УДК 512.548

**Ф. М. Сохацький** (Вінниц. пед. ун-т)

# ПРО КЛАСИФІКАЦІЮ ФУНКЦІЙНИХ РІВНЯНЬ НА КВАЗІГРУПАХ

We consider functional equations over quasigroup operations. We prove that every quadratic parastrophically uncancellable functional equation of four object variables is parastrophically equivalent to either the functional equation of mediality or the functional equation of pseudomediality.

We establish the set of all solutions of the general functional equation of pseudomediality and also the criterion for the uncancellability of the quadratic functional equation of four object variables.

Розглядаються функційні рівняння над квазігруповими операціями. Доведено, що кожне квадратичне парастрофно нескоротне функційне рівняння від чотирьох предметних змінних парастрофно рівносильне або функційному рівнянню медіальності, або функційному рівнянню псевдомедіальності.

Знайдено множину всіх розв'язків загального функційного рівняння псевдомедіальності, а також критерій нескоротності квадратичного функційного рівняння від чотирьох предметних змінних.

Одним із методів вивчення алгебр та алгебраїчних операцій є метод функційних рівнянь. Особливо широкого розвитку цей метод набув у теорії квазігруп після того, як було знайдено всі розв'язки функційного рівняння асоціативності. Далі цей результат було розвинено у працях [1 – 7].

Якщо у функційному рівнянні принаймні одна із предметних змінних має лише одну появу і таке рівняння має розв'язок у множині квазігрупових операцій деякої множини $Q$, то ця множина є одноелементною. Тому будемо вважати, що кожна предметна змінна у функційному рівнянні має принаймні дві появи. Функційне рівняння, в якому кожна предметна змінна має точно дві появи, називається *квадратичним*. До квадратичних відносяться такі відомі функційні рівняння, як рівняння асоціативності, медіальності, транзитивності, врівноважені рівняння тощо.

Отже, у зазначених вище та деяких інших працях (див., наприклад, [8, 9]) вивчаються квадратичні рівняння. У данній статті також продовжується їх вивчення. Спочатку розробляється новий понятійний апарат, який дозволяє класифікувати квадратичні парастрофно нескоротні функційні рівняння від трьох та чотирьох предметних змінних із точністю до парастрофної рівносильності. А саме, доводиться, що у випадку трьох предметних змінних є лише один клас еквівалентності, який містить функційне рівняння загальної асоціативності; у випадку чотирьох предметних змінних таких класів є два: один клас зображуваний загальним функційним рівнянням медіальності, а інший — псевдомедіальності. Знайдено множину розв'язків функційного рівняння псевдомедіальності (рівняння медіальності розв'язав В. Д. Білоусов у [1, 10]), а також зручну ознаку парастрофної нескоротності квадратичних функційних рівнянь, які мають чотири різні предметні змінні.

Результати цієї праці доповідались на Вінницькому міському семінарі з алгебри та дискретної математики, а також на Третій та Четвертій міжнародних конференціях в Україні [11, 12].

Нагадаємо, що квазігрупою називається групоїд $(Q;\cdot)$, в якому кожне з рівнянь $x\cdot a=b$ та $a\cdot y=b$ має єдиний розв'язок для всіх значень $a, b\in Q$. Це означає, що з кожною квазігруповою операцією $(\cdot)$ на множині $Q$ рівностями $b/a := x$ та $a\backslash b := y$ визначено операції *лівого* (/) та *правого* (\) *ділення* операції $(\cdot)$. Тому квазігрупу можна визначити ще як алгебру $(Q;\cdot, /, \backslash)$, в якій виконуються тотожності

$$(x/y)\cdot y = x, \quad (x\cdot y)/y = x, \quad x\cdot(x\backslash y) = y, \quad x\backslash(x\cdot y) = y.$$

Квазігрупова операція $(\cdot)$, її ліве і праве ділення, а також комутування[1] цих операцій називаються *парастрофами* операції $(\cdot)$. Парастрофи квазігрупової операції є також квазігруповими операціями.

Коли відомо, що операції одного функційного рівняння є парастрофами іншого, то, знаючи множину розв'язків одного, можна записати множину розв'язків іншого. Звідси випливає потреба класифікації функційних рівнянь із точністю до парастрофії. Для точного визначення потрібних понять уточнимо деякі відомі поняття.

