УДК 517 + 519.2

М. В. Миронюк (Фіз.-техн. ін-т низьких температур НАН України, Харків)

ДО ТЕОРЕМИ СКИТОВИЧА – ДАРМУА НА АБЕЛЕВИХ ГРУПАХ

We prove some theorems that generalize the Skitovich – Darmois theorem to the case where independent random variables ξ_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, $n \geq 2$, take values in a locally compact Abelian group and the coefficients α_j, β_j of the linear forms $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \ldots + \alpha_n\xi_n$ and $L_2 = \beta_1\xi_1 + \ldots + \beta_n\xi_n$ are automorphisms of the group.

Доведено теореми, що узагальнюють теорему Скитовича – Дармуа на випадок, коли незалежні випадкові величини ξ_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, $n \geq 2$, набувають значень у локально компактній абелевій групі, а коефіцієнти α_j, β_j лінійних форм $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \ldots + \alpha_n\xi_n$ та $L_2 = \beta_1\xi_1 + \ldots$ $\ldots + \beta_n\xi_n$ є автоморфізмами групи.

1. Вступ. Нехай ξ_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, $n \geq 2$, — незалежні випадкові величини. Розглянемо лінійні форми $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \ldots + \alpha_n\xi_n$ та $L_2 = \beta_1\xi_1 + \ldots + \beta_n\xi_n$, де коефіцієнти α_j, β_j не дорівнюють нулю. Класична теорема Скитовича – Дармуа стверджує, що якщо L_1 і L_2 незалежні, то всі випадкові величини ξ_j є гауссовими [1, 2] (див. також [3], розд. 3). Гур'є та Олкін узагальнили цю теорему на випадок, коли ξ_j — незалежні випадкові вектори в $\mathbb{R}^m$, а α_j, β_j — несингулярні матриці [4] (див. також [3], розд. 3). Вони довели, що із незалежності L_1 та L_2 випливає, що всі випадкові вектори ξ_j є гауссовими. Узагальненням теореми Скитовича – Дармуа на випадок, коли незалежні випадкові величини ξ_j набувають значень у різних алгебраїчних структурах, присвячено значну кількість робіт (див. [5 – 14]), більша частина яких відноситься до випадку, коли незалежні випадкові величини ξ_j набувають значень у локально компактній абелевій групі. Дана стаття продовжує ці дослідження.

Перш ніж перейти до викладу отриманих нами результатів, домовимося про деякі позначення. Для довільної локально компактної сепарабельної абелевої метричної групи X позначимо через $Y = X^*$ її групу характерів, через (x, y) — значення характеру $y \in Y$ на елементі $x \in X$. Характеристична функція розподілу μ на групі X визначається за формулою $\hat{\mu}(y) = \int_X (x, y)\, d\mu(x)$. Позначимо через $\Gamma(X)$ множину гауссівських розподілів на групі X [15], через $D(X)$ множину вироджених розподілів на групі X, а через $I(X)$ множину ідемпотентних розподілів на групі X, тобто множину зсувів розподілів Хаара m_K компактних підгруп K групи X. Ідемпотентні розподіли нарівні з гауссівськими розподілами виникають природним чином у характеризаційних задачах на групах. Зазначимо, що якщо розподіл μ належить класу $\Gamma(X) * I(X)$, тобто μ є згорткою гауссівського та ідемпотентного розподілів, то μ інваріантний відносно деякої компактної підгрупи K групи X і індукує на фактор-групі X/K при природному гомоморфізмі $X \to X/K$ гауссівський розподіл. Тому клас $\Gamma(X) * I(X)$ можна розглядати як природний аналог класу гауссівських розподілів для локально компактної абелевої групи X. Позначимо через $\mathrm{Aut}(X)$ групу топологічних автоморфізмів групи X та розглянемо наступні дві задачі.

***Задача* 1.** Описати локально компактні сепарабельні абелеві метричні групи X, що мають таку властивість: при будь-якому натуральному $n \geq 2$, якщо ξ_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, — незалежні випадкові величини зі значеннями у X та з розподілами μ_j, а $\alpha_j, \beta_j \in \mathrm{Aut}(X)$, із незалежності $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \ldots + \alpha_n\xi_n$ та $L_2 = \beta_1\xi_1 + \ldots + \beta_n\xi_n$ випливає, що всі розподіли μ_j належать класу $\Gamma(X) * I(X)$.

