УДК 517.5

Ю. І. Харкевич, Т. В. Жигалло (Волин. ун-т, Луцьк)

НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ, ЗАДАНИХ НА ДІЙСНІЙ ОСІ, ОПЕРАТОРАМИ, ЩО ПОРОДЖУЮТЬСЯ λ-МЕТОДАМИ ПІДСУМОВУВАННЯ ЇХ ІНТЕГРАЛІВ ФУР'Є

We obtain asymptotic equalities for upper bounds of deviations of operators that are generated by λ-methods (determined by the set $\Lambda = \{\lambda_\sigma(\cdot)\}$ of functions continuous on $[0; \infty)$ and depending on the real parameter σ) on the classes of (ψ, β)-differentiable functions defined on the real axis.

Отримано асимптотичні рівності для верхніх меж відхилень операторів, що породжуються λ-методами (означеними сукупністю $\Lambda = \{\lambda_\sigma(\cdot)\}$ неперервних на $[0; \infty)$ функцій, залежних від дійсного параметра σ) на класах (ψ, β)-диференційовних функцій, заданих на дійсній осі.

1. Деякі допоміжні твердження та постановка задачі. Протягом багатьох років О. І. Степанцем та його послідовниками досліджувались апроксимативні властивості класів $L^\psi_\beta \mathfrak{N}$, $\hat{L}^\psi_\beta \mathfrak{N}$, які визначаються тим, що узагальнені (ψ, β)-похідні цих елементів належать деякій множині $\mathfrak{N}$. Ряд результатів із цих питань викладено в роботах [1 – 9].

Класи $\hat{L}^\psi_\beta \mathfrak{N}$, згідно з [3] (гл. IX), визначаються таким чином. Нехай, як завжди, $L_p, p \geq 1$, — множина 2π-періодичних функцій $\varphi(\cdot)$ із скінченною нормою $\|\varphi\|_p$, де при $p \in [1; \infty)$

$$\|\varphi\|_p = \left(\int_0^{2\pi} |\varphi(t)|^p dt \right)^{1/p}$$

і $\|\varphi\|_\infty = \|\varphi\|_M = \operatorname{ess\,sup} |\varphi(t)|$, так що $L_\infty = M$.

Простори $\hat{L}_p$, $p \geq 1$, вводяться як множини функцій $\varphi(\cdot)$, що задані на всій дійсній осі R (не обов'язково періодичні) і мають скінченну норму $\|\varphi\|_{\hat{p}}$, де

$$\|\varphi\|_{\hat{p}} = \sup_{a \in R} \left(\int_a^{a+2\pi} |\varphi(t)|^p dt \right)^{1/p},$$

якщо $p \in [1, \infty)$ і $\|\varphi\|_{\hat{\infty}} = \operatorname{ess\,sup} |\varphi(t)|$.

Очевидно, що при всіх $p \geq 1$ завжди має місце включення $L_p \subset \hat{L}_p$.

Позначимо через $\mathfrak{M}$ множину опуклих донизу при всіх $\upsilon \geq 1$ функцій $\psi(\upsilon)$, для яких $\lim\limits_{\upsilon \to \infty} \psi(\upsilon) = 0$. Кожну функцію $\psi \in \mathfrak{M}$ продовжимо на проміжок $[0, 1)$ таким чином, щоб отримана функція (яку, як і раніше, будемо позначати через $\psi(\cdot)$) була неперервною при всіх $\upsilon \geq 0$, $\psi(0) = 0$ і її похідна $\psi'(\upsilon) = \psi'(\upsilon + 0)$ мала обмежену варіацію на проміжку $[0, \infty)$. Множину таких функцій позначимо через $\mathfrak{A}$. Підмножину функцій $\psi \in \mathfrak{A}$, для яких

$$\int_1^\infty \frac{\psi(t)}{t} dt < \infty,$$

позначимо через F.

Покладемо

$$\hat{\psi}(t) = \hat{\psi}_\beta(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \psi(v)\cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right)dv,$$

де $\psi \in F$ і β — деяке фіксоване число.

Якщо $\psi \in F$, то для будь-якого $\beta \in R$, як показано в [4], перетворення $\hat{\psi}(t)$ сумовне на всій осі

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(t)| dt < \infty.$$

Через $\hat{L}_\beta^\psi$ позначимо множину функцій $f(x) \in \hat{L}_1$, які майже для всіх $x \in R$ можна подати у вигляді

$$f(x) = A_0 + \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x+t)\hat{\psi}(t)\,dt, \tag{1}$$

де A_0 — деяка стала і $\varphi(\cdot) \in \hat{L}_1$, а інтеграл слід розуміти як границю інтегралів на проміжках, що симетрично розширюються.

Якщо $f(\cdot) \in \hat{L}_\beta^\psi$ і при цьому $\psi \in \mathfrak{N}$, де $\mathfrak{N}$ — деяка підмножина неперервних функцій із $\hat{L}_1$, то вважатимемо, що $f(\cdot) \in \hat{L}_\beta^\psi \mathfrak{N}$. Підмножини неперервних функцій із $\hat{L}_\beta^\psi$ $\left(\hat{L}_\beta^\psi \mathfrak{N}\right)$ позначають через $\hat{C}_\beta^\psi$ $\left(\hat{C}_\beta^\psi \mathfrak{N}\right)$. Коли $\mathfrak{N}$ збігається з множиною функцій $\varphi(\cdot)$, що задовольняють умову $\operatorname{ess\,sup}|\varphi(\cdot)| \le 1$, то клас $\hat{C}_\beta^\psi \mathfrak{N}$ позначають через $\hat{C}_{\beta,\infty}^\psi$. Якщо ж $f \in \hat{L}_\beta^\psi$ і $\left\| f_\beta^\psi \right\|_{\hat{1}} \le 1$, то будемо говорити, що $f \in \hat{L}_{\beta,1}^\psi$.

У роботі [3] (гл. IX) показано, що якщо $\varphi(\cdot)$ — 2π-періодична сумовна функція, то в цьому випадку множини $\hat{L}_\beta^\psi \mathfrak{N}$, $\hat{L}_{\beta,1}^\psi$, $\hat{C}_{\beta,\infty}^\psi$ переходять у класи $L_\beta^\psi \mathfrak{N}$, $L_{\beta,1}^\psi$, $C_{\beta,\infty}^\psi$ відповідно. У періодичному випадку, коли має місце (1), майже скрізь $\varphi(\cdot) = f_\beta^\psi(\cdot)$. У зв'язку з цим будь-яку функцію, еквівалентну до функції $\varphi(\cdot)$ із (1), як і в періодичному випадку (див., наприклад, [1] (гл. I) та [4] (гл. III)), називають (ψ, β)-похідною функції $f(\cdot)$ і позначають $f_\beta^\psi(\cdot)$.

