $2d_i^{(s)} \le \left| x - x_i^{(s)} \right| \le r_i^{(s)}/4$, $t \in [0,T]$ *выполнена оценка*

$$\left| v_i^{(s)}(x,t) \right| + \left| x - x_i^{(s)} \right| \left| \frac{\partial v_i^{(s)}(x,t)}{\partial x} \right| \le K_1 \left(\frac{d_i^{(s)}}{\left| x - x_i^{(s)} \right|} \right)^{n-2}. \tag{21}$$

В случае решения задачи (9) – (11) с постоянной функцией $q(t)$ оценка вида (21) доказана в [4], доказательство оценки для $\left| \dfrac{\partial \tilde{v}_i^{(s)}(x,t,q)}{\partial x} \right|$ содержится в [6]. Оценка (21) для $\left| v_i^{(s)}(x,t) \right|$ следует затем из оценки для $\left| v_i^{(s)}(x,t,q) \right|$ и теоремы сравнения. Доказательство оценки (21) для $\left| \dfrac{\partial v_i^{(s)}(x,t)}{\partial x} \right|$ аналогично доказательству таковой в работе [6].

Определим бесконечно дифференцируемую функцию $\eta : [0,T] \to [0,1]$, равную единице при $t \in [0, T/2]$ и нулю при $t = T$.

Лемма 2. *Предположим, что выполнены условия* A_1) – A_4). *Тогда существует постоянная* K_2, *зависящая лишь от известных параметров, такая, что при произвольном* $k \ge 0$ *справедлива оценка*

$$\frac{1}{k+2} \sup_{0<\tau<T} \int_\Omega |w_s(x,\tau)|^{k+2} \eta^{k+2}(\tau)\,dx + (k+1) \int_{Q_T} |w_s(x,t)|^k \left| \frac{\partial w_s}{\partial x} \right|^2 \eta^{k+2}(t)\,dx\,dt \le$$

$$\leq K_2(k+1)\iint\limits_{Q_T} |w_s(x,t)|^k \left\{ F(x,t) + \eta(t)\left[\left|\frac{\partial u_0}{\partial x}\right|^2 + \right.\right.$$

$$+ \sum_{i=1}^{I(s)} \left(\left|\frac{\partial q_i^{(s)}(t)}{\partial t}\right| \varphi_i^{(s)}(x) + \left|\tilde{\varphi}_i^{(s)}(x) - \overline{\varphi}_i^{(s)}(x)\right|^2 \left|\frac{\partial v_i^{(s)}}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial v_i^{(s)}}{\partial x}\right| \left|\frac{\partial \varphi_i^{(s)}}{\partial x}\right| + \right.$$

$$\left.\left.\left. + \left(\left|v_i^{(s)}\right| + \left|u_0 - f - q_i^{(s)}(t)\right|^2\right) \left|\frac{\partial \varphi_i^{(s)}}{\partial x}\right|^2 \right)\right]\right\} \eta^{k+1}(t)\,dx\,dt, \qquad (22)$$

где $\tilde{\varphi}_i^{(s)}(x)$, $\overline{\varphi}_i^{(s)}(x)$ *— функции, определенные равенствами* (16), $F(x,t)$ *— функция, определенная в условии* A_4).

Доказательство. Непосредственно из равенства (18) следует включение $[w_s(x,t)]_h \in L_2(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))$, что дает возможность выбрать в качестве пробной функции в (6) функцию

$$\psi_{1,h}(x,t) = \left|[w_s(x,t)]_h\right|^k [w_s(x,t)]_h\, \eta^{k+2}(t)\chi_\tau(t), \qquad k \geq 0. \qquad (23)$$

Здесь $\chi_\tau(t)$ — характеристическая функция интервала $(0,\tau)$, $\tau \leq T$.

В результате выбранной подстановки и использования равенства (18) получаем

$$\iint\limits_{Q_\tau} \left\{ \frac{\partial [w_s]_h}{\partial t}\psi_{1,h}(x,t) + \sum_{j=1}^{n}\left[a_j\left(x,t,u_s,\frac{\partial u_s}{\partial x}\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - a_j\left(x,t,u_s,\frac{\partial(u_s - w_s)}{\partial x}\right)\right]_h \frac{\partial \psi_{1,h}}{\partial x_j}\right\} dx\,dt = R_1^{(s)}(h) + R_2^{(s)}(h) + R_3^{(s)}(h), \qquad (24)$$

где

$$R_1^{(s)}(h) = -\iint\limits_{Q_\tau} \left\{ \frac{\partial [u_0]_h}{\partial t}\psi_{1,h} + \sum_{j=1}^{n}\left[a_j\left(x,t,u_0,\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)\right]_h \frac{\partial \psi_{1,h}}{\partial x_j} + \right.$$

$$\left. + \left[a_0\left(x,t,u_0,\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)\right]_h \psi_{1,h}\right\} dx\,dt,$$

$$R_2^{(s)}(h) = -\iint\limits_{Q_\tau} \left\{ \frac{\partial [r_s]_h}{\partial t}\psi_{1,h} + \sum_{j=1}^{n}\left[a_j\left(x,t,u_s,\frac{\partial(u_0 + r_s)}{\partial x}\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - a_j\left(x,t,u_0,\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)\right]_h \frac{\partial \psi_{1,h}}{\partial x_j}\right\} dx\,dt,$$

$$R_3^{(s)}(h) = -\iint\limits_{Q_\tau} \left[a_0\left(x,t,u_s,\frac{\partial u_s}{\partial x}\right) - a_0\left(x,t,u_0,\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)\right]_h \psi_{1,h}(x,t)\,dx\,dt.$$

Преобразуем выражения для $R_i^{(s)}(h)$. Используя интегральное тождество для $u_0(x,t)$ как решения задачи (13) – (15), получаем

$$R_1^{(s)}(h) = -\iint\limits_{Q_\tau} [c(x,t,\ f - u_0)]_h\, \psi_{1,h}(x,t)\,dx\,dt. \qquad (25)$$