Множину груп, що мають зазначену у задачі 1 властивість, позначимо через $\mathcal{A}$.

***Задача* 2.** Описати локально компактні сепарабельні абелеві метричні групи X, що мають таку властивість: при будь-якому натуральному $n \geq 2$, якщо ξ_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, — незалежні випадкові величини зі значеннями у X та з розподілами μ_j, а $\alpha_j, \beta_j \in \mathrm{Aut}(X)$, із незалежності $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \ldots + \alpha_n\xi_n$ та $L_2 = \beta_1\xi_1 + \ldots + \beta_n\xi_n$ випливає, що хоча б один розподіл μ_j належить класу $\Gamma(X) * I(X)$.

Множину груп, що мають зазначену у задачі 2 властивість, позначимо через $\mathcal{B}$.

Обидві задачі до цього часу не розв'язані, але отримано повні описи множин $\mathcal{A}$ та $\mathcal{B}$ у класах скінченних абелевих груп, компактних абелевих груп та дискретних періодичних абелевих груп (див. [7 – 9]).

Нехай $n \geq 2$ — натуральне число. Розглянемо задачу 1 при фіксованому n та позначимо через $\mathcal{A}_n$ множину груп, кожна з яких має зазначену у задачі 1 властивість при фіксованому n. Аналогічно введемо позначення $\mathcal{B}_n$. Інтерес до вивчення множин $\mathcal{A}_n$ та $\mathcal{B}_n$ виник після того, як у роботі [10] було виявлено, що вже у класі скінченних абелевих груп $\mathcal{A}_2 \neq \mathcal{A}$ та $\mathcal{B}_2 \neq \mathcal{B}$. Множини $\mathcal{A}_n$ та $\mathcal{B}_n$ при $n = 2$ та $n = 3$ вивчалися для різних класів локально компактних абелевих груп. Так, множини $\mathcal{A}_2$ та $\mathcal{B}_2$ описано у роботах [10, 11, 13] у класах скінченних абелевих груп, компактних цілком незв'язних абелевих груп та дискретних періодичних абелевих груп. Множини $\mathcal{A}_3$ та $\mathcal{B}_3$ описано в [12] у класі скінченних абелевих груп. Множини $\mathcal{A}_n$ та $\mathcal{B}_n$ при $n \geq 4$ не вивчалися.

У п. 2 ми доведемо, що $\mathcal{A}_n = \mathcal{A}$ та $\mathcal{B}_n = \mathcal{B}$ при будь-якому $n \geq 4$ у класах компактних абелевих груп та дискретних періодичних абелевих груп. У п. 3 ми опишемо множини $\mathcal{A}_3$ та $\mathcal{B}_3$ у класах компактних цілком незв'язних абелевих груп та дискретних періодичних абелевих груп. Тим самим, беручи до уваги згадані вище результати, ми повністю опишемо множини $\mathcal{A}_n$ та $\mathcal{B}_n$ при будь-якому $n \geq 2$ у класах компактних цілком незв'язних абелевих груп та дискретних періодичних абелевих груп. Зазначимо, що питання про опис множин $\mathcal{A}_n$ та $\mathcal{B}_n$ при $n = 2$ та $n = 3$ у класах усіх компактних абелевих груп залишається відкритим. Нарешті, у п. 4 ми опишемо досить широкий клас локально компактних абелевих груп, для якого при будь-якому $n \geq 2$ із незалежності $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \ldots + \alpha_n\xi_n$ та $L_2 = = \beta_1\xi_1 + \ldots + \beta_n\xi_n$, $n \geq 2$, де $\alpha_j, \beta_j \in \mathrm{Aut}(X)$, а ξ_j — незалежні випадкові величини зі значеннями у X та з розподілами μ_j, випливає, що всі μ_j належать множині $\Gamma(X)$.