Розглянемо слова мови другого порядку, до запису яких входять предметні змінні $x_0, x_1, \ldots$ та функційні змінні $F_0, F_1, \ldots$. Ці слова позначатимемо $\omega$, $v$, .... Довжиною слова $\omega$ називають кількість появ предметних символів у даному слові і позначають $|\omega|$.

**Означення 1.** *Дві рівності слів другого порядку назвемо парастрофно рівносильними, якщо одну можна отримати з іншої за скінченну кількість застосувань таких парастрофних перетворень*:

1) *переіменування предметних або функційних змінних*;

2) *перетворення за комутуванням: заміна підслова виду* $\omega \cdot v$ *словом* $v \odot \omega$;

3) *перетворення за зовнішнім діленням: перехід від рівності* $\omega_1 \cdot \omega_2 = v_1 \circ v_2$ *до однієї з рівностей*

$$\omega_1 \backslash (v_1 \circ v_2) = \omega_2 \quad \text{або} \quad (v_1 \circ v_2) / \omega_2 = \omega_1,$$

*де* $/$, $\backslash$ *є відповідно лівим та правим діленням операції* $(\cdot)$;

4) *перетворення за внутрішнім (правим) діленням через змінну* $x$: *заміна підслова* $x \cdot \omega$ *на* $x$ *і одночасно заміна всіх інших появ змінної* $x$ *словом* $x \backslash \omega$, *якщо* $x$ *не має появи в слові* $\omega$.

Зауважимо, що перетворення „*заміна підслова* $\omega \cdot x$ *змінною* $x$ і *заміна всіх інших появ змінної* $x$ *словом* $\omega / x$" є похідним від перетворення за комутуванням та перетворення за внутрішнім діленням, тому ми також його будемо застосовувати і називати (*лівим*) *діленням на слово* $\omega$ *через змінну* $x$.

**Означення 2.** *Дві рівності слів другого порядку назвемо комутативно рівносильними, якщо одне можна отримати з іншого за скінченну кількість застосувань перетворень* 1) *і* 2) *із означення парастрофної рівносильності.*

Слово виду $F(\omega, \omega)$ назвемо *квадратом.* Нехай $v$, $\omega$ — довільні слова мови другого порядку, які містять лише предметні та функційні змінні. Під *функційним рівнянням* ми розумітимемо предикат мови другого порядку, що є рівністю двох слів $v = \omega$, в якому всі предметні змінні зв'язані квантором загальності. Функційне рівняння $v = \omega$ називають:

*загальним*, якщо функційні змінні, що входять до його запису, є попарно різними;

*врівноваженим*, якщо кожна предметна змінна має точно по одній появі в лівій і правій частинах рівняння;

*квадратичним*, якщо кожна предметна змінна має в рівнянні точно дві появи;

*скоротним*, якщо воно має самодостатню послідовність підслів (послідовність підслів рівняння називається самодостатньою, якщо вона містить всі появи в рівнянні всіх своїх змінних);

*парастрофно скоротним*, якщо воно парастрофно рівносильне деякому скоротному рівнянню.

У даній роботі ми розглянемо загальні бінарні парастрофно нескоротні квадратичні функційні рівняння, до запису яких входить три або чотири різні предметні змінні.

---

[1] Комутуванням операції $(\cdot)$ називається операція $\odot$, яка визначається рівністю $x \odot y := y \cdot x$.

Оскільки в загальному рівнянні всі функційні змінні є попарно різними, то позначення всіх змінних одним і тим самим символом, наприклад $(\cdot)$, не призведе до непорозуміння. Справді, адже за цих позначень різні появи символу $(\cdot)$ позначатимуть різні функційні змінні. Наприклад, *загальне функційне рівняння медіальності*

$$F_1(F_2(x, y), F_3(z, u)) = F_4(F_5(x, z), F_6(y, u)) \tag{1}$$

та *загальне функційне рівняння псевдомедіальності*

$$F_1(F_2(x, y), F_3(z, u)) = F_4(F_5(F_6(x, z), y), u) \tag{2}$$

наберуть вигляду

$$xy \cdot zu = xz \cdot yu, \qquad xy \cdot zu = (xz \cdot y)u$$

відповідно, де, на додаток, для скорочення запису символ $(\cdot)$ відкинуто, тобто передостанню рівність слід розуміти як запис

$$(x \cdot y) \cdot (z \cdot u) = (x \cdot z) \cdot (y \cdot u).$$

Розглянемо деякі властивості функційних рівнянь.