Аналогично, с использованием интегральных тождеств для $v_i^{(s)}(x,t)$ и $u_0(x,t)$, преобразуем $R_2^{(s)}(h)$:

$$R_2^{(s)}(h) = R_4^{(s)}(h) + R_5^{(s)}(h) + R_6^{(s)}(h), \tag{26}$$

где

$$R_4^{(s)}(h) = \sum_{i=1}^{I(s)} \sum_{j=1}^{n} \iint_{Q_\tau} \left\{ \left[a_j\left(x, t, 0, \frac{\partial v_i^{(s)}}{\partial x}\right) \right]_h \frac{\partial}{\partial x_j}(\varphi_i^{(s)} \psi_{1,h}) - \right.$$

$$\left. - \left[a_j\left(x, t, 0, \frac{\partial (v_i^{(s)} \varphi_i^{(s)})}{\partial x}\right) \right]_h \frac{\partial \psi_{1,h}}{\partial x_j} \right\} dx\, dt,$$

$$R_5^{(s)}(h) = \sum_{j=1}^{n} \iint_{Q_\tau} \left[a_j\left(x, t, 0, \frac{\partial r_s'}{\partial x}\right) - a_j\left(x, t, u_s, \frac{\partial (u_0 + r_s)}{\partial x}\right) + \right.$$

$$\left. + a_j\left(x, t, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x}\right) \right]_h \frac{\partial \psi_{1,h}}{\partial x_j} dx\, dt,$$

$$R_6^{(s)}(h) = - \sum_{i=1}^{I(s)} \iint_{Q_\tau} \left\{ \sum_{j=1}^{n} \left[a_j\left(x, t, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x}\right) \right]_h \frac{\partial}{\partial x_j}(\varphi_i^{(s)} \psi_{1,h}) + \right.$$

$$\left. + \left(\left[a_0\left(x, t, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x}\right) - c(x, t, f - u_0) \right]_h + \frac{\partial [f]_h}{\partial t} - \frac{d[q_i^{(s)}(t)]_h}{dt} \right) \varphi_i^{(s)} \psi_{1,h} \right\} dx\, dt.$$

Здесь $r_s'(x, t) = \sum_{i=1}^{I(s)} v_i^{(s)}(x, t) \varphi_i^{(s)}(x)$.

Интегрируя по частям, получаем следующее равенство:

$$\iint_{Q_\tau} \frac{\partial [w_s]_h}{\partial t} \psi_{1,h}(x, t)\, dx\, dt = \frac{1}{k+2} \int_\Omega \left| [w_s(x, t)]_h \right|^{k+2} \eta^{k+2}(t)\, dx \Bigg|_{t=0}^{t=\tau} -$$

$$- \iint_{Q_\tau} \left| [w_s(x, t)]_h \right|^{k+2} \eta^{k+1}(t) \frac{d\eta}{dt} dx\, dt. \tag{27}$$

Подстановка значений $R_1^{(s)}(h)$, $R_2^{(s)}(h)$ из (25), (26) в (24) и использование равенства (27) дает возможность перейти к пределу в (24) при $h \to 0$. В итоге получаем

$$\frac{1}{k+2} \int_\Omega \left| w_s(x, \tau) \right|^{k+2} \eta^{k+2}(\tau)\, dx + \iint_{Q_\tau} \left\{ - \left| w_s(x, t) \right|^{k+2} \eta^{k+1}(t) \frac{\partial \eta(t)}{\partial t} + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{n} \left[a_j\left(x, t, u_s, \frac{\partial u_s}{\partial x}\right) - a_j\left(x, t, u_s, \frac{\partial (u_s - w_s)}{\partial x}\right) \right] \frac{\partial \psi_1}{\partial x_j} \right\} dx\, dt +$$

$$+ R_1^{(s)} + R_2^{(s)} + R_3^{(s)}, \tag{28}$$

где

$$R_i^{(s)} = \lim_{h \to 0} R_i^{(s)}(h), \qquad \psi_1(x, t) = \left| w_s(x, t) \right|^k w_s(x, t) \eta^{k+2} \chi_\tau(t).$$

Перейдем к оценке слагаемых, содержащихся в (28). Непосредственно из условия параболичности уравнения (1) имеем

$$\sum_{j=1}^{n} \left[a_j\left(x, t, u_s, \frac{\partial u_s}{\partial x}\right) - a_j\left(x, t, u_s, \frac{\partial (u_s - w_s)}{\partial x}\right) \right] \frac{\partial \psi_1}{\partial x_j} \geq$$

$$\geq C_1(k+1) \left| w_s(x, t) \right|^k \left| \frac{\partial w_s}{\partial x} \right|^2 \eta^{k+2}(t) \chi_\tau(t). \tag{29}$$

Здесь и далее через C_i обозначены постоянные, зависящие лишь от известных параметров.

Оценки остальных слагаемых получаем, используя неравенства (4) и Юнга. Приведем типичную оценку для $R_4^{(s)}$:

$$\left| a_j\left(x, t, 0, \frac{\partial v_i^{(s)}}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}(\varphi_i^{(s)}\psi_1) - a_j\left(x, t, 0, \frac{\partial (v_i^{(s)}\varphi_i^{(s)})}{\partial x}\right)\frac{\partial \psi_1}{\partial x_j}\right| =$$

$$= \left|\left[a_j\left(x, t, 0, \frac{\partial v_i^{(s)}}{\partial x}\right) - a_j\left(x, t, 0, \frac{\partial (v_i^{(s)}\varphi_i^{(s)})}{\partial x}\right)\right]\frac{\partial}{\partial x_j}(\varphi_i^{(s)}\psi_1) + \right.$$

$$\left. + \; a_j\left(x, t, 0, \frac{\partial (v_i^{(s)}\varphi_i^{(s)})}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}[(1-\varphi_i^{(s)})\psi_1]\right| \le (k+1)|w_s(x,t)|^k \eta^{k+2}\chi_\tau(t)\left\{\gamma\left|\frac{\partial w_s}{\partial x}\right|^2 + \right.$$

$$\left. + \; C_2\gamma^{-1}\left[(1-\overline{\varphi}_i^{(s)})\tilde{\varphi}_i^{(s)}\left|\frac{\partial v_i^{(s)}}{\partial x}\right|^2 + \left|v_i^{(s)}\right|\left|\frac{\partial \varphi_i^{(s)}}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial v_i^{(s)}}{\partial x}\right|\left|\frac{\partial \varphi_i^{(s)}}{\partial x}\right|\right]\right\}, \qquad (30)$$

где γ — произвольное число из интервала $(0, 1)$.