Як відмічено вище, класи $\hat{L}_\beta^\psi \mathfrak{N}$ введено О. І. Степанцем. Він же розглянув задачу про наближення функцій із класів $\hat{L}_\beta^\psi \mathfrak{N}$ за допомогою так званих операторів Фур'є, які в періодичному випадку є сумами Фур'є порядку $[\sigma]$, а в загальному — цілими функціями експоненціального типу $\le \sigma$ (див. [4, 5]). У цих роботах отримано зображення на класах $\hat{L}_\beta^\psi \mathfrak{N}$ для відхилення операторів $U_\sigma(f, x, \lambda)$ — інтегральних аналогів поліноміальних операторів, що породжуються трикутними λ-методами підсумовування рядів Фур'є, за допомогою яких у роботах [6 – 9] розглядалися задачі про наближення функцій із класів $\hat{L}_\beta^\psi \mathfrak{N}$ відповідно операторами Зигмунда, Стеклова, Валле Пуссена та ін.

Метою даної роботи є вивчення відхилень на класах $\hat{L}_{\beta,1}^\psi$ і $\hat{C}_{\beta,\infty}^\psi$ операторів $U_\sigma(f, x, \lambda)$, які породжуються λ-методами (означеними сукупністю $\Lambda = \{\lambda_\sigma(\cdot)\}$ неперервних на $[0, \infty)$ функцій, залежних від дійсного параметра σ) підсумовування інтегралів Фур'є. У періодичному випадку при $\psi(v) = v^{-r}$, $r >$

> 0, найбільш повні результати в цьому напрямку отримано в роботі [10], а для спадних до нуля функцій ψ — в роботі [11].

Нехай $\Lambda = \left\{\lambda_\sigma\left(\frac{v}{\sigma}\right)\right\}$ — сукупність неперервних функцій при всіх $v \geq 0$, залежних від дійсного параметра σ. Тоді кожній функції $f \in \hat{L}_\beta^\psi$ поставимо у відповідність вираз вигляду

$$U_\sigma(\Lambda) = U_\sigma(f, x, \Lambda) = A_0 + \int_{-\infty}^{\infty} f_\beta^\psi(x+t) \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \psi(v) \lambda_\sigma\left(\frac{v}{\sigma}\right) \cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dv\, dt. \tag{2}$$

Далі функції $\psi(v)$ і $\lambda_\sigma\left(\frac{v}{\sigma}\right)$ вважатимемо такими, що перетворення

$$\widehat{\psi\lambda_\sigma} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \psi(v) \lambda_\sigma\left(\frac{v}{\sigma}\right) \cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dv$$

є сумовним на всій числовій осі.

Тоді, враховуючи співвідношення (1) і (2), отримуємо, що для кожної функції $f(\cdot) \in \hat{C}_\beta^\psi$

$$f(x) - U_\sigma(f, x, \Lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\beta^\psi(x+t) \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} r_\sigma\left(\frac{v}{\sigma}\right) \cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dv dt, \tag{3}$$

де при $v \geq 1$

$$r_\sigma\left(\frac{v}{\sigma}\right) = \left(1 - \lambda_\sigma\left(\frac{v}{\sigma}\right)\right) \psi(v), \tag{4}$$

а на проміжку $0 \leq v \leq 1$ функція $r_\sigma\left(\frac{v}{\sigma}\right)$ означена довільним чином так, щоб вона залишалася неперервною при всіх $v \geq 0$, перетворювалася в нуль і її перетворення Фур'є

$$\hat{r}_\sigma(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} r_\sigma\left(\frac{v}{\sigma}\right) \cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dv$$

було сумовним на всій числовій осі.

У даній роботі досліджуються величини

$$\mathcal{E}\left(\hat{C}_{\beta,\infty}^\psi, U_\sigma(\Lambda)\right)_C = \sup_{f \in \hat{C}_{\beta,\infty}^\psi} \| f(x) - U_\sigma(f, x, \Lambda) \|_C, \tag{5}$$

$$\mathcal{E}\left(\hat{L}_{\beta,1}^\psi, U_\sigma(\Lambda)\right)_{\hat{1}} = \sup_{f \in \hat{L}_{\beta,1}^\psi} \| f(x) - U_\sigma(f, x, \Lambda) \|_{\hat{1}}, \tag{6}$$

де $U_\sigma(f, x, \Lambda)$ — оператори, означені за допомогою співвідношення (2).

Наведемо спочатку деякі допоміжні означення і твердження, які нам будуть потрібні в подальшому.

Означення [10]. *Нехай функція $\tau(v)$ задана на $[0, \infty)$, абсолютно неперервна і $\tau(\infty) = 0$. Говорять, що функція $\tau(v) \in \mathcal{E}_a$, якщо похідну $\tau'(v)$ в тих точках, де вона не існує, можна доозначити так, щоб для деякого $a \geq 0$ існували інтеграли*

$$\int_0^{a/2} v\left|d\tau'(v)\right|, \qquad \int_{a/2}^{\infty} |v-a|\left|d\tau'(v)\right|.$$

Далі домовимося через K, K_i позначати сталі, взагалі кажучи, не одні і ті ж у різних співвідношеннях.

Лема 1′ [10]. *Якщо* $\tau(v) \in \mathscr{E}_a$, *то*

$$|\tau(v)| \le |\tau(0)| + |\tau(a)| + \int_0^{a/2} v\left|d\tau'(v)\right| + \int_{a/2}^{\infty} |v-a|\left|d\tau'(v)\right| =: H(\tau). \tag{7}$$

Теорема 1′ [10]. *Нехай* $\tau(v) \in \mathscr{E}_a$ *і* $\sin\dfrac{\beta\pi}{2}\tau(0) = 0$. *Тоді для збіжності інтеграла*

$$A(\tau) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left|\int_0^{\infty}\tau(v)\cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right)dv\right|dt \tag{8}$$

необхідно і достатньо, щоб збігалися інтеграли

$$\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\int_0^{\infty}\frac{|\tau(v)|}{v}\,dv, \qquad \int_0^{a}\frac{|\tau(a-v)-\tau(a+v)|}{v}\,dv.$$

При цьому справедливою є оцінка

$$\left|A(\tau) - \frac{4}{\pi^2}\int_0^{\infty}\xi\left(\sin\frac{\beta\pi}{2}\tau(v),\ j_v[\tau(a-v)-\tau(a+v)]\right)\frac{dv}{v}\right| \le KH(\tau), \tag{9}$$