**Лема 1.** *Якщо предметна змінна $x$ має точно дві появи у функційному рівнянні $v = \omega$, то це рівняння парастрофно рівносильне рівнянню типу*[2]

$$x = xv_1v_2 \dots v_n \tag{3}$$

*для деяких підслів $v_1, v_2, \dots, v_n$ цього рівняння.*

***Доведення.*** В залежності від того, по різні чи по одну сторону рівняння лежать появи змінної $x$, отримаємо комутативну рівносильність даного рівняння $\omega = v$ одному із таких рівнянь:

$$xv_sv_{s-1} \dots v_1 = xv_{s+1}v_{s+2} \dots v_n,$$

$$(xv_sv_{s-1} \dots v_1)(xv_{s+1}v_{s+2} \dots v_{n-1})\omega_1\omega_2 \dots \omega_k = \omega.$$

Обидва ці рівняння зводяться до (3) зовнішнім діленням та діленням через змінну $x$.

Лему 1 доведено.

З леми 1 випливає, що (3) можна вважати деяким канонічним виглядом функційних рівнянь, які мають точно дві появи змінної $x$. При цьому послідовність підслів $v_1, v_2, \dots, v_n$ назвемо *окантуванням* змінної $x$ у рівнянні $v = \omega$.

**Лема 2.** *Циклічна перестановка окантування змінної $x$ також є окантуванням цієї змінної в деякому функційному рівнянні, яке парастрофно рівносильне даному.*

***Доведення.*** Поділимо функційне рівняння (3) на $v_1$ через змінну $x$, а потім отримане рівняння поділимо зовні на $v_1$ і отримаємо, що $v_2, \dots, v_n, v_1$ є окантуванням змінної $x$.

Лему 2 доведено.

Лема 2, зокрема, означає, що окантування варто уявляти як послідовність, яка розташована не на прямій, а на колі. Підпослідовність $v_i, v_{i\oplus 1}, \dots, v_{i\oplus j}$, де $\oplus$ є додаванням за модулем $n$, назвемо *дугою окантування.* Якщо дуга містить всі появи в рівнянні всіх своїх змінних, то її називатимемо *самодостатньою.* З леми 2 випливає така лема.

**Лема 3.** *Якщо деяка змінна рівняння $\omega = v$ має самодостатню окантовну дугу, то це рівняння є парастрофно скоротним.*

[2] Відсутність дужок означає їх ліве розташування, тобто $xv_1v_2 \dots v_n$ позначає $(\dots((xv_1)v_2)\dots)v_n$.

Розглянемо парастрофно нескоротні квадратичні функційні рівняння, предметні змінні яких позначатимемо через $x, y, z, u, \ldots$ і вважатимемо, що $x \prec y \prec \prec z \prec u \ldots$ (лексикографічний порядок).

**Лема 4.** *Якщо квадратичне функційне рівняння не має квадратів і самодостатніх дуг, то воно парастрофно рівносильне функційному рівнянню, яке задовольняє такі властивості:*

1) *для довільного підслова*[3] $t_1t_2$ *існує взаємне переіменування змінних* $t_1$ *і* $t_2$ *та їх перестановка такі, що* $t_1 \prec t_2$, *а також інші появи цих змінних розташовані так, що* $t_1$ *знаходиться лівіше за* $t_2$;

2) *множини двох підслів довжини два мають не більше однієї спільної змінної*;

3) *множина предметних змінних довільного підслова довжини три є триелементною*;

4) *для довільного підслова довжини 4 існують перестановка його підслів та переіменування його змінних такі, що дане підслово буде одного із видів*

$$xy \cdot xz, \qquad (xy \cdot z)x, \tag{4}$$

$$xy \cdot zu, \qquad (xy \cdot z)u. \tag{5}$$

***Доведення.*** Оскільки рівняння квадратів не має, то підслова $t_1t_2$ довжини два мають дві різні змінні в своєму записі і, при потребі, можна поміняти їх місцями так, щоб $t_1 \prec t_2$. Припустимо, що інша поява $t_1$ розташована правіше за іншу появу змінної $t_2$. Тоді замінимо підслово $t_1t_2$ словом $t_2t_1$ і взаємно переіменуємо їх. В результаті отримаємо рівняння, в якому виконується умова 1.

Якщо множини підслів довжини два мають дві спільні змінні, то це означає, що кожна з них має самодостатню дугу, яка складається з двох появ іншої змінної, а це суперечить умові леми.