Теперь неравенство (22) следует из (28) – (30) и аналогичных оценок для $R_1^{(s)}$, $R_3^{(s)}$, $R_5^{(s)}$, $R_6^{(s)}$ при соответствующем выборе γ. Тем самым лемма 2 доказана.

Перейдем к оценке интегралов, содержащихся в правой части неравенства (22).

Лемма 3. *Предположим, что выполнены условия теоремы 2. Тогда существуют постоянные K_3, λ, зависящие лишь от известных параметров, такие, что при произвольных $k \ge 6$, $\varepsilon \in (0, 1)$ справедлива оценка*

$$\iint\limits_{Q_T}\left|\frac{\partial u_0}{\partial x}\right|^2 |w_s(x,t)|^k \eta^{k+2}(t)\,dx\,dt \le \frac{K_3}{k^2}\iint\limits_{Q_T}\left\{\left(\frac{k}{\varepsilon}\right)^\lambda F(x,t)[\eta(t)]^{-1} + \left|\frac{\partial q^{(s)}(x,t)}{\partial t}\right| + \right.$$

$$\left. + \left|\frac{\partial u_0}{\partial x}\right|^2[\varphi^{(s)}(x)]^2 + \left|\frac{\partial w_s}{\partial x}\right|^2\right\}|w_s|^{k-6}\eta^{k+2}(t)\,dx\,dt +$$

$$+ \frac{K_3}{k^2}\sum_{i=1}^{I(s)}\iint\limits_{Q_T}\left\{\varepsilon\left[\left|\frac{\partial v_i^{(s)}}{\partial x}\right| + \left|v_i^{(s)}\right|\left|\frac{\partial \varphi_i^{(s)}}{\partial x}\right| + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left|f - u_0 - q_i^{(s)}(t)\right|\left|\frac{\partial \varphi_i^{(s)}}{\partial x}\right|\right]^2|w_s|^{k+2} + \left|\frac{\partial v_i^{(s)}}{\partial x}\right|\left|\frac{\partial \varphi_i^{(s)}}{\partial x}\right||w_s|^{k-1}\right\}\eta^{k+2}(t)\,dx\,dt, \qquad (31)$$

где $F(x,t)$ — функция, определенная в условии A_4),

$$q^{(s)}(x,t) = \sum_{i=1}^{I(s)} q_i^{(s)}(t)\varphi_i^{(s)}(x), \qquad \varphi^{(s)}(x) = \sum_{i=1}^{I(s)}\varphi_i^{(s)}(x).$$

Доказательство. Пусть (x', t') — произвольная точка цилиндра $\overline{Q}_T$. Обозначим при $\delta > 0$

$$u_0' = u_0(x', t'), \qquad \omega_\delta(x,t) = \omega\left(\frac{|x-x'|^2 + |t-t'|}{\delta^2}\right),$$

где ω — та же функция, что и в (10). Подставим в интегральное тождество, соответствующее задаче (13) – (15), пробную функцию

$$\psi_{2,h}(x,t) = [u_0(x,t)-u_0']_h \left|[w_s(x,t)]_h\right|^k \omega_\delta^2(x,t)\eta^{k+2}(t).$$

Преобразуем слагаемое, возникающее после подстановки функции $\psi_{2,h}(x,t)$ и содержащее производную по t. Используя интегральные тождества для $u_s(x, t)$, $u_0(x,t)$, $v_i^{(s)}(x,t)$ как решений соответствующих начально-граничных задач, имеем

$$\iint\limits_{Q_T} \frac{\partial [u_0]_h}{\partial t}\psi_{2,h}(x,t)\,dx\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}[u_0(x,t)-u_0']_h^2\left|[w_s(x,t)]_h\right|^k\omega_\delta^2(x,t)\eta^{k+2}(t)\,dx\Bigg|_{t=0}^{t=T} + \sum_{m=7}^{10} R_m^{(s)}(h), \tag{32}$$

где

$$R_7^{(s)}(h) = \frac{k}{2}\sum_{j=1}^{n}\iint\limits_{Q_T}\left[a_j\left(x,t,u_s,\frac{\partial u_s}{\partial x}\right) - a_j\left(x,t,u_0,\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)\right]_h \frac{\partial\psi_{3,h}(x,t)}{\partial x_j}\,dx\,dt,$$

$$R_8^{(s)}(h) = \frac{k}{2}\iint\limits_{Q_T}\left[a_0\left(x,t,u_s,\frac{\partial u_s}{\partial x}\right) - a_0\left(x,t,u_0,\frac{\partial u_0}{\partial x}\right) + c(x,t,f-u_0)\right]_h\psi_{3,h}(x,t)\,dx\,dt,$$

$$R_9^{(s)}(h) = -\frac{k}{2}\sum_{j=1}^{I(s)}\iint\limits_{Q_T}\left\{\sum_{j=1}^{n}\left[a_j\left(x,t,0,\frac{\partial v_i^{(s)}}{\partial x}\right)\right]_h\frac{\partial[\psi_{3,h}\varphi_i^{(s)}]}{\partial x_j} -\right.$$