де $\xi(A, B)$ — *функція, введена в роботі* [12] *таким чином:*

$$\xi(A,B) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}|A|, & |B| \le |A|, \\[2mm] |A|\arcsin\left|\dfrac{A}{B}\right| + \sqrt{B^2 - A^2}, & |B| > |A|, \end{cases} \tag{10}$$

$$j_v = \begin{cases} 1, & 0 < v < a, \\ 0, & v \ge a. \end{cases} \tag{11}$$

Нехай $\psi \in \mathfrak{M}$. Згідно з [2, с. 159, 160], покладемо

$$\eta(t) := \psi^{-1}\left(\frac{\psi(t)}{2}\right), \qquad \mu(t) := \frac{t}{\eta(t) - t},$$

$$\mathfrak{M}_0 = \{\psi \in \mathfrak{M}\colon 0 < \mu(\psi, t) \le K \quad \forall\, t \ge 1\},$$

$$\mathfrak{M}_c = \{\psi \in \mathfrak{M}\colon 0 < K_1 < \mu(\psi, t) \le K_2 \quad \forall\, t \ge 1\}.$$

Якщо $\psi \in \mathfrak{A}$ і при цьому на проміжку $t \ge 1$ $\psi \in \mathfrak{M}_0$, або $\psi \in \mathfrak{M}_C$, то будемо записувати, згідно з [4, с. 112], що $\psi \in \mathfrak{A}_0$, або $\psi \in \mathfrak{A}_C$ відповідно.

Теорема 2′ [2, с. 161]. *Функція* $\psi \in \mathfrak{M}$ *належить до* $\mathfrak{M}_0$ *тоді і лише тоді, коли величина*

$$\alpha(t) = \frac{\psi(t)}{t\left|\psi'(t)\right|}, \qquad \psi'(t) := \psi'(t+0),$$

задовольняє умову

$$\alpha(t) \ge K > 0 \quad \forall\, t \ge 1.$$

Теорема 3′ [2, с. 175]. *Для того щоб функція* $\psi \in \mathfrak{M}$ *належала до* $\mathfrak{M}_0$, *необхідно і достатньо, щоб існувала стала* K *така, щоб при всіх* $t \geq 1$ *виконувалась нерівність*

$$\frac{\psi(t)}{\psi(ct)} \leq K,$$

де c *— довільна стала, що задовольняє умову* $c > 1$.

2. Асимптотичні формули для величин $\mathscr{E}\left(\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}, U_\sigma(\Lambda)\right)_C$**.** Для зручності подальшого викладу, виконавши заміну змінних, перепишемо співвідношення (3) і (4) таким чином:

$$f(x) - U_\sigma(f, x, \Lambda) = \psi(\sigma) \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{\psi}_{\beta}\left(x + \frac{t}{\sigma}\right) \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\infty} \tau_\sigma(v) \cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dv dt, \quad (12)$$

$$\tau(v) = \tau_\sigma(v) = \left(1 - \lambda_\sigma(v)\right) \frac{\psi(\sigma v)}{\psi(\sigma)}, \quad v \geq \frac{1}{\sigma}, \quad (13)$$

де, як і раніше, на проміжку $\left[0, \frac{1}{\sigma}\right]$ функція $\tau_\sigma(v)$ визначена довільним чином, аби вона залишалася неперервною при всіх $v \geq 0$, перетворювалася в нуль у початку координат і її перетворення Фур'є

$$\hat{\tau}(t) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\infty} \tau(v) \cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dv \quad (14)$$

було сумовним на всій числовій осі.

Тоді справедливою є така теорема.

Теорема 1. *Нехай*: 1) $\psi(v) \in F \cap \mathfrak{A}_0$; 2) $\tau(v) \in \mathscr{E}_a$; 3) $\sin\frac{\beta\pi}{2}\tau(0) = 0$; 4) *збігаються інтеграли*

$$\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right| \int\limits_0^{\infty} \frac{|\tau_\sigma(v)|}{v} dv, \qquad \int\limits_0^{a} \frac{|\lambda_\sigma(a-v) - \lambda_\sigma(a+v)|}{v} dv. \quad (15)$$

Тоді для функції

$$\tau(v) = \tau_\sigma(v) = \begin{cases} \left(1 - \lambda_\sigma(v)\right) \dfrac{\psi(1)}{\psi(\sigma)}, & 0 \leq v \leq \dfrac{1}{\sigma}, \\ \left(1 - \lambda_\sigma(v)\right) \dfrac{\psi(\sigma v)}{\psi(\sigma)}, & v \geq \dfrac{1}{\sigma}, \end{cases} \quad (16)$$

має місце співвідношення

$$\mathscr{E}\left(\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}, U_\sigma(\Lambda)\right)_C = \frac{4}{\pi^2} \psi(\sigma) \int\limits_0^{\infty} \xi\left(\sin\frac{\beta\pi}{2}\tau_\sigma(v),\ j_v[\tau_\sigma(a-v) - \tau_\sigma(a+v)]\right) \frac{dv}{v} +$$

$$+ O\left(\psi(\sigma) H(\tau_\sigma)\right), \quad \sigma \to \infty, \quad (17)$$

де $H(\tau_\sigma)$, $\xi(A, B)$, j_v *визначено відповідно за допомогою співвідношень* (7), (10) *і* (11).

Доведення. За допомогою сформульованої вище теореми 1′ покажемо, що інтеграл $A(\tau_\sigma)$ збігається і тому, згідно з лемою 1 роботи В. І. Рукасова [8], при $\sigma \to \infty$ має місце співвідношення

$$\mathscr{E}\left(\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}, U_\sigma(\Lambda)\right)_C = \psi(\sigma) A(\tau_\sigma). \quad (18)$$

Однією з умов виконання теореми 1′ є збіжність інтеграла

$$\int_0^a \frac{\left|\tau_\sigma(a-v)-\tau_\sigma(a+v)\right|}{v}\,dv, \tag{19}$$

а в умовах даної теореми міститься вимога збіжності інтеграла

$$\int_0^a \frac{\left|\lambda_\sigma(a-v)-\lambda_\sigma(a+v)\right|}{v}\,dv. \tag{20}$$

Покажемо, що якщо $\psi\in\mathfrak{M}_0$, то

$$\int_0^a \frac{\left|\tau_\sigma(a-v)-\tau_\sigma(a+v)\right|}{v}\,dv = \frac{\psi(\sigma a)}{\psi(\sigma)}\int_0^a \frac{\left|\lambda_\sigma(a-v)-\lambda_\sigma(a+v)\right|}{v}\,dv + H(\tau_\sigma)O(1), \tag{21}$$

де $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена по σ, і тому із збіжності інтеграла (20) випливає збіжність інтеграла (19).