Будемо використовувати у статті деякі результати абстрактного гармонійного аналізу, структурної теорії локально компактних абелевих груп (див. [16]) та теорії нескінченних абелевих груп (див. [17, 18]).

Для довільного $\alpha \in \mathrm{Aut}(X)$ визначимо спряжений автоморфізм $\tilde{\alpha} \in \mathrm{Aut}(Y)$ формулою $(x, \tilde{\alpha}(y)) = (\alpha(x), y)$ для всіх $x \in X$, $y \in Y$. Тотожний автоморфізм довільної групи будемо позначати через I. Підгрупу G групи X назвемо характеристичною, якщо кожний автоморфізм $\alpha \in \mathrm{Aut}(X)$ переводить групу G у себе. Якщо H — замкнена підгрупа групи Y, то позначимо через $A(X, H) = \{x \in X : (x, y) = 1 \ \forall\, y \in H\}$ її анулятор. Носій розподілу μ позначимо через $\sigma(\mu)$. Зазначимо, що якщо H — замкнена підгрупа у Y та $\hat{\mu}(y)=1$ при $y \in H$, то $\sigma(\mu) \subset A(X, H)$. Через $\mathbb{N}$ позначимо множину натуральних чисел. Нехай $n \in \mathbb{N}$. Позначимо через $f_n\colon X \to X$ гомоморфізм, визначений формулою $f_n(x) = nx$. Покладемо $X^{(n)} = \operatorname{Im} f_n$. Позначимо через $\mathbb{Z}(m)$ групу коренів степеня m з одиниці, а через $\{0, 1, \ldots, m-1\}$ її елементи. Нехай p — просте число. Через $\mathbb{Z}(p^\infty)$ позначимо групу коренів степеня p^n з одиниці, що розглядається у дискретній топології, де n набуває всіх невід'ємних цілих чисел. Хоча $\mathbb{Z}(m)$ та $\mathbb{Z}(p^\infty)$ — мультиплікативні групи, групову операцію у них будемо позначати знаком +. Через Δ_p позначимо групу p-адичних цілих чисел.

Якщо ξ_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, $n \geq 2$, — незалежні випадкові величини зі значеннями у групі X та з розподілами μ_j, то, враховуючи, що характеристичною функцією розподілу μ_j є математичне сподівання $\hat{\mu}_j(y) = \mathbf{E}\left[(\xi_j, y)\right]$, так само, як і у класичному випадку, переконуємося у тому, що незалежність лінійних форм $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \ldots + \alpha_n\xi_n$ та $L_2 = \beta_1\xi_1 + \ldots + \beta_n\xi_n$, де $\alpha_j, \beta_j \in \operatorname{Aut}(X)$, еквівалентна тому, що характеристичні функції розподілів μ_j задовольняють функціональне рівняння

$$\prod_{j=1}^{n} \hat{\mu}_j\left(\tilde{\alpha}_j u + \tilde{\beta}_j v\right) = \prod_{j=1}^{n} \hat{\mu}_j\left(\tilde{\alpha}_j u\right) \prod_{j=1}^{n} \hat{\mu}_j\left(\tilde{\beta}_j v\right), \quad u, v \in Y. \tag{1}$$

Покладаючи $\xi_j' = \alpha_j \xi_j$, бачимо, що у задачах, які ми вивчаємо, не обмежуючи загальності, можна вважати, що лінійні форми мають вигляд $L_1 = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ та $L_2 = \delta_1\xi_1 + \ldots + \delta_n\xi_n$, де $\delta_j \in \operatorname{Aut}(X)$. Тоді рівняння (1) можна переписати у такому вигляді:

$$\prod_{j=1}^{n} \hat{\mu}_j\left(u + \tilde{\delta}_j v\right) = \prod_{j=1}^{n} \hat{\mu}_j(u) \prod_{j=1}^{n} \hat{\mu}_j(\tilde{\delta}_j v), \quad u, v \in Y. \tag{2}$$

Вивченню розв'язків цього функціонального рівняння і присвячено дану роботу.