$$- \frac{\partial}{\partial t}\left[f(x,t)-q_i^{(s)}(t)\right]\psi_{3,h}(x,t)\varphi_i^{(s)}(x) - \sum_{j=1}^{n}\left[a_j\left(x,t,u_0,\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)\right]_h\frac{\partial}{\partial x_j}[\psi_{3,h}\varphi_i^{(s)}] -$$

$$\left. - \left[a_0\left(x,t,u_0,\frac{\partial u_0}{\partial x}\right) - c(x,t,f-u_0)\right]_h\psi_{3,h}(x,t)\varphi_i^{(s)}(x)\right\}dx\,dt,$$

$$R_{10}^{(s)}(h) = -\frac{1}{2}\iint\limits_{Q_T}[u_0(x,t)-u_0']_h^2\left|[w_s(x,t)]_h\right|^k\frac{\partial}{\partial t}\left[\omega_\delta^2(x,t)\eta^{k+2}(t)\right]dx\,dt.$$

Здесь

$$\psi_{3,h}(x,t) = [u_0(x,t)-u_0']_h^2\left|[w_s(x,t)]_h\right|^{k-2}[w_s(x,t)]_h\,\omega_\delta^2(x,t)\eta^{k+2}(t).$$

Представление (32) позволяет перейти к пределу при $h\to 0$ в интегральном тождестве для $u_0(x,t)$ с пробной функцией $\psi_{2,h}(x,t)$. Далее совершаем указанный предельный переход и оцениваем возникающие слагаемые, используя неравенства (4) и Юнга. Приведем оценку типичного выражения для $R_7^{(s)} = \lim\limits_{h\to 0} R_7^{(s)}(h)$:

$$\left|R_7^{(s)}\right| \le C_3k^2\iint\limits_{Q_T}\left[1+\left|\frac{\partial r_s}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial w_s}{\partial x}\right|\right]\left[\left|\frac{\partial u_0}{\partial x}\right|+|w_s|^{-1}\left|\frac{\partial w_s}{\partial x}\right|+\omega_\delta^{-1}\left|\frac{\partial\omega_\delta}{\partial x}\right|\right]\times$$

$$\times|u_0-u_0'||w_s|^{k-1}\omega_\delta^2(x,t)\eta^{k+2}(t)\,dx\,dt \le \gamma\iint\limits_{Q_T}\left|\frac{\partial u_0}{\partial x}\right|^2|w_s|^k\omega_\delta^2(x,t)\eta^{k+2}(t)\,dx\,dt +$$

$$+ C_4\frac{k^4}{\varepsilon}\iint\limits_{Q_T}\left\{1+\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|+\omega_\delta^{-1}\left|\frac{\partial\omega_\delta}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial u_0}{\partial x}\right|\varphi^{(s)}(x)+\left|\frac{\partial w_s}{\partial x}\right|\right\}^2\times$$

$$\times\ |w_s|^{k-6}|u_0-u_0'|\,\omega_\delta^2(x,t)\eta^{k+2}(t)\,dx\,dt\ +$$

$$+\ C_4\frac{k^4}{\gamma}\sum_{i=1}^{I(s)}\iint\limits_{Q_T}\left[\left|\frac{\partial v_i^{(s)}}{\partial x}\right|+\left|v_i^{(s)}\right|\left|\frac{\partial\varphi_i^{(s)}}{\partial x}\right|+\left|f-u_0-q_i^{(s)}(t)\right|\left|\frac{\partial\varphi_i^{(s)}}{\partial x}\right|\right]^2|w_s|^{k+2}\ \times$$

$$\times\ |u_0-u_0'|\,\omega_\delta^2(x,t)\eta^{k+2}(t)\,dx\,dt, \tag{33}$$

где γ — произвольное число из интервала $(0,1)$.

Аналогичные оценки для остальных выражений приводят при соответствующем выборе γ к неравенству

$$\iint\limits_{Q_T}\left|\frac{\partial u_0}{\partial x}\right|^2|w_s|^k\omega_\delta^2(x,t)\eta^{k+2}(t)\,dx\,dt\ \le\ C_5k^4\iint\limits_{Q_T}\left\{1+\left|\frac{\partial f}{\partial t}\right|+\left|\frac{\partial q^{(s)}}{\partial t}\right|\ +\right.$$

$$\left.+\ |b(x,t)|+\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|^2+\omega_\delta^{-2}\left|\frac{\partial\omega_\delta}{\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial u_0}{\partial x}\right|^2[\varphi^{(s)}(x)]^2+\left|\frac{\partial w_s}{\partial x}\right|^2\right\}\times$$

$$\times\ |w_s|^{k-6}|u_0-u_0'|\,\omega_\delta^2(x,t)\eta^{k+1}(t)\,dx\,dt\ +$$

$$+\ C_5k^4\sum_{j=1}^{I(s)}\iint\limits_{Q_T}\left\{\left[\left|\frac{\partial v_i^{(s)}}{\partial x}\right|+\left|v_i^{(s)}\right|\left|\frac{\partial\varphi_i^{(s)}}{\partial x}\right|+\left|f-u_0-q_i^{(s)}(t)\right|\left|\frac{\partial\varphi_i^{(s)}}{\partial x}\right|\right]^2|w_s|^{k+2}\ +\right.$$

$$\left.+\ \left|\frac{\partial v_i^{(s)}}{\partial x}\right|\left|\frac{\partial\varphi_i^{(s)}}{\partial x}\right||w_s|^{k-1}\right\}|u_0-u_0'|\,\omega_\delta^2(x,t)\eta^{k+2}(t)\,dx\,dt. \tag{34}$$

Как уже отмечалось, $u_0(x,t)$ принадлежит пространству $C^{\beta,\beta/2}(\overline{Q_T})$ с некоторым $\beta>0$. Поэтому выполнено неравенство

$$|u_0(x,t)-u_0'|\ \le\ C_6\delta^\beta,\quad \text{если}\ \ \omega_\delta(x,t)\ne 0.$$