Із співвідношення (16) знаходимо

$$\tau_\sigma(a-v) = \begin{cases} \left(1-\lambda_\sigma(a-v)\right)\dfrac{\psi(1)}{\psi(\sigma)}, & a-\dfrac{1}{\sigma}\le v\le a, \\ \left(1-\lambda_\sigma(a-v)\right)\dfrac{\psi(\sigma(a-v))}{\psi(\sigma)}, & v\le a-\dfrac{1}{\sigma}, \end{cases} \tag{22}$$

$$\tau_\sigma(a+v) = \begin{cases} \left(1-\lambda_\sigma(a+v)\right)\dfrac{\psi(1)}{\psi(\sigma)}, & -a\le v\le \dfrac{1}{\sigma}-a, \\ \left(1-\lambda_\sigma(a+v)\right)\dfrac{\psi(\sigma(a+v))}{\psi(\sigma)}, & v\ge \dfrac{1}{\sigma}-a. \end{cases} \tag{23}$$

Розглянемо спочатку випадок, коли $a>\dfrac{1}{\sigma}$, і подамо (19) у вигляді суми двох інтегралів:

$$\int_0^a \frac{\left|\tau_\sigma(a-v)-\tau_\sigma(a+v)\right|}{v}\,dv =$$

$$= \int_0^{a-\frac{1}{\sigma}} \frac{\left|\tau_\sigma(a-v)-\tau_\sigma(a+v)\right|}{v}\,dv + \int_{a-\frac{1}{\sigma}}^{a} \frac{\left|\tau_\sigma(a-v)-\tau_\sigma(a+v)\right|}{v}\,dv. \tag{24}$$

Оцінимо спочатку перший доданок у правій частині (24). Для цього додамо і віднімемо під знаком модуля в підінтегральній функції величину

$$\frac{\psi(\sigma a)}{\psi(\sigma)}\left(\lambda_\sigma(a-v)-\lambda_\sigma(a+v)\right).$$

Отримаємо

$$\int_0^{a-\frac{1}{\sigma}} \frac{\left|\tau_\sigma(a-v)-\tau_\sigma(a+v)\right|}{v}\,dv = \frac{\psi(\sigma a)}{\psi(\sigma)}\int_0^{a-\frac{1}{\sigma}} \frac{\left|\lambda_\sigma(a-v)-\lambda_\sigma(a+v)\right|}{v}\,dv +$$

$$+ O\left(\int_0^{a-\frac{1}{\sigma}} \frac{\left|\tau_\sigma(a-v)-\tau_\sigma(a+v)+\dfrac{\psi(\sigma a)}{\psi(\sigma)}\left(\lambda_\sigma(a-v)-\lambda_\sigma(a+v)\right)\right|}{v}\,dv\right). \tag{25}$$

Оскільки мають місце співвідношення (22) і (23), то при $v \in \left[0, a - \frac{1}{\sigma}\right]$

$$\lambda_\sigma(a-v) = 1 - \frac{\psi(\sigma)}{\psi(\sigma(a-v))}\tau_\sigma(a-v)$$

і

$$\lambda_\sigma(a+v) = 1 - \frac{\psi(\sigma)}{\psi(\sigma(a+v))}\tau_\sigma(a+v).$$

Тоді

$$\int_0^{a-\frac{1}{\sigma}} \frac{\left|\tau_\sigma(a-v) - \tau_\sigma(a+v) + \frac{\psi(\sigma a)}{\psi(\sigma)}(\lambda_\sigma(a-v) - \lambda_\sigma(a+v))\right|}{v}\,dv \le$$

$$\le \int_0^{a-\frac{1}{\sigma}} |\tau_\sigma(a-v)|\left|1 - \frac{\psi(\sigma a)}{\psi(\sigma(a-v))}\right|\frac{dv}{v} + \int_0^{a-\frac{1}{\sigma}} |\tau_\sigma(a+v)|\left|1 - \frac{\psi(\sigma a)}{\psi(\sigma(a+v))}\right|\frac{dv}{v}. \quad (26)$$

Оскільки $\tau_\sigma(v) \in \mathscr{E}_a$, то згідно з лемою 1′ отримуємо

$$\int_0^{a-\frac{1}{\sigma}} |\tau_\sigma(a-v)|\left|1 - \frac{\psi(\sigma a)}{\psi(\sigma(a-v))}\right|\frac{dv}{v} + \int_0^{a-\frac{1}{\sigma}} |\tau_\sigma(a+v)|\left|1 - \frac{\psi(\sigma a)}{\psi(\sigma(a+v))}\right|\frac{dv}{v} =$$

$$= H(\tau_\sigma)\,O\left(\int_0^{a-\frac{1}{\sigma}} \frac{|\psi(\sigma(a-v)) - \psi(\sigma a)|}{v\psi(\sigma(a-v))}\,dv + \int_0^{a-\frac{1}{\sigma}} \frac{|\psi(\sigma(a+v)) - \psi(\sigma a)|}{v\psi(\sigma(a+v))}\,dv\right). \quad (27)$$

Покажемо, що при $\sigma \to \infty$

$$I_{1,\sigma} := \int_0^{a-\frac{1}{\sigma}} \frac{|\psi(\sigma(a-v)) - \psi(\sigma a)|}{v\psi(\sigma(a-v))}\,dv = O(1), \quad (28)$$

$$I_{2,\sigma} := \int_0^{a-\frac{1}{\sigma}} \frac{|\psi(\sigma(a+v)) - \psi(\sigma a)|}{v\psi(\sigma(a+v))}\,dv = O(1), \quad (29)$$

де $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена по σ. Дійсно, функція $\frac{1 - \psi(\sigma a)/\psi(\sigma(a-v))}{v}$ обмежена при всіх $v \in \left[\delta, a - \frac{1}{\sigma}\right]$, $0 < \delta < a - \frac{1}{\sigma}$ і, крім того, з урахуванням теореми 2′,

$$\lim_{v\to 0} \frac{1 - \psi(\sigma a)/\psi(\sigma(a-v))}{v} = \frac{\sigma|\psi'(\sigma a)|}{\psi(\sigma a)} \le K.$$

Отже, $I_{1,\sigma} = O(1)$, $\sigma \to \infty$.