2. Випадок довільного числа $n \geq 4$ незалежних випадкових величин. Нехай A — дискретна редукована p-примарна група, тобто A не містить подільних підгруп та порядки усіх елементів групи A — степені простого числа p. Покладемо $A^1 = \bigcap_{n=1}^{\infty} A^{(p^n)}$, $A^{\sigma+1} = (A^\sigma)^1$ та $A^\rho = \bigcap_{\sigma<\rho} A^\sigma$, якщо ρ — граничне порядкове число. Тоді визначено майже впорядковану послідовність підгруп $A = A^0 \supset A^1 \supset \ldots \supset A^\sigma \supset \ldots \supset A^\tau = \{0\}$ для деякого порядкового τ. Підгрупа A^σ називається σ-ю ульмовською підгрупою групи A, а фактор-група $A_\sigma = A^\sigma / A^{\sigma+1}$ — σ-м ульмовським фактором групи A. Майже впорядкована послідовність $A_0, A_1, \ldots A_\sigma \ldots$, $\sigma < \tau$, називається послідовністю Ульма групи A, а τ — ульмовським типом групи A. Якщо A — зліченна група, то всі A_σ — слабкі прямі добутки циклічних p-груп. Число циклічних прямих множників порядку p^m у розкладі групи A_σ збігається з відповідним інваріантом Ульма – Капланського групи A (див. [17] (§ 37), [18] (§ 76)).

У роботах [8, 9] доведено дві теореми, з яких випливає повний опис множин $\mathcal{A}$ та $\mathcal{B}$ у класах компактних абелевих груп та дискретних періодичних абелевих груп. Наведемо їх.

Теорема А. *Нехай* $\xi_1, \ldots, \xi_n$, $n \geq 2$, — *незалежні випадкові величини зі* *значеннями у групі* X *та з розподілами* μ_j, $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \ldots + \alpha_n\xi_n$ *та* $L_2 = \beta_1\xi_1 + \ldots + \beta_n\xi_n$, *де* $\alpha_j, \beta_j \in \mathrm{Aut}(X)$. *Припустимо, що лінійні форми* L_1 *та* L_2 *є незалежними. Нехай* K *— або сепарабельна компактна абелева метрична група вигляду:*

a) $\mathbb{Z}(2^{m_1}) \times \ldots \times \mathbb{Z}(2^{m_l})$, $0 \le m_1 < \ldots < m_l$;

b) Δ_2;

c) $\Delta_2 \times \mathbb{Z}(2^{m_1}) \times \ldots \times \mathbb{Z}(2^{m_l})$, $0 \le m_1 < \ldots < m_l$,

або зліченна дискретна періодична абелева група вигляду:

d) G, *де* G *— зліченна 2-примарна редукована група, кожний інваріант Ульма – Капланського якої дорівнює або* 0, *або* 1;

e) $\mathbb{Z}(2^\infty)$;

f) $\mathbb{Z}(2^\infty) \times G$, *де* G *така, як у п. d*).

Тоді:

1) *якщо* $X = K$, *то всі* μ_j *— вироджені розподіли;*

2) *якщо* $X = \mathbb{Z}(3) \times K$, *то хоча б два розподіли* μ_{j_1} *та* μ_{j_2} *є ідемпотентними.*

Теорема B. *Нехай* X *— або сепарабельна компактна абелева метрична група, або зліченна дискретна періодична абелева група, топологічно не ізоморфна жодній із груп, перелічених у теоремі* A. *Тоді або для* $n = 4$, *або для* $n = 6$ *існують такі автоморфізми* $\alpha_j, \beta_j \in \mathrm{Aut}(X)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, *та незалежні випадкові величини* ξ_j *зі значеннями у групі* X *та з розподілами* μ_j, *що лінійні форми* $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \ldots + \alpha_n\xi_n$, $L_2 = \beta_1\xi_1 + \ldots + \beta_n\xi_n$ *є незалежними, а всі* μ_j *не належать класу* $\Gamma(X) * I(X)$.

Основним результатом даного пункту є наступна теорема, що узагальнює теорему B, з якої на підставі теореми A випливає, що $\mathcal{A}_n = \mathcal{A}$ та $\mathcal{B}_n = \mathcal{B}$ при будь-якому $n \ge 4$ у класах компактних абелевих груп та дискретних періодичних абелевих груп.