При заданных числах k, ε определим δ равенством $\delta^\beta=(1/k)^6\varepsilon$ и выберем конечное число точек $(x_l,t_l)\in\overline{Q_T}$, $l=1,\ldots,L$, так, чтобы

$$1\ \le\ \sum_{l=1}^{L}\omega\left(\frac{|x-x_l|^2+|t-t_l|}{\delta^2}\right)\ \le\ C_7\quad \text{при}\quad (x,t)\in\overline{Q_T}.$$

Используя неравенство (34) для $\omega_\delta(x,t)=\omega\left(\dfrac{|x-x_l|^2+|t-t_l|}{\delta^2}\right)$ и суммируя полученные неравенства по l, приходим к оценке (31), что и завершает доказательство леммы 3.

Лемма 4. *Предположим, что выполнены условия* $\mathrm{A}_1)-\mathrm{A}_4)$. *Тогда существует положительная постоянная* K_4, *зависящая лишь от известных параметров, такая, что при произвольных* $k\ge 0$, $s=1,2,\ldots,n$, $i=1,\ldots,I(s)$ *выполнена оценка*

$$\iint\limits_{Q_T}\left|\frac{\partial v_i^{(s)}}{\partial x}\right|^2|w_s(x,t)|^k[\varphi_i^{(s)}(x)]^2\eta^{k+2}(t)\,dx\,dt\ \le\ K_4(k+1)^2\iint\limits_{Q_T}\left\{\left|\frac{\partial w_s}{\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial u_0}{\partial x}\right|^2\ +\right.$$

$$\left.+\ \left|\frac{\partial v_i^{(s)}}{\partial x}\right|^2[1-\varphi_i^{(s)}(x)]^2+[\varphi_i^{(s)}(x)]^{-2}\left|\frac{\partial\varphi_i^{(s)}}{\partial x}\right|^2+F(x,t)[\eta(t)]^{-1}+\left|\frac{\partial q_i^{(s)}(t)}{\partial t}\right|\right\}\times$$

$$\times\ \left|w_s(x,t)\right|^k [v_i^{(s)}(x,t)]^2[\varphi_i^{(s)}(x)]^2\eta^{k+2}(t)\,dx\,dt. \qquad (35)$$

Доказательство. Подставим в интегральное тождество, определяющее $v_i^{(s)}(x,t)$ как решение задачи (9) – (11), пробную функцию

$$\psi_{4,h}(x,t) = [v_i^{(s)}(x,t)]_h \left|[w_s(x,t)]_h\right|^{k+2}[\varphi_i^{(s)}(x)]^2\eta^{k+2}(t).$$

Преобразуем слагаемое, возникающее в результате этой подстановки и содержащее производную $[v_i^{(s)}(x,t)]_h$ по t. Используя интегральные тождества для $u_s(x,t)$, $u_0(x,t)$, $v_i^{(s)}(x,t)$ как решений соответствующих задач, имеем

$$\iint\limits_{Q_T}\frac{\partial[v_i^{(s)}]_h}{\partial t}\psi_{4,h}(x,t)\,dx\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}[v_i^{(s)}(x,t)]_h^2\left|[w_s(x,t)]_h\right|^{k+2}[\varphi_i^{(s)}(x)]^2\eta^{k+2}(t)\,dx\Big|_{t=0}^{t=T} -$$

$$-\ \frac{1}{2}\iint\limits_{Q_T}[v_i^{(s)}(x,t)]_h^2\left|[w_s(x,t)]_h\right|^{k+2}[\varphi_i^{(s)}(x)]^2\frac{d}{dt}\eta^{k+2}(t)\,dx\,dt\ +$$

$$+\ R_{11}^{(s)}(h) + R_{12}^{(s)}(h) + R_{13}^{(s)}(h), \qquad (36)$$

где

$$R_{11}^{(s)}(h) = \frac{k+2}{2}\sum_{j=1}^{n}\iint\limits_{Q_T}\left[a_j\left(x,t,u_s,\frac{\partial u_s}{\partial x}\right) - a_j\left(x,t,0,\frac{\partial(v_i^{(s)}\varphi_i^{(s)})}{\partial x}\right)\right]_h\frac{\partial}{\partial x_j}\psi_{5,h}(x,t)\,dx\,dt,$$

$$R_{12}^{(s)}(h) = \frac{k+2}{2}\iint\limits_{Q_T}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left[f(x,t)-q_i^{(s)}(t)\right]_h\psi_{5,h}(x,t)\varphi_i^{(s)}(x)\ -\right.$$

$$-\ \sum_{j=1}^{n}\left(\left[a_j\left(x,t,u_0,\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)\right]_h\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\psi_{5,h}(1-\varphi_i^{(s)})\right]\ -\right.$$

$$\left.\left.-\left[a_j\left(x,t,0,\frac{\partial v_i^{(s)}}{\partial x}\right)\right]_h\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\psi_{5,h}\varphi_i^{(s)}\right] + \left[a_j\left(x,t,0,\frac{\partial}{\partial x}(v_i^{(s)}\varphi_i^{(s)})\right)\right]_h\frac{\partial\psi_{5,h}}{\partial x_j}\right)\right\}dx\,dt,$$

$$R_{13}^{(s)}(h) = \frac{k+2}{2}\iint\limits_{Q_T}\left\{\left[a_0\left(x,t,u_s,\frac{\partial u_s}{\partial x}\right)\right]_h\psi_{5,h}\ -\right.$$

$$\left.-\left[a_0\left(x,t,u_0,\frac{\partial u_0}{\partial x}\right) - c(x,t,f-u_0)\right]_h\psi_{5,h}(1-\varphi_i^{(s)})\right\}dx\,dt.$$