Переходячи до оцінки інтеграла $I_{2,\sigma}$, відмітимо, що

$$I_{2,\sigma} < \frac{1}{\psi(2a\sigma - 1)} \int_0^{a-\frac{1}{\sigma}} \frac{\psi(a\sigma) - \psi(\sigma(a+v))}{v}\,dv.$$

Після заміни змінної $u = \sigma(a+v)$ отримаємо

$$I_{2,\sigma} < \frac{1}{\psi(2a\sigma-1)} \int_{a\sigma}^{2a\sigma-1} \frac{\psi(a\sigma)-\psi(u)}{u-a\sigma}\,du < \frac{1}{\psi(2a\sigma-1)} \int_{a\sigma}^{2a\sigma} \frac{\psi(a\sigma)-\psi(u)}{u-a\sigma}\,du.$$

Застосовуючи до правої частини останньої нерівності лему 1.5 з роботи [13] та теорему 3′, одержуємо

$$I_{2,\sigma} < \frac{K_1\psi(a\sigma)}{\psi(2a\sigma-1)} \le \frac{K_2\psi(a\sigma)}{\psi(2a\sigma)} \le K_3.$$

Отже, рівності (28) та (29) виконуються.

Поєднуючи співвідношення (25) – (29), отримуємо

$$\int_0^{a-\frac{1}{\sigma}} \frac{\left|\tau_\sigma(a-v)-\tau_\sigma(a+v)\right|}{v}\,dv =$$

$$= \frac{\psi(\sigma a)}{\psi(\sigma)} \int_0^{a-\frac{1}{\sigma}} \frac{\left|\lambda_\sigma(a-v)-\lambda_\sigma(a+v)\right|}{v}\,dv + H(\tau_\sigma)O(1). \tag{30}$$

Оцінимо другий доданок у правій частині рівності (24). Очевидно, що

$$\int_{a-\frac{1}{\sigma}}^{a} \frac{\left|\tau_\sigma(a-v)-\tau_\sigma(a+v)\right|}{v}\,dv = \frac{\psi(\sigma a)}{\psi(\sigma)} \int_{a-\frac{1}{\sigma}}^{a} \frac{\left|\lambda_\sigma(a-v)-\lambda_\sigma(a+v)\right|}{v}\,dv +$$

$$+ O\left(\int_{a-\frac{1}{\sigma}}^{a} \frac{\left|\tau_\sigma(a-v)-\tau_\sigma(a+v)+\frac{\psi(\sigma a)}{\psi(\sigma)}\left(\lambda_\sigma(a-v)-\lambda_\sigma(a+v)\right)\right|}{v}\,dv \right). \tag{31}$$

Із співвідношень (22) і (23) при $v \in \left[a-\frac{1}{\sigma}, a\right]$ маємо

$$\lambda_\sigma(a-v) = 1 - \frac{\psi(\sigma)}{\psi(1)}\tau_\sigma(a-v) \tag{32}$$

і

$$\lambda_\sigma(a+v) = 1 - \frac{\psi(\sigma)}{\psi(\sigma(a+v))}\tau_\sigma(a+v).$$

Звідси на підставі леми 1′ отримуємо

$$\int_{a-\frac{1}{\sigma}}^{a} \frac{\left|\tau_\sigma(a-v)-\tau_\sigma(a+v)+\frac{\psi(\sigma a)}{\psi(\sigma)}\left(\lambda_\sigma(a-v)-\lambda_\sigma(a+v)\right)\right|}{v}\,dv =$$

$$= \int_{a-\frac{1}{\sigma}}^{a} \frac{\left|\tau_\sigma(a-v)\left(1-\frac{\psi(\sigma a)}{\psi(1)}\right)-\tau_\sigma(a+v)\left(1-\frac{\psi(\sigma a)}{\psi(\sigma(a+v))}\right)\right|}{v}\,dv =$$

$$= H(\tau_\sigma) O\left(\int\limits_{a-\frac{1}{\sigma}}^{a} \frac{|\psi(1)-\psi(\sigma a)|}{v\psi(1)} dv + \int\limits_{a-\frac{1}{\sigma}}^{a} \frac{|\psi(\sigma(a+v))-\psi(\sigma a)|}{v\psi(\sigma(a+v))} dv \right). \quad (33)$$

Оцінимо праву частину рівності (33):

$$\int\limits_{a-\frac{1}{\sigma}}^{a} \frac{|\psi(1)-\psi(\sigma a)|}{v\psi(1)} dv = \left(1-\frac{\psi(\sigma a)}{\psi(1)}\right) \ln \frac{a}{a-\frac{1}{\sigma}} = O(1). \quad (34)$$

Міркуючи, як і при встановленні співвідношення (29), одержуємо

$$\int\limits_{a-\frac{1}{\sigma}}^{a} \frac{|\psi(\sigma(a+v))-\psi(\sigma a)|}{v\psi(\sigma(a+v))} dv \le \frac{1}{\psi(2a\sigma)} \int\limits_{2a\sigma-1}^{2a\sigma} \frac{|\psi(u)-\psi(\sigma a)|}{u-a\sigma} du \le$$

$$\le \frac{1}{\psi(2a\sigma)} \int\limits_{a\sigma}^{2a\sigma} \frac{|\psi(u)-\psi(\sigma a)|}{u-a\sigma} du \le \frac{\psi(a\sigma)}{\psi(2a\sigma)} = O(1). \quad (35)$$

На підставі співвідношень (31) – (35) маємо

$$\int\limits_{a-\frac{1}{\sigma}}^{a} \frac{|\tau_\sigma(a-v)-\tau_\sigma(a+v)|}{v} dv =$$

$$= \frac{\psi(\sigma a)}{\psi(\sigma)} \int\limits_{a-\frac{1}{\sigma}}^{a} \frac{|\lambda_\sigma(a-v)-\lambda_\sigma(a+v)|}{v} dv + H(\tau_\sigma) O(1). \quad (36)$$

Поєднуючи співвідношення (36) і (30), приходимо до рівності (21).

Міркуючи, як і при доведенні співвідношення (21), при $a > \frac{1}{\sigma}$ можна показати, що рівність (21) виконується і у випадку $\frac{1}{2\sigma} < a \le \frac{1}{\sigma}$.

Якщо $0 < a \le \frac{1}{2\sigma}$, то має місце (32) і

$$\lambda_\sigma(a+v) = 1 - \frac{\psi(\sigma)}{\psi(1)} \tau_\sigma(a+v).$$

Тоді

$$\int\limits_0^a \frac{|\tau_\sigma(a-v)-\tau_\sigma(a+v)|}{v} dv = \frac{\psi(1)}{\psi(\sigma)} \int\limits_0^a \frac{|\lambda_\sigma(a-v)-\lambda_\sigma(a+v)|}{v} dv.$$

Отже, із збіжності інтеграла (20) випливає збіжність інтеграла (19). Таким чином, при $a \ge 0$ всі умови теореми 1′ виконуються. Тоді, підставляючи в рівність (18) співвідношення (9), одержуємо (17).

Теорему 1 доведено.