Кожне підслово довжини три має підслово довжини два, змінні якого, як ми встановили вище, є різними. Тому це підслово з точністю до комутування має вигляд $xy \cdot y$ або $xy \cdot z$. Перше неможливо, оскільки це означало б, що $y, y$ є окантовною самодостатньою дугою змінної $x$, а це суперечить умові леми.

Із доведених пунктів 2 і 3 випливає, що підслово довжини 4 має не менше ніж 3 різні змінні. На підставі вже доведених пунктів та того факту, що підслово довжини 4 за довжиною своїх підслів може мати тип $2+2$ або $3+1$, отримуємо необхідне твердження.

Лему 4 доведено.

Перший вагомий результат у дослідженні квадратичних функційних рівнянь отримав В. Д. Білоусов, який знайшов множину всіх розв'язків загального функційного рівняння асоціативності, а саме, довів таку теорему.

**Теорема 1** [1]. *Множина всіх розв'язків загального функційного рівняння асоціативності*

$$F_1(F_2(x, y), z) = F_3(x, F_4(y, z)) \tag{6}$$

*над множиною квазігрупових операцій довільної множини* $Q$ *описується такими залежностями*:

$$F_1(t, z) = \mu(t) \cdot \gamma(z), \qquad F_2(x, y) = \mu^{-1}(\alpha(x) \cdot \beta(y)),$$

$$F_3(x, u) = \alpha(x) \cdot \nu(u), \qquad F_4(y, z) = \nu^{-1}(\beta(y) \cdot \gamma(z)),$$

*де* $(Q; \cdot)$ — *довільна група,* $\mu, \nu, \alpha, \beta, \gamma$ — *довільні підстановки множини* $Q$.

[3] Тут і далі $t_1, t_2, \ldots$ позначають метазмінні, які набувають значень у множині предметних змінних $\{x, y, z, u, \ldots\}$.

Виявилось, що всі інші нетривіальні функційні рівняння йому парастрофно рівносильні. Цей факт досліджувався в [5], а підсумком є така теорема.

**Теорема 2.** *Загальне парастрофно нескоротне квадратичне функційне рівняння від трьох предметних змінних є парастрофно рівносильним функційному рівнянню асоціативності.*

*Доведення.* Якщо зазначене функційне рівняння не має підслова довжини три, то воно має підслово довжини чотири типу $2 + 2$, тобто підслово виду $t_1t_2 \cdot t_3t_4$. Згідно з лемою 4, точно одна із змінних повторюється, наприклад $t_2 = t_4$. Поділивши дане рівняння на $t_2$ через змінну $t_1$, отримаємо функційне рівняння, в якому є підслово довжини три.

Якщо в рівнянні є підслово довжини три, то зовнішнім діленням можна звести його до рівняння типу $3 = 3$. З леми 4 випливає, що таке рівняння має вигляд $xy \cdot z = xz \cdot y$. Замінивши першу та четверту функційні змінні їх комутуванням, отримаємо функційне рівняння асоціативності.

Теорему 2 доведено.

Нехай далі $\omega = \upsilon$ позначає загальне функційне рівняння від чотирьох предметних змінних, в якому немає квадратів і самодостатніх дуг. Оскільки кожна з чотирьох змінних повторюється двічі, то $|\upsilon| + |\omega| = 8$. Можливі чотири типи функційних рівнянь (за довжиною слів $\upsilon$ та $\omega$): $4 = 4$, $3 = 5$, $2 = 6$, $1 = 7$. Для типу $4 = 4$ має місце наступне твердження. Зауважимо, що функційні рівняння типу $4 = 4$ можна розбити на такі підтипи: $2 + 2 = 2 + 2$, $2 + 2 = 3 + 1$, $3 + + 1 = 3 + 1$, тому що слово типу $3 + 1$ зводиться до $1 + 3$ перетворенням комутування підслів.

**Теорема 3.** *Кожне неврівноважене функційне рівняння* $\omega = \upsilon$ *типу* $4 = 4$ *є парастрофно рівносильним рівнянню псевдомедіальності. Кожне врівноважене функційне рівняння* $\omega = \upsilon$ *типу* $4 = 4$ *є парастрофно рівносильним функційному рівнянню*:

*медіальності* (1), *якщо його підтип є* $2 + 2 = 2 + 2$;

*псевдомедіальності* (2), *якщо його підтип є* $2 + 2 = 3 + 1$;

*медіальності або псевдомедіальності, якщо його підтип є* $3 + 1 = 3 + 1$.