Здесь

$$\psi_{5,h}(x,t) = [v_i^{(s)}(x,t)]_h^2\left|[w_s(x,t)]_h\right|^k[w_s(x,t)]_h[\varphi_i^{(s)}(x)]^2\eta^{k+2}(t).$$

Представление (36) позволяет перейти к пределу при $h\to 0$ в интегральном тождестве для $v_i^{(s)}(x,t)$ с пробной функцией $\psi_{4,h}(x,t)$. Совершаем этот предельный переход и выполняем затем оценку возникающих слагаемых. Приведем оценку типичного выражения для $R_{11}^{(s)} = \lim\limits_{h\to 0}R_{11}^{(s)}(h)$. Используя неравенства (4) и Юнга, имеем

$$\left|R_{11}^{(s)}\right| \le C_8(k+2)\iint\limits_{Q_T}\left[1+\left|\frac{\partial}{\partial x}(u_s - v_i^{(s)}\varphi_i^{(s)})\right|\right]\left[\left|v_i^{(s)}\right|^{-1}\left|\frac{\partial v_i^{(s)}}{\partial x}\right| + (k+1)\left|w_s\right|^{-1}\left|\frac{\partial w_s}{\partial x}\right|\ +\right.$$

$$+ \left|\varphi_i^{(s)}\right|^{-1}\left|\frac{\partial\varphi_i^{(s)}}{\partial x}\right|\Bigg]\left|v_i^{(s)}\right|^2|w_s|^{k+1}[\varphi_i^{(s)}]^2\eta^{k+2}(t)\,dx\,dt \le$$

$$\le \gamma\iint_{Q_T}\left|\frac{\partial v_i^{(s)}}{\partial x}\right|^2|w_s|^{k+2}[\varphi_i^{(s)}]^2\eta^{k+2}(t)\,dx\,dt + C_9\frac{(k+2)^2}{\gamma}\iint_{Q_T}\left\{1+\left|\frac{\partial w_s}{\partial x}\right| +\right.$$

$$\left. + \left|\frac{\partial u_0}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|+[\varphi_i^{(s)}]^{-1}\left|\frac{\partial\varphi_i^{(s)}}{\partial x}\right|\right\}^2\left|v_i^{(s)}\varphi_i^{(s)}\right|^2|w_s|^k\eta^{k+2}(t)\,dx\,dt,$$

где γ — произвольное число из интервала (0, 1).

Аналогичные оценки остальных выражений приводят при соответствующем выборе γ к неравенству (35) и завершают доказательство леммы 4.

Лемма 5. *Предположим, что выполнены условия* $A_1) - A_4)$, $B_1)$, $B_2)$. *Существуют постоянные* K_5, $\bar\lambda$, $\bar k$, *зависящие только от известных параметров, такие, что при* $k \ge \bar k$ *справедлива оценка*

$$\sup_{0<\tau<T}\int_\Omega|w_s(x,\tau)|^{k+2}\eta^{k+2}(\tau)\,dx + \iint_{Q_T}|w_s(x,t)|^k\left|\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x}\right|^2\eta^{k+2}(t)\,dx\,dt \le$$

$$\le K_5k^{\bar\lambda}\iint_{Q_T}|w_s(x,t)|^{k-\bar k}F(x,t)\eta^{k+1}(t)\,dx\,dt + K_5\left(\frac{1}{k}\right)^{k/3}\gamma_s, \tag{37}$$

где

$$\gamma_s = \iint_{Q_T}\left\{\left|\frac{\partial w_s}{\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial u_0}{\partial x}\right|^2[\varphi^{(s)}(x)]^2\right\}\eta^{k+2}(t)\,dx\,dt \tag{38}$$

и $\varphi^{(s)}(x)$ — *функция, определенная в лемме* 3.

Доказательство. Из неравенств (22), (31), (35) и неравенства Юнга при соответствующем выборе ε получаем

$$\frac{1}{k+2}\sup_{0<\tau<T}\int_\Omega|w_s(x,\tau)|^{k+2}\eta^{k+2}(\tau)\,dx + (k+1)\iint_{Q_T}|w_s(x,t)|^k\left|\frac{\partial w_s}{\partial x}\right|^2\eta^{k+2}(t)\,dx\,dt \le$$

$$\le C_{10}k^\lambda\left\{\iint_{Q_T}|w_s(x,t)|^{k-6}F(x,t)\eta^{k+1}(t)\,dx\,dt+\sum_{j=1}^{I(s)}J_j^{(s)}(k)\right\} + C_{10}\left(\frac{1}{k}\right)^{k/3}\gamma_s, \tag{39}$$

где

$$J_j^{(s)}(k) = \iint_{Q_T}\left\{\left|\frac{\partial q_i^{(s)}(t)}{\partial t}\right|\varphi_i^{(s)}(x)+\left|\tilde\varphi_i^{(s)}(x)-\bar\varphi_i^{(s)}(x)\right|^2\left|\frac{\partial v_i^{(s)}}{\partial x}\right|^2 +\right.$$

$$\left.+\left|\frac{\partial v_i^{(s)}}{\partial x}\right|\left|\frac{\partial\varphi_i^{(s)}}{\partial x}\right|+\left(\left|v_i^{(s)}\right|+\left|f-u_0-q_i^{(s)}(t)\right|^2\right)\left|\frac{\partial\varphi_i^{(s)}}{\partial x}\right|^2\right\}\eta^{k+2}(t)\,dx\,dt,$$

γ_s определено равенством (38).