Відмітимо, що в періодичному випадку, коли $\psi(v) = v^{-r}$, $r > 0$, аналогічну теорему доведено в роботі [10], а для класів $C^{\psi}_{\beta,\infty}$, коли $\psi \in \mathfrak{M}_C$, — в роботі [11].

***Наслідок* 1.** *Нехай виконуються умови теореми* 1. *Тоді якщо*

$$|\tau_\sigma(a-v)-\tau_\sigma(a+v)| \le \left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right| |\tau_\sigma(v)|, \qquad v \in [0, a], \quad a > 0, \quad (37)$$

то

$$\mathscr{E}_\sigma\left(\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}, U_\sigma(\Lambda)\right)_C = \frac{2}{\pi}\psi(\sigma)\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\int_0^\infty \frac{|\tau_\sigma(v)|}{v}\,dv +$$

$$+ O\left(\psi(\sigma)\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\int_0^{\frac{2}{\sigma\pi}} \frac{|\tau_\sigma(v)|}{v}\,dv\right) + O\left(\psi(a\sigma)\int_0^a \frac{|\lambda_\sigma(a-v)-\lambda_\sigma(a+v)|}{v}\,dv\right) +$$

$$+ O\big(\psi(\sigma)H(\tau_\sigma)\big), \quad \sigma\to\infty. \tag{38}$$

Якщо ж

$$\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right||\tau_\sigma(v)| < |\tau_\sigma(a-v)-\tau_\sigma(a+v)|, \qquad v\in[0,a], \quad a>0, \tag{39}$$

то

$$\mathscr{E}_\sigma\left(\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}, U_\sigma(\Lambda)\right)_C = \frac{4}{\pi^2}\psi(a\sigma)\int_0^a \frac{|\lambda_\sigma(a-v)-\lambda_\sigma(a+v)|}{v}\,dv +$$

$$+ O\left(\psi(a\sigma)\int_0^{\frac{2}{\sigma\pi}} \frac{j_v|\lambda_\sigma(a-v)-\lambda_\sigma(a+v)|}{v}\,dv\right) + O\left(\psi(\sigma)\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\int_0^\infty \frac{|\tau_\sigma(v)|}{v}\,dv\right) +$$

$$+ O\big(\psi(\sigma)H(\tau_\sigma)\big), \quad \sigma\to\infty. \tag{40}$$

Доведення. Формула (38) безпосередньо випливає з рівності (17) і означення функції $\xi(A, B)$. Для доведення співвідношення (40) відмітимо, що згідно з (39) і (10) виконуються рівності

$$\int_0^\infty \xi\left(\sin\frac{\beta\pi}{2}\tau_\sigma(v),\ j_v[\tau_\sigma(a-v)-\tau_\sigma(a+v)]\right)\frac{dv}{v} =$$

$$= \int_0^a\left(\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right||\tau_\sigma(v)|\arcsin\frac{\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right||\tau_\sigma(v)|}{|\tau_\sigma(a-v)-\tau_\sigma(a+v)|} +\right.$$

$$\left. + \sqrt{(\tau_\sigma(a-v)-\tau_\sigma(a+v))^2 - \left(\sin\frac{\beta\pi}{2}\tau_\sigma(v)\right)^2}\right)\frac{dv}{v} =$$

$$= \int_0^a \left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right||\tau_\sigma(v)|\left(1-\frac{\left(\sin\frac{\beta\pi}{2}\tau_\sigma(v)\right)^2}{(\tau_\sigma(a-v)-\tau_\sigma(a+v))^2}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{dv}{v} +$$

$$+ O\left(\sin\frac{\beta\pi}{2}\int_0^\infty \frac{|\tau_\sigma(v)|}{v}\,dv\right), \quad \sigma\to\infty. \tag{41}$$

Оскільки має місце співвідношення (39), то $\dfrac{\left(\sin\frac{\beta\pi}{2}\tau_\sigma(v)\right)^2}{(\tau_\sigma(a-v)-\tau_\sigma(a+v))^2}\in[0,1]$, якщо $v\in[0,a]$. Тому, використовуючи розклад у степеневий ряд функції $\sqrt{1-v}$, $v\in[0,1]$, із співвідношення (41) отримуємо

$$\int_0^\infty \xi\left(\sin\frac{\beta\pi}{2}\tau_\sigma(v),\ j_v[\tau_\sigma(a-v)-\tau_\sigma(a+v)]\right)\frac{dv}{v} =$$

$$= \int_0^a \left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right| |\tau_\sigma(v)| \frac{dv}{v} + O\left(\sin\frac{\beta\pi}{2}\int_0^\infty \frac{|\tau_\sigma(v)|}{v}dv\right), \quad \sigma\to\infty. \tag{42}$$

Підставляючи (42) в (17), з урахуванням (21) одержуємо (40).

Наслідок 1 доведено.

Наслідок 2. *Нехай* $\Lambda = \{\lambda_{n,k}\}$, $n, k = 1, 2, \ldots, \lambda_{n,0} = 1$ *для всіх* n, *— прямокутна числова матриця, з допомогою якої кожній функції* $f \in \hat{C}^\psi_\beta \mathfrak{N}$ *поставимо у відповідність ряд* (2). *Нехай матриця* Λ *така, що ряд* (2) *є рядом Фур'є деякої неперервної функції, яку позначимо через* $\overline{U}_n(f, x, \Lambda)$. *Будемо вважати, що матриця* Λ *визначається послідовністю функцій* $\lambda_n(u)$, $0 \le u < < \infty$, *таких, що* $\lambda_{n,k} = \lambda_n\left(\frac{k}{n}\right)$, $\lambda_{n,0} = 1$ *для всіх* n.

Асимптотичні рівності для величин

$$\mathcal{E}\left(\hat{C}^\psi_{\beta,\infty}, \overline{U}_n(\Lambda)\right)_C = \sup_{f\in\hat{C}^\psi_{\beta,\infty}} \left\| f(x) - \overline{U}_n(f, x, \Lambda)\right\|_C$$

можна отримати, поклавши $\sigma = n$, $n \in N$, *у співвідношеннях* (17), (38) *та* (40) *за умови, що виконуються всі умови теореми* 1. *Одержимо*

$$\mathcal{E}\left(\hat{C}^\psi_{\beta,\infty}, \overline{U}_n(\Lambda)\right)_C = \frac{4}{\pi^2}\psi(n)\int_0^\infty \xi\left(\sin\frac{\beta\pi}{2}\tau_n(v),\ j_u[\tau_n(a-v)-\tau_n(a+v)]\right)\frac{dv}{v} +$$

$$+ O(\psi(\sigma)H(\tau_n)), \quad \sigma\to\infty,$$

де функції $\tau_n(v)$, $n = 1, 2, \ldots$, *означено рівностями*

$$\tau_n(v) = \begin{cases} (1-\lambda_\sigma(v))\dfrac{\psi(1)}{\psi(n)}, & 0 \le v \le \dfrac{1}{n}, \\[2ex] (1-\lambda_\sigma(v))\dfrac{\psi(nv)}{\psi(n)}, & v \ge \dfrac{1}{n}. \end{cases}$$