Теорема 1. *Нехай* X *— або сепарабельна компактна абелева метрична група, що не ізоморфна групам вигляду* $a) - c)$, *або зліченна дискретна періодична абелева група, що не ізоморфна групам вигляду* $d) - f)$, *переліченим у теоремі* A. *Тоді для будь-якого* $n \ge 4$ *існують незалежні випадкові величини* ξ_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, *зі значеннями у* X *та з розподілами* μ_j *і автоморфізми* $\delta_j \in \mathrm{Aut}(X)$ *такі, що лінійні форми* $L_1 = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ *та* $L_2 = \delta_1\xi_1 + \ldots + \delta_n\xi_n$ *є незалежними, а всі* μ_j *не належать класу* $I(X) * \Gamma(X)$.

Доведення теореми 1 опирається на наступне твердження.

Твердження 1. *Нехай* X *— локально компактна сепарабельна абелева метрична група така, що для деякої компактної підгрупи* $K \subset X$, $K \ne \mathbb{Z}(3)$ *та автоморфізму* $\delta \in \mathrm{Aut}(K)$ *виконано:*

i) δ *продовжується до топологічного автоморфізму групи* X;

ii) $(I - \delta)$ *— епіморфізм* K.

Тоді для будь-якого $n \ge 4$ *існують незалежні випадкові величини* ξ_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, *зі значеннями у* X *та з розподілами* μ_j *і автоморфізми* $\delta_j \in \mathrm{Aut}(X)$ *такі, що лінійні форми* $L_1 = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ *та* $L_2 = \delta_1\xi_1 + \ldots + \delta_n\xi_n$ *є незалежними, а всі* μ_j *не належать класу* $I(X) * \Gamma(X)$.

Доведення. Очевидно, не обмежуючи загальності, можна вважати, що $X = K$. Оскільки $X \ne \mathbb{Z}(3)$, то і $Y \ne \mathbb{Z}(3)$. Оскільки $(I - \delta)$ — епіморфізм X, то $X \ne \mathbb{Z}(2)$, тому що єдиним автоморфізмом групи $\mathbb{Z}(2)$ є тотожний автоморфізм I. Отже, $Y \ne \mathbb{Z}(2)$. Тому можна вибрати відмінні від нуля елементи

$y_1, y_2 \in Y$ так, щоб $\{y_1, -y_1\} \cap \{y_2, -y_2\} = \varnothing$. Розглянемо на групі X функції $\rho_j(x) = 1 + \frac{1}{2}\operatorname{Re}(x, y_j)$, $j = 1, 2$. Позначимо через ε_j розподіл на групі X зі щільністю $\rho_j(x)$ відносно m_X.

Нехай ξ_j — незалежні випадкові величини зі значеннями у X та з розподілами μ_j, де $\mu_1 = \mu_3 = \varepsilon_1$, $\mu_2 = \mu_4 = \varepsilon_2$, а μ_j, $j \geq 5$, — довільні розподіли на X такі, що $\mu_j \notin \Gamma(x) * I(x)$. Нехай $\delta_1 = \delta_2 = I$, $\delta_3 = \delta_4 = \delta$, а решта автоморфізмів $\delta_j \in \operatorname{Aut}(X)$ — довільні. Покажемо, що виконується рівняння (2), яке набирає вигляду

$$\hat{\varepsilon}_1(u+v)\hat{\varepsilon}_2(u+v)\hat{\varepsilon}_1(u+\tilde{\delta}v)\hat{\varepsilon}_2(u+\tilde{\delta}v)\prod_{j=5}^{n}\hat{\mu}_j\left(u+\tilde{\delta}_j v\right) =$$

$$= \hat{\varepsilon}_1^2(u)\hat{\varepsilon}_1(v)\hat{\varepsilon}_1(\tilde{\delta}v)\hat{\varepsilon}_2^2(u)\hat{\varepsilon}_2(v)\hat{\varepsilon}_2(\tilde{\delta}v)\prod_{j=5}^{n}\hat{\mu}_j(u)\prod_{j=5}^{n}\hat{\mu}_j\left(\tilde{\delta}_j v\right), \quad u,\ v \in Y. \tag{3}$$