*Доведення.* З леми 4 випливає, що з точністю до переіменування змінних слова $\omega$ та $\upsilon$ збігаються з одним із слів (4), (5). Це, зокрема, означає, що предметна змінна в словах $\omega$ та $\upsilon$ може зустрічатись не більше двох разів. Не втрачаючи загальності позначимо предметні змінні в лівій частині в лексикографічному порядку, і тому слово $\upsilon$ графічно збігається з одним із слів із (4) чи (5).

Доведення зазначених в умові теореми тверджень подібні, тому ми розглянемо лише перше з них.

Якщо функційне рівняння типу $4 = 4$ є неврівноваженим, тобто деяка змінна в словах $\upsilon$ чи $\omega$ повторюється, то з леми 4 випливає, що слово $\upsilon$ графічно збігається з одним із слів (4). Тому слово $\omega$ також збігається з одним із слів (4), але з точністю до переіменування змінних. Оскільки в $\upsilon$ повторюється змінна $x$, а змінні $y$ і $z$ зустрічаються по одному разу, то в $\omega$ повторюється змінна $u$, а $y$ і $z$ також будуть зустрічатись по одному разу.

Якщо $\upsilon$ збігається з $xy \cdot xz$ і інша поява змінної $y$ знаходиться правіше за іншу появу змінної $z$, то, переставивши $xy$ та $xz$ і взаємно переіменувавши змінні $y$ та $z$, перейдемо до рівняння, в якому змінна $y$ знаходиться лівіше за змінну $z$. Тому кожне неврівноважене функційне рівняння комутативно рівносильне деяким із рівнянь:

i) $xy \cdot xz = yu \cdot zu$,

ii) $xy \cdot xz = (yu \cdot z)u$,

iii) $(xy \cdot z)x = (yu \cdot z)u$,

iv) $(xy \cdot z)x = (zu \cdot y)u$.

Кожне з них парастрофно рівносильне загальному функційному рівнянню псевдомедіальності (2). Розглянемо, наприклад, рівняння i). Для цього поділимо його на $x$ через змінну $z$, а отримане рівняння поділимо на $y$ через змінну $x$:

$$xz = yu \cdot (xy \cdot z)u.$$

Поділимо зовні це рівняння на $yu$ та застосуємо перетворення комутування. В результаті отримаємо функційне рівняння псевдомедіальності.

Теорему 3 доведено.

Щоб показати, що функційні рівняння медіальності і псевдомедіальності парастрофно нерівносильні, проаналізуємо множини їх розв'язків. У роботі [10] знайдено множину всіх розв'язків функційного рівняння медіальності. Знайдемо множину розв'язків функційного рівняння псевдомедіальності.

Нехай $a$ — довільний елемент базової множини, тоді покладемо

$$L_i(x) := f_i(a, x), \qquad R_i(x) := f_i(x, a). \tag{7}$$

Оскільки ми розглядаємо лише квазігрупові операції, то перетворення $L_i$ та $R_i$ є підстановками базової множини $Q$.

**Теорема 4.** *Множина всіх розв'язків загального функційного рівняння псевдомедіальності* (2) *над множиною квазігрупових операцій довільної множини* $Q$ *описується такими залежностями:*

$$\begin{aligned} F_1(z,t) &= \alpha_1(z)\cdot\beta_1(t), & F_2(x,y) &= \alpha_1^{-1}(\beta_2(y)\cdot\alpha_2(x)),\\ F_3(u,v) &= \beta_1^{-1}(\alpha_3(u)\cdot\beta_3(v)), & F_4(t,v) &= \alpha_4(t)\cdot\beta_3(v),\\ F_5(z,y) &= \alpha_4^{-1}(\beta_2(y)\cdot\alpha_5(z)), & F_6(x,u) &= \alpha_5^{-1}(\alpha_2(x)\cdot\alpha_3(u)),\end{aligned} \tag{8}$$

*де* $(Q;\cdot)$ — *довільна група, а* $\alpha_i$, $\beta_i$, $i = 1, 2, 3, 4,$ — *довільні підстановки множини* $Q$.

***Доведення.*** Підставивши в ліву і праву частини функційного рівняння псевдомедіальності (2) значення функційних змінних $F_1, \ldots, F_6$, які визначаються рівностями (8), отримаємо один і той самий вираз.