Якщо

$$|\tau_n(a-v) - \tau_n(a+v)| \le \left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right| |\tau_n(v)|, \quad v\in[0,a], \quad a>0,$$

то

$$\mathcal{E}\left(\hat{C}^\psi_{\beta,\infty}, \overline{U}_n(\Lambda)\right)_C = \frac{2}{\pi}\psi(n)\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\int_0^\infty \frac{|\tau_n(v)|}{v}dv + O\left(\psi(n)\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\int_0^{\frac{2}{n\pi}}\frac{|\tau_n(v)|}{v}dv\right) +$$

$$+ O\left(\psi(an)\int_0^a \frac{|\lambda_n(a-v)-\lambda_n(a+v)|}{v}dv\right) + O(\psi(n)H(\tau_n)), \quad \sigma\to\infty.$$

Якщо ж

$$\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right| |\tau_n(v)| < |\tau_n(a-v)-\tau_n(a+v)|, \quad v\in[0,a], \quad a>0,$$

то

$$\mathscr{E}\left(\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}, \overline{U}_n(\Lambda)\right)_C = \frac{4}{\pi^2}\psi(an)\int\limits_0^a \frac{|\lambda_n(a-v)-\lambda_n(a+v)|}{v}\,dv +$$

$$+ O\left(\psi(an)\int\limits_0^{\frac{2}{n\pi}} \frac{j_v|\lambda_n(a-v)-\lambda_n(a+v)|}{v}\,dv\right) +$$

$$+ O\left(\psi(n)\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\int\limits_0^{\infty}\frac{|\tau_n(v)|}{v}\,dv\right) + O(\psi(n)H(\tau_n)), \quad n\to\infty.$$

3. Асимптотичні формули для величин $\mathscr{E}\left(\hat{L}^{\psi}_{\beta,\infty}, U_\sigma(\Lambda)\right)_{\hat{1}}$. У цьому пункті вивчається поведінка верхніх меж (6).

Наведемо деякі визначення і допоміжні результати.

Нехай $f\in\hat{L}^{\psi}_{\beta}$, $\psi\in F$, функція $\tau_\sigma(v)$ задається співвідношенням (13) і така, що її перетворення Фур'є $\hat{\tau}(t)=\hat{\tau}_\sigma(t)$ (14) є сумовним на R. Тоді майже в кожній точці $x\in R$

$$f(x) - U_\sigma(f,x,\Lambda) = \psi(\sigma)\int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{\psi}_{\beta}\left(x+\frac{t}{\sigma}\right)\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\tau_\sigma(v)\cos\left(vt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dv\,dt. \qquad (43)$$

Відмітимо, що можна вибрати функцію $\tau_\sigma(v)$ так, щоб вона була неперервною при $v\ge 0$ та її перетворення Фур'є $\hat{\tau}_\sigma(t)$ було сумовним на R. Використовуючи співвідношення (43), отримуємо наступні твердження.

Лема. *Нехай $\psi\in F$, функція $\tau_\sigma(v)$ неперервна при всіх $v\ge 0$ і задана за допомогою співвідношення* (13), *а інтеграл* (8) *збігається. Тоді при $\sigma\to\infty$ має місце співвідношення*

$$\mathscr{E}\left(\hat{L}^{\psi}_{\beta,1}; U_\sigma(\Lambda)\right)_{\hat{1}} = \sup_{f\in\hat{L}^{\psi}_{\beta,1}}\|f(x)-U_\sigma(f,x,\Lambda)\|_{\hat{1}} = \psi(\sigma)A(\tau_\sigma) + \psi(\sigma)\gamma(\sigma), \qquad (44)$$

де $\gamma(\sigma)\le 0$ *і*

$$|\gamma(\sigma)| = O\left(\int\limits_{|t|\ge\frac{\sigma\pi}{2}}\left|\int\limits_0^{\infty}\tau_\sigma(v)\cos\left(vt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dv\right|dt\right). \qquad (45)$$

Доведення. Враховуючи, що

$$\left\|\int\limits_{-\infty}^{\infty} f\left(x+\frac{t}{\sigma}\right)\hat{\tau}_\sigma(t)\,dt\right\|_{\hat{1}} = \sup_{a\in R}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} f\left(x+a+\frac{t}{\sigma}\right)\hat{\tau}_\sigma(t)\,dt\right|dx \le$$

$$\le \|f\|_{\hat{1}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\hat{\tau}_\sigma(t)|\,dt,$$

згідно з рівностями (6) та (43) отримуємо

$$\mathscr{E}\left(\hat{L}^{\psi}_{\beta,1}, U_\sigma(\Lambda)\right)_{\hat{1}} = \sup_{f\in\hat{L}^{\psi}_{\beta,1}}\|f(x)-U_\sigma(f,x,\Lambda)\|_{\hat{1}} \le$$

$$\le \psi(\sigma)\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\hat{\tau}_\sigma(t)|\,dt = \psi(\sigma)A(\tau_\sigma). \qquad (46)$$

З іншого боку, згідно з твердженням 1.1 із [3, с. 169], $\hat{L}^{\psi}_{\beta} L^{0}_{(0,2\pi)} = L^{\psi}_{\beta}$, де $L^{0}_{(0,2\pi)}$ — множина 2π-періодичних функцій із середнім значенням на $(0, 2\pi)$, рівним нулю. Отже, $\hat{L}^{\psi}_{\beta,1} \supset L^{\psi}_{\beta,1}$. Тому

$$\sup_{f \in \hat{L}^{\psi}_{\beta,1}} \left\| \int_{-\infty}^{\infty} f\left(x + \frac{t}{\sigma}\right) \hat{\tau}_{\sigma}(t)\, dt \right\|_{\hat{1}} \geq \sup_{f \in L^{\psi}_{\beta,1}} \left\| \int_{-\infty}^{\infty} f\left(x + \frac{t}{\sigma}\right) \hat{\tau}_{\sigma}(t)\, dt \right\|_{1}. \tag{47}$$

Крім того, в роботі [11, с. 41] показано, що

$$\sup_{f \in L^{\psi}_{\beta,1}} \psi(\sigma) \left\| \int_{-\infty}^{\infty} f\left(x + \frac{t}{\sigma}\right) \hat{\tau}_{\sigma}(t)\, dt \right\|_{1} = \psi(\sigma) A(\tau) + \psi(\sigma)\gamma(\sigma), \tag{48}$$

де $\gamma(\sigma) \leq 0$ і має місце (45).