Звідси випливає незалежність лінійних форм $L_1 = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ та $L_1 = \delta_1\xi_1 + \ldots + \delta_n\xi_n$, а отже, і твердження 1. Оскільки рівняння (3), очевидно, виконується, коли або $u = 0$, або $v = 0$, то перевіримо його виконання при $u \neq 0$, $v \neq 0$. Тоді з вигляду $\hat{\varepsilon}_j(y)$ випливає, що права частина рівняння (3) дорівнює нулю. Перевіримо, що ліва частина (3) також дорівнює нулю. Покажемо, що добуток $\hat{\varepsilon}_1(u+v)\hat{\varepsilon}_2(u+v)\hat{\varepsilon}_1(u+\tilde{\delta}v)\hat{\varepsilon}_2(u+\tilde{\delta}v)$ завжди дорівнює нулю, коли $u \neq 0$, $v \neq 0$. Припустимо, що це не так. Але $\hat{\varepsilon}_1(u+v) \neq 0$ при $u+v \in \{0, y_1, -y_1\}$, а $\hat{\varepsilon}_2(u+v) \neq 0$ при $u+v \in \{0, y_2, -y_2\}$. Звідси випливає, що $u+v=0$. Далі отримаємо $\hat{\varepsilon}_1(u+\tilde{\delta}v) \neq 0$ при $u+\tilde{\delta}v \in \{0, y_1, -y_1\}$, а $\hat{\varepsilon}_2(u+\tilde{\delta}v) \neq 0$ при $u+\tilde{\delta}v \in \{0, y_2, -y_2\}$. Звідси випливає $u+\tilde{\delta}v = 0$. Тоді маємо $(I-\tilde{\delta})v = 0$. Оскільки $(I-\delta)$ — епіморфізм X, то $(I-\tilde{\delta})$ — мономорфізм Y. Отже, рівняння $(I-\tilde{\delta})v = 0$ виконується тоді і тільки тоді, коли $v = 0$, а це суперечить припущенню про те, що $v \neq 0$. Таким чином, добуток $\hat{\varepsilon}_1(u+v)\hat{\varepsilon}_2(u+v)\hat{\varepsilon}_1(u+\tilde{\delta}v)\hat{\varepsilon}_2(u+\tilde{\delta}v)$ дорівнює нулю при $u \neq 0$, $v \neq 0$, а отже, і ліва частина рівняння (3) дорівнює нулю при $u \neq 0$, $v \neq 0$. Таким чином, рівняння (3) виконується для будь-яких $u, v \in Y$. Тим самим твердження 1 доведено.

***Доведення теореми* 1.** Нехай X — сепарабельна компактна абелева метрична група, що не ізоморфна групам вигляду а) – с), переліченим у теоремі А. Тоді, як доведено в [8], група X або задовольняє умови твердження 1, або містить у якості топологічного прямого множника K одну із груп вигляду: 1) $\Delta_2 \times \Delta_2$, 2) прямий добуток циклічних груп $\underset{m \in \mathbb{N}}{P}\mathbb{Z}(2^{k_m})$, $k_m \leq k_{m+1}$, $m \in \mathbb{N}$, 3) $\mathbb{Z}(2^k) \times \mathbb{Z}(2^k)$. Покажемо, що і в цьому випадку група X задовольняє умови твердження 1. Тим самим теорему 1 буде доведено. Для цього достатньо у кожному із випадків 1 – 3 побудувати автоморфізм $\delta \in \operatorname{Aut}(X)$, що задовольняє умову ii) твердження 1, оскільки умова i) твердження 1 виконується автоматично.

1. Нехай $K = \Delta_2 \times \Delta_2$. Елементи групи K позначимо через $x = (x_1, x_2)$, $x_i \in \Delta_2$. Розглянемо автоморфізм $\delta \in \operatorname{Aut}(K)$, визначений формулою $\delta(x_1, x_2) = (x_2, x_1 + x_2)$. Легко бачити, що автоморфізм δ задовольняє умову ii) твердження 1.