Навпаки, нехай $(f_1, \ldots, f_6)$ — шістка визначених на $Q$ квазігрупових операцій, яка є розв'язком функційного рівняння (2), тобто для всіх $x, y, u, v \in Q$ виконується рівність

$$f_1(f_2(x,y), f_3(u,v)) = f_4(f_5(f_6(x,u),y),v). \tag{9}$$

Зокрема, при $x := a$ отримаємо (скорочення записів згідно з (7)):

$$f_1(L_2(y), f_3(u,v)) = f_4(f_5(L_6(u),y),v).$$

Замінимо $L_2(y)$ на $y$, тобто $y$ на $L_2^{-1}(y)$, та покладемо

$$g(y,u) := f_5\big(L_6(u), L_2^{-1}(y)\big). \tag{10}$$

В результаті отримаємо рівність

$$f_1(y, f_3(u,v)) = f_4(g(y,u),v).$$

Отже, четвірка квазігрупових операцій $f_1, f_3, f_4, g$ є розв'язком функційного рівняння загальної асоціативності. Тому за теоремою 1 існують підстановки $\alpha_1, \alpha_3, \beta_1, \beta_3, \alpha_4$ і група $(Q;\cdot)$ такі, що

$$f_1(y,t) = \alpha_1(y)\cdot\beta_1(t), \qquad f_3(u,v) = \beta_1^{-1}(\alpha_3 u\cdot\beta_3 v),$$
$$f_4(t,v) = \alpha_4(t)\cdot\beta_3(v), \qquad g(y,u) = \alpha_4^{-1}(\alpha_1(y)\cdot\alpha_3(u)). \tag{11}$$

Із залежностей (10) і (11) маємо

$$f_5(u,y) = \alpha_4^{-1}(\beta_5(y)\cdot\alpha_5(u)), \tag{12}$$

де $\beta_5 := \alpha_1 L_2$ та $\alpha_5 := \alpha_3 L_6^{-1}$. Підставимо знайдені для $f_1, f_3, f_4, f_5$ значення в залежність (9):

$$\alpha_1 f_2(x,y)\cdot\alpha_3(u) = \beta_5(y)\cdot\alpha_5 f_6(x,u). \tag{13}$$

Покладемо в цій рівності по черзі $u := \alpha_3^{-1}(e)$ та $y := \beta_5^{-1}(e)$. В результаті отримаємо

$$f_2(x,y) = \alpha_1^{-1}(\beta_5(y)\cdot\alpha_2(x)), \qquad f_6(x,u) = \alpha_5^{-1}(\alpha_2(x)\cdot\alpha_3(u)) \tag{14}$$

для деякої підстановки $\alpha_2$ множини $Q$.

Таким чином, з отриманих рівностей (11), (12) і (14) випливає, що будь-який розв'язок функційного рівняння (2) має вигляд (8), тобто функційне рівняння (2) інших розв'язків, крім описаних формулами (8), не має.

Теорему 4 доведено.

**Теорема 5.** *Кожне загальне парастрофно нескоротне квадратичне функційне рівняння від чотирьох предметних змінних парастрофно рівносильне або функційному рівнянню медіальності, або функційному рівнянню псевдомедіальності.*

***Доведення.*** Із теореми 3 випливає, що кожне парастрофно нескоротне загальне квадратичне рівняння типу $4 = 4$ від чотирьох предметних змінних парастрофно рівносильне рівнянню медіальності чи псевдомедіальності. Що стосується функційних рівнянь інших типів $(3 = 5, 2 = 6$ та $1 = 7)$, то легко показати, що вони парастрофно рівносильні рівнянню типу $4 = 4$.

Справді, нехай, наприклад, маємо рівняння типу $3 = 5$, тоді слово $\omega$ довжини $5$ є добутком підслів довжин $1$ і $4$ або $2$ і $3$. У першому випадку за допомогою зовнішнього ділення на підслово довжини $1$ приходимо до рівняння типу $4 = 4$. У другому випадку в слові $\omega$ маємо пару підслів довжини $2$. Із леми 3 випливає, що множини цих підслів мають точно одну спільну змінну, наприклад $y$. Дві інші змінні не збігаються і принаймні одна з них, скажімо $x$, зустрічається в $\omega$ точно один раз, тому інша її поява знаходиться в іншій частині рівняння. Поділивши на $y$ через $x$, отримаємо функційне рівняння типу $4 = 4$.