Отметим следующие неравенства:

$$\left|\frac{dq_i^{(s)}(t)}{dt}\right| \le 2\max_{0\le l\le K(i,s)-1}\left\{\frac{\left|f_{i,l+1}^{(s)}-f_{i,l}^{(s)}\right|}{[\rho_i^{(s)}]^2}+\frac{\left|u_{i,l+1}^{(s)}-u_{i,l}^{(s)}\right|}{[\rho_i^{(s)}]^2}\right\} \le C_{11}[\rho_i^{(s)}]^{\beta-2},$$

$$\left|\tilde{\varphi}_i^{(s)}(x)-\overline{\varphi}_i^{(s)}(x)\right|^2\left|\frac{\partial v_i^{(s)}}{\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial v_i^{(s)}}{\partial x}\right|\left|\frac{\partial \varphi_i^{(s)}}{\partial x}\right|+\left|v_i^{(s)}\right|\left|\frac{\partial \varphi_i^{(s)}}{\partial x}\right|^2 \le C_{11}[d_i^{(s)}]^{n-2}[\rho_i^{(s)}]^{-n},$$

$$\left|f(x,t)-u_0(x,t)-q_i^{(s)}(t)\right|\left|\frac{\partial \varphi_i^{(s)}}{\partial x}\right|^2 \le C_{11}[\rho_i^{(s)}]^{2\beta-2}. \tag{40}$$

Первое и третье из этих неравенств получены в силу гельдеровости функций $f(x,t)$, $u_0(x,t)$ и определения функций $q_i^{(s)}(t)$, $\varphi_i^{(s)}(t)$. Второе неравенство — непосредственное следствие определения функций $\varphi_i^{(s)}(x)$, $\tilde{\varphi}_i^{(s)}(x)$, $\overline{\varphi}_i^{(s)}(x)$ и леммы 1.

Используя далее неравенство (40), условие B_2) и выбор $\rho_i^{(s)}$, при $i = 1,\ldots$ $\ldots, I(s)$ имеем

$$C_{10}k^{\lambda}J_j^{(s)}(k) \le C_{12}k^{\lambda}[\rho_i^{(s)}]^{\beta-2}\int_0^T\int_{B(x_i^{(s)},\rho_i^{(s)})}|w_s(x,t)|^{k-6}\eta^{k+2}(t)\,dx\,dt.. \tag{41}$$

При оценке последнего интеграла воспользуемся неравенством

$$\int_{B(x_0,\rho)}|v(x)|^p dx \le C\left\{\rho^p\int_{B(x_0,r)}\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|^p dx+\frac{\rho^n}{r^n}\int_{B(x_0,r)}|v(x)|^p dx\right\}; \tag{42}$$

справедливым при $1 < p < n$, $0 < \rho < r/2$ для произвольной функции $v(x)\in$ $\in W_p^1(B(x_0,r))$ с постоянной C, зависящей только от n, p (см. [7], лемма 1.4 гл. 8). Применяя неравенства (42) с $p = 2-\beta$, Юнга и равенство (16) для $\rho_i^{(s)}$, получаем

$$C_{10}k^{\lambda}J_j^{(s)}(k) \le C_{13}k^{\lambda+2}\int_0^T\int_{B(x_i^{(s)},r_i^{(s)}/2)}\left\{|w_s|^{k-8+\beta}\left|\frac{\partial w_s}{\partial x}\right|^{2-\beta}+|w_s|^{k-6}\right\}\eta^{k+2}(t)\,dx\,dt \le$$

$$\le \frac{1}{2}\int_0^T\int_{B(x_i^{(s)},r_i^{(s)}/2)}|w_s|^k\left|\frac{\partial w_s}{\partial x}\right|^2\eta^{k+2}(t)\,dx\,dt +$$

$$+ C_{14}k^{2(\lambda+2)/\beta}\int_0^T\int_{B(x_i^{(s)},r_i^{(s)}/2)}|w_s|^{k-2(8-\beta)/\beta}\eta^{k+2}(t)\,dx\,dt. \tag{43}$$

Заметим, что в силу определения $r_i^{(s)}$ шары $B(x_i^{(s)},r_i^{(s)}/2)$, $B(x_j^{(s)},r_j^{(s)}/2)$ не пересекаются при $i \ne j$.

Теперь неравенство (37) следует из (39) и (43), что завершает доказательство леммы 5.

4. ***Доказательство теоремы*** **2.** Используя условие A_4) на $F(x,t)$ и неравенство Гельдера, из (37) получаем

$$\sup_{0<\tau<T}\int_\Omega|w_s(x,\tau)|^{k+2}\eta^{k+2}(\tau)\,dx + \iint_{Q_T}|w_s(x,t)|^k\left|\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x}\right|^2\eta^{k+2}(t)\,dx\,dt \le$$

$$\le C_{15}k^{\bar{\lambda}}\left\{\int_0^T\left[\int_\Omega|w_s|^{(k-\bar{k})q'}\eta^{(k+1)q'}(t)\,dx\right]^{p'/q'}dt\right\}^{1/p'} + C_{15}\left(\frac{1}{k}\right)^{k/3}\gamma_s, \tag{44}$$

где $k \geq \bar{k}$, $p' = p/(p-1)$, $q' = q/(q-1)$ и p, q — числа, удовлетворяющие неравенству (5).

Используя неравенство (44) и вложение

$$L_\rho(0,T;L_\sigma(\Omega)) \subset \left\{L_\infty(0,T;L_2(\Omega)) \cap L_2(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))\right\}$$

при $\sigma = 2q'\theta$, $\rho = 2p'\theta$, $\theta = 2/np' + 1/q'$, получаем

$$\int_0^T \left[\int_\Omega |w_s(x,t)\eta(t)|^{kq'}\,dx\right]^{p'/q'} dt = \int_0^T \left\{\int_\Omega [|w_s(x,t)|\eta(t)]^{k/2\theta}\,dx\right\}^{\rho/\sigma} dt \leq$$

$$\leq C_{16}(k+1)^p \left\{\max_{0<t<T}\int_\Omega |w_s(x,t)\eta(t)|^{k/\theta}\,dx + \iint_{Q_T} |w_s(x,t)|^{k/\theta-2}\left|\frac{\partial w_s}{\partial x}\right|^2 \eta^{k/\theta}\,dx\,dt\right\}^{\rho/2} \leq$$

$$\leq C_{17}(k+1)^{p+\bar{\lambda}\rho/2}\left\{\int_0^T\left[\int_\Omega |w_s(x,t)\eta(t)|^{(k/\theta-2-\bar{k})q'}\,dx\right]^{p'/q'} dt\right\}^{\theta} + \left(\frac{C_{17}}{k-2\theta}\right)^{(k-2\theta)/3\theta}\gamma_s^{\rho/2},$$

$$k \geq \theta(2+\bar{k}). \tag{45}$$

Определим числовую последовательность

$$k_j = \frac{2+\bar{k}}{\theta-1}[\theta^{j+2}-\theta], \quad j = 0, 1, \ldots,$$