2. Нехай $K = \underset{m \in \mathbb{N}}{P}\mathbb{Z}(2^{k_m})$, $k_m \leq k_{m+1}$, $m \in \mathbb{N}$. Проведемо побудову автомор-

фізму δ для групи $K = \mathop{P}_{m \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}(p^{k_m})$, $k_m \le k_{m+1}$, $m \in \mathbb{N}$, оскільки нам це також знадобиться при доведенні теореми 2.

Нехай $j \ge i$. Позначимо через π_{ij} епіморфізм $\pi_{ij}\colon \mathbb{Z}(p^{k_j}) \to \mathbb{Z}(p^{k_i})$, визначений формулою $\pi_{ij}(t) = t \left(\operatorname{mod} p^{k_i}\right)$. Зазначимо, що $\pi_{m,\,m+1} \circ \pi_{m+1,\,m+2} = \pi_{m,\,m+2}$.

Елементи групи K — це послідовності $t = \{t_m\}_{m=1}^{\infty}$, $t_m \in \mathbb{Z}(p^{k_m})$. Задамо гомоморфізм $\delta\colon K \to K$ формулою $\delta\{t_m\}_{m=1}^{\infty} = \{s_m\}_{m=1}^{\infty}$, де

$$s_m = \begin{cases} t_m + \pi_{m,\,m+1} t_{m+1} + \pi_{m,\,m+2} t_{m+2}, & m = 2j-1, \\ t_m + \pi_{m,\,m+1} t_{m+1}, & m = 2j. \end{cases} \tag{4}$$

Очевидно, що гомоморфізм δ є неперервним. Перевіримо, що гомоморфізм δ є мономорфізмом. Нехай $\delta\{t_m\}_{m=1}^{\infty} = 0$. Візьмемо два послідовних числа: непарне m та наступне парне $m+1$. Тоді

$$t_m + \pi_{m,\,m+1} t_{m+1} + \pi_{m,\,m+2} t_{m+2} = 0, \tag{5}$$

$$t_{m+1} + \pi_{m+1,\,m+2} t_{m+2} = 0. \tag{6}$$

Застосуємо $\pi_{m,\,m+1}$ до рівності (6). Отримаємо

$$\pi_{m,\,m+1} t_{m+1} + \pi_{m,\,m+2} t_{m+2} = 0. \tag{7}$$

Віднімемо від рівності (5) рівність (7) та отримаємо $t_m = 0$, $m = 1, 3, 5, \ldots$. Тоді із (6) випливає, що $t_{m+1} = 0$, $m = 1, 3, 5, \ldots$. Отже, $t_m = 0$.

Перевіримо, що гомоморфізм δ є епіморфізмом. Для цього доведемо, що при будь-якому $s = \{s_m\}_{m=1}^{\infty} \in K$ рівняння $\delta t = s$ має розв'язок. Для цього достатньо довести існування розв'язку системи

$$t_m + \pi_{m,\,m+1} t_{m+1} + \pi_{m,\,m+2} t_{m+2} = s_m, \tag{8}$$

$$t_{m+1} + \pi_{m+1,\,m+2} t_{m+2} = s_{m+1} \tag{9}$$

при будь-якому непарному m та наступному парному $m+1$. Застосуємо $\pi_{m,\,m+1}$ до рівності (9). Отримаємо

$$\pi_{m,\,m+1} t_{m+1} + \pi_{m,\,m+2} t_{m+2} = \pi_{m,\,m+1} s_{m+1}. \tag{10}$$

Віднімемо від рівності (8) рівність (10) та отримаємо $t_m = s_m - \pi_{m,\,m+1} s_{m+1}$. Таким чином знаходимо всі t_m, де m — непарне, а потім із (9) усі t_m, де m — парне.

Отже, ми довели, що δ — топологічний автоморфізм групи K. Очевидно, що $(\delta - I)$ — епіморфізм.

3. Нехай $K = \mathbb{Z}(2^k) \times \mathbb{Z}(2^k)$. Автоморфізм δ будується так само, як і у п. 1 доведення теореми 1.

Таким чином, для компактних абелевих груп теорему 1 доведено.