Із співвідношень (46) – (48) випливає (44).

Лему доведено.

У періодичному випадку для класів $L^{\psi}_{\beta,1}$ аналогічну лему доведено в роботі [11].

Співставляючи лему 1 з роботи [8] і доведену лему, бачимо, що величини $\mathscr{E}\left(\hat{L}^{\psi}_{\beta,1}, U_{\sigma}(\Lambda)\right)_{\hat{1}}$ і $\mathscr{E}\left(\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}, U_{\sigma}(\Lambda)\right)_{C}$ можуть відрізнятися одна від одної лише на величину, яка не перевищує за порядком $\gamma(\sigma)$, тобто при $\sigma \to \infty$ має місце співвідношення

$$\mathscr{E}\left(\hat{L}^{\psi}_{\beta,1}, U_{\sigma}(\Lambda)\right)_{\hat{1}} = \mathscr{E}\left(\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}, U_{\sigma}(\Lambda)\right)_{C} + O(\gamma(\sigma)).$$

Тепер, використавши останню рівність, можна довести аналог теореми 1 для функцій класів $\hat{L}^{\psi}_{\beta,1}$.

Теорема 2. *Нехай:* 1) $\psi(v) \in F \cap \mathfrak{A}_0$; 2) $\tau_{\sigma}(v) \in \mathscr{E}_{\dot{u}}$; 3) $\sin \frac{\beta\pi}{2} \tau_{\sigma}(0) = 0$; 4) *збігаються інтеграли* (15). *Тоді для функції* $\tau(v) = \tau_{\sigma}(v)$, *яка означена рівністю* (16), *справджується асимптотична рівність*

$$\mathscr{E}\left(\hat{L}^{\psi}_{\beta,1}, U_{\sigma}(\Lambda)\right)_{\hat{1}} = \frac{4}{\pi^2} \psi(\sigma) \int_0^{\infty} \xi\left(\sin \frac{\beta\pi}{2} \tau_{\sigma}(v),\ j_v[\tau_{\sigma}(a - v) - \tau_{\sigma}(a + v)]\right) \frac{dv}{v} +$$

$$+ O\left(\psi(\sigma) \int_0^{\frac{2}{\sigma\pi}} \left(\sin \frac{\beta\pi}{2} \tau_{\sigma}(v) + j_v[\tau_{\sigma}(a - v) - \tau_{\sigma}(a + v)]\right) \frac{dv}{v}\right) +$$

$$+ O(\psi(\sigma) H(\tau_{\sigma})), \quad \sigma \to \infty,$$

де $H(\tau_{\sigma})$, $\xi(A, B)$, j_v *визначено відповідно за допомогою співвідношень* (7), (10) *і* (11).

Якщо при цьому виконується нерівність (37), *то*

$$\mathscr{E}_{\sigma}\left(\hat{L}^{\psi}_{\beta,1}, U_{\sigma}(\Lambda)\right)_{\hat{1}} = \frac{2}{\pi} \psi(\sigma) \left|\sin \frac{\beta\pi}{2}\right| \int_0^{\infty} \frac{|\tau_{\sigma}(v)|}{v}\, dv +$$

$$+ O\left(\psi(\sigma) \left|\sin \frac{\beta\pi}{2}\right| \int_0^{\frac{2}{\sigma\pi}} \frac{|\tau_{\sigma}(v)|}{v}\, dv\right) +$$

$$+\,O\left(\psi(a\sigma)\int\limits_0^a \frac{|\lambda_\sigma(a-v)-\lambda_\sigma(a+v)|}{v}\,dv\right)+O\big(\psi(\sigma)H(\tau_\sigma)\big),\quad \sigma\to\infty.$$

Якщо ж виконується (39), *то*

$$\mathscr{E}_\sigma\left(\hat{L}^{\psi}_{\beta,1}, U_\sigma(\Lambda)\right)_{\hat{1}} = \frac{4}{\pi^2}\psi(a\sigma)\int\limits_0^a \frac{|\lambda_\sigma(a-v)-\lambda_\sigma(a+v)|}{v}\,dv +$$

$$+\,O\left(\psi(a\sigma)\int\limits_0^{\frac{2}{\sigma\pi}} \frac{j_v|\lambda_\sigma(a-v)-\lambda_\sigma(a+v)|}{v}\,dv\right)+O\left(\psi(\sigma)\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\int\limits_0^\infty \frac{|\tau_\sigma(v)|}{v}\,dv\right)+$$

$$+\,O\big(\psi(\sigma)H(\tau_\sigma)\big),\quad \sigma\to\infty.$$

1. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 268 с.
2. *Степанец А. И.* Методы теории приближения. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч. 1. – 427 с.
3. *Степанец А. И.* Методы теории приближения. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч. 2. – 468 с.
4. *Степанец А. И.* Классы функций, заданные на действительной оси, и их приближение целыми функциями. I // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 1. – С. 102 – 112.
5. *Степанец А. И.* Классы функций, заданные на действительной оси, и их приближение целыми функциями. II // Укр. мат. журн. – № 2. – С. 210 – 222.
6. *Дзимистаришвили М. Г.* Приближение классов непрерывных функций операторами Зигмунда. – Киев, 1989. – С. 3 – 42. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 89.25).
7. *Дзимистаришвили М. Г.* О поведении верхних граней уклонений операторов Стеклова. – Киев, 1990. – С. 3 – 29. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 90.25).
8. *Рукасов В. И.* Приближение операторами Валле Пуссена фукнций, заданных на действительной оси // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 5. – С. 682 – 691.
9. *Репета Л. А.* Приближение функций классов $\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}$ операторами вида $U^{\varphi,F}_{\sigma}$ // Ряды Фурье: теория и приложения: Сб. науч. тр. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1992. – С. 147 – 154.
10. *Баусов Л. И.* Линейные методы суммирования рядов Фурье с заданными прямоугольными матрицами. I // Изв. вузов. – 1965. – **46**, № 3. – С. 15 – 31.
11. *Новикова А. К.* О приближении функций в пространствах C и L // Вопросы суммирования рядов Фурье. – Киев, 1985. – С. 14 – 51. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 85.61).
12. *Теляковский С. А.* О нормах тригонометрических полиномов и приближении дифференцируемых функций линейными средними их рядов Фурье. II // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1963. – **27**, № 2. – С. 253 – 272.
13. *Степанец А. И.* Приближение суммами Фурье функций с медленно убывающими коэффициентами Фурье // Приближение периодических функций суммами Фурье. – Киев, 1984. – С. 3 – 25. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 84.43).

Одержано 11.11.2003