и введем обозначение

$$I_s(j) = \int_0^T\left[\int_\Omega |w_s(x,t)\eta(t)|^{k_j q'}\,dx\right]^{p'/q'} dt.$$

Из условия на p, q следует, что $\theta > 1$ и поэтому $k_j \to \infty$ при $j \to \infty$. Отметим также, что, увеличивая, если нужно, число $\bar{k}$, можно обеспечить выполнение неравенства $2+\bar{k} \geq 3\theta(\theta-1)$. Из неравенства (45) с $k = k_j$ при $j \geq$ ≥ 1 имеем

$$[I_s(j)]^{\theta^{-j}} \leq C_{18}^{j\theta^{-j}}[I_s(j-1)]^{\theta^{-(j-1)}} + C_{18}\theta^{-j}\gamma_s^{\rho\theta^{-j}/2}. \tag{46}$$

Итерируя последнюю оценку, получаем

$$[I_s(j)]^{\theta^{-j}} \leq C_{18}^{j\theta^{-j}+(j-1)\theta^{-(j-1)}+\ldots+\theta^{-1}+1}\Big\{I_s(0) +$$

$$+ \theta^{-j}\gamma_s^{\rho\theta^{-j}/2} + \theta^{-(j-1)}\gamma_s^{\rho\theta^{-(j-1)}/2} + \ldots + \theta^{-1}\gamma_s^{\rho\theta^{-1}/2}\Big\}. \tag{47}$$

Далее, в силу неравенства $\theta > 1$ имеем

$$j\theta^{-j} + (j-1)\theta^{-(j-1)} + \ldots + \theta^{-j} \leq C_{19}. \tag{48}$$

Для оценки суммы слагаемых в правой части неравенства (47) заметим, что при $j \geq 1$

$$\int_j^{j+1} \theta^{-(z-1)}\gamma_s^{\rho\theta^{-z}/2}\,dz \geq \theta^{-j}\gamma_s^{\rho\theta^{-j}/2}.$$

Отсюда имеем

$$\theta^{-j}\gamma_s^{\rho\theta^{-j}/2} + \theta^{-(j-1)}\gamma_s^{\rho\theta^{-(j-1)}/2} + \ldots + \theta^{-1}\gamma_s^{\rho\theta^{-1}/2} \le$$

$$\le C_{20}\int_1^{\infty}\theta^{-(z-1)}\gamma_s^{\rho\theta^{-z}/2}dz \le C_{21}\frac{1}{|\ln\gamma_s|}. \tag{49}$$

Переходя к пределу при $j \to \infty$ в неравенстве (47) и используя оценки (48), (49), получаем

$$\max_{(x,t)\in Q_T}|w_s(x,t)\eta(t)| \le C_{22}\left\{I_s(0) + \frac{1}{|\ln\gamma_s|}\right\}. \tag{50}$$

Правая часть этого неравенства стремится к нулю при $s \to \infty$. Стремление к нулю $I_s(0)$ следует из теоремы 1 и ограниченности последовательности $\{w_s(x, t)\}$. Сходимость к нулю последовательности $\{\gamma_s\}$ следует из теоремы 1, свойства абсолютной непрерывности интеграла, включения $\operatorname{supp}\varphi_i^{(s)} \subset B(x_i^{(s)}, 2\rho_i^{(s)})$, оценки

$$\sum_{i=1}^{I(s)}[\rho_i^{(s)}]^n = \sum_{i=1}^{I(s)}[r_i^{(s)}]^{n^2/(n-2+\beta)} \le C_{23}[r_i^{(s)}]^{n(2-\beta)/(n-2+\beta)}$$

и условия B_1).

Таким образом, из (50) получаем

$$\lim_{s\to\infty}\left\{\max|w_s(x,t)| : x \in \overline{\Omega},\ 0 \le t \le \frac{T}{2}\right\} = 0. \tag{51}$$

Наконец, в силу возможности продолжения решения задачи (1) – (3) на цилиндр Q_{2T} получаем равенство (20) непосредственно из (51), и доказательство теоремы 2 завершено.

1. *Скрыпник И. В.* Асимптотическое разложение решений квазилинейных параболических задач в перфорированных областях // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, № 11. – С. 1542 – 1566.
2. *Скрыпник И. В.* Усреднение квазилинейных параболических задач в областях с мелкозернистой границей // Дифференц. уравнения. – 1995. – **31**, № 31. – С. 350 – 363.
3. *Скрыпник И. В., Журавская А. В.* Равномерная аппроксимация решений параболических задач в перфорированных областях // Нелинейные граничные задачи. – 2003. – Вып. 13. – С. 149 – 164.
4. *Скрыпник И. В.* Асимптотика решений нелинейных эллиптических задач в перфорированных областях // Мат. сб. – 1993. – **184**, вып. 10. – С. 67 – 90.
5. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.
6. *Журавская А. В.* Поточечная оценка решений нелинейной параболической задачи // Математика та її застосування: Пр. Ін-ту математики НАН України. – 2001. – **36**. – С. 103 – 110.
7. *Скрыпник И. В.* Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач. – М.: Наука, 1990. – 448 с.

Получено 28.04.2004