Згідно з теоремою 4 шістка операцій $(\cdot; \odot; \cdot; \cdot; \odot; \cdot)$, де $(\cdot)$ — некомутативна групова операція, а $(\odot)$ — її комутування, є розв'язком рівняння псевдомедіальності. З [10] випливає, що всі компоненти довільного розв'язку рівняння медіальності ізотопні одній і тій самій абелевій групі. Якби функційні рівняння медіальності та псевдомедіальності були парастрофно рівносильними, то це означало б ізотопію групи $(Q; \cdot)$ до деякої абелевої групи. А з теореми Алберта випливала б комутативність групи $(Q; \cdot)$.

Теорему 5 доведено.

**Теорема 6.** *Загальне квадратичне функційне рівняння від чотирьох змінних є парастрофно нескоротним тоді і тільки тоді, коли воно не має самодостатніх дуг.*

***Доведення.*** В одну сторону це є твердження леми 3. Навпаки, нехай $v = \omega$ є загальним квадратичним функційним рівнянням, яке не має квадратів і самодостатніх дуг. Із доведення теореми 5 випливає, що таке рівняння парастрофно рівносильне функційному рівнянню медіальності чи псевдомедіальності. Оскільки ці рівняння задовольняють зазначені умови і дані умови інваріантні при перетвореннях парастрофної еквівалентності, то рівняння $\upsilon = \omega$ також задовольняє умови теореми.

Теорему 6 доведено.

На завершення наведемо нез'ясовані питання та проблеми.

1. Дати повну класифікацію нескоротних квадратичних функційних рівнянь із довільною кількістю предметних змінних.

2. Виділити візуальні властивості для парастрофно нескоротних квадратичних рівнянь, що розрізняють які рівняння парастрофно рівносильні загальній тотожності медіальності, а які — псевдомедіальності.

3. Дати повну класифікацію скоротних квадратичних рівнянь.

4. Знайти застосування отриманих результатів до вивчення тотожностей на квазігрупових алгебрах, тобто алгебрах, сигнатуру яких складають квазігрупові операції.

1. *Белоусов В. Д.* $n$-Арные квазигруппы. – Кишинев: Штиинца, 1972. – 227 с.
2. *Taylor M. A.* A generalization of a theorem of Belousov // Bull. London Math. Soc. – 1978. – **10**, № 3. – P. 285 – 286.
3. *Krapež A.* Strictly quadratic functional equations on quasigroups. I // Publ. Inst. Math. – 1979. – №29 (43). – P. 1 – 17.
4. *Белоусов В. Д.* Квазигруппы с вполне сократимыми уравновешенными тождествами // Исследования по теории бинарных и $n$-арных квазигрупп. – Кишинев: Штиинца, 1985. – С. 11 – 25.
5. *Dupĺák J.* Identities and deleting maps on quasigroups // Math. Inst. Czech. Acad. Sci. – 1988. – **38**, № 1. – P. 1 – 7.
6. *Сохацький Ф. М.* Про ізотопи груп. I // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 10. – С. 1387 – 1398.
7. *Dupĺák J.* A parastrophic equivalence in quasigroups // Quasigroups and Relat. Systems. – 2000. – **7**. – P. 7 – 14.
8. *Белоусов В. Д.* Уравновешенные тождества в квазигруппах // Мат. сб. – 1966. – **70**, № 1. – С. 55 – 97.
9. *Белоусов В. Д.* Одна теорема об уравновешенных тождествах // Квазигруппы и латинские квадраты. Мат. исслед. – 1983. – **71**. – С. 22 – 24.
10. *Белоусов В. Д.* Уравнение общей медиальности // Мат. исслед. – 1976. – Вып. 39. – С. 21 – 31.
11. *Сохацький Ф. М., Коваль Р. Ф.* Класифікація функційних рівнянь від чотирьох змінних // Мат. Третьої міжнародної алгебраїчної конференції в Україні. – Суми, 2001. – С. 254 – 255.
12. *Sokhatsky F., Koval' R.* A classification of general four variable quadratic parastrophically uncancellable functional equations on quasigroups // Tethis 4th Int. Algebr. Conf. in Ukraine (Lviv, August 4 – 9, 2003). – 2003.

Одержано 10.10.2002,
після доопрацювання — 26.04.2004