Нехай X — зліченна дискретна періодична абелева група, що не ізоморфна групам вигляду d) – f), переліченим у теоремі А. Зобразимо групу X у вигляді слабкого прямого добутку своїх p-примарних підгруп $X = \mathop{P^*}_{p \in \mathcal{P}} X_p$, де $\mathcal{P}$ — множина простих чисел. Зазначимо, що для будь-якої підгрупи $G \subset X_p$ при $p \ge 3$ виконано $G^{(2)} = G$. Тому якщо $X_3 \ne 0$ та $X_3 \ne \mathbb{Z}(3)$, або $X_p \ne 0$ хоча б при одному $p > 3$, то група X містить таку ненульову компактну підгрупу K, що $K \neq \mathbb{Z}(3)$ та $K^{(2)} = K$. Тоді автоморфізм $\delta = -I$, очевидно, задовольняє умови твердження 1, і в цьому випадку теорему 1 доведено. Отже, слід доводити лише випадок, коли $X = X_2 \times X_3$, де або $X_3 = 0$, або $X_3 \approx \mathbb{Z}(3)$.

Зобразимо групу X_2 у вигляді прямого добутку $X_2 = D \times N$, де D — максимальна подільна підгрупа групи X_2, а N — редукована 2-примарна підгрупа. Група D ізоморфна слабкому прямому добутку груп $\mathbb{Z}(2^\infty)$. Оскільки група X не ізоморфна групам вигляду d) – f), переліченим у теоремі A, то можливі два випадки.

1. Група D містить прямий множник, ізоморфний $\mathbb{Z}(2^\infty) \times \mathbb{Z}(2^\infty)$. Покладемо $K = \mathbb{Z}(2) \times \mathbb{Z}(2) \subset \mathbb{Z}(2^\infty) \times \mathbb{Z}(2^\infty)$, $\delta(x_1, x_2) = (x_2, x_1 + x_2)$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}(2) \times \mathbb{Z}(2)$. Очевидно, що K та δ задовольняють умови твердження 1.

2. Один із ульмовських факторів N_σ містить прямий множник вигляду $\mathbb{Z}(2^k) \times \mathbb{Z}(2^k)$. Тоді, як показано у [9], група N містить таку підгрупу K, ізоморфну $\mathbb{Z}(2^k) \times \mathbb{Z}(2^k)$, що будь-який автоморфізм підгрупи K продовжується до автоморфізму групи N, а отже, і до автоморфізму групи X. Елементи підгрупи K позначимо через (x_1, x_2), $x_j \in \mathbb{Z}(2)$ та покладемо $\delta(x_1, x_2) = (x_2, x_1 + x_2)$. Очевидно, що K та δ задовольняють умови твердження 1.

Таким чином, якщо зліченна дискретна періодична абелева група X не ізоморфна групам вигляду d) – f), переліченим у теоремі A, то X задовольняє умови твердження 1. Теорема 1 для класу груп, що розглядаються, випливає тепер із твердження 1. Тим самим теорему 1 повністю доведено.

3. Випадок $n = 3$ незалежних випадкових величин. Вивчимо спочатку випадок, коли X — цілком незв'язна абелева група. Зазначимо, що тоді $\Gamma(X) = D(X)$ [15]. З наступної теореми випливає опис множин $\mathcal{A}_3$ та $\mathcal{B}_3$ в указаному класі груп.

Теорема 2. *Нехай* ξ_j, $j = 1, 2, 3$, *— незалежні випадкові величини зі значеннями у сепарабельній цілком незв'язній компактній абелевій метричній групі* X *та з розподілами* μ_j. *Позначимо через* G *групу вигляду:*

a) $\mathbb{Z}(2^{m_1}) \times \ldots \times \mathbb{Z}(2^{m_l})$, $0 \le m_1 < \ldots < m_l$;

b) Δ_2;

c) $\Delta_2 \times \mathbb{Z}(2^{m_1}) \times \ldots \times \mathbb{Z}(2^{m_l})$, $0 \le m_1 < \ldots < m_l$.

Нехай $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2 + \alpha_3\xi_3$, $L_2 = \beta_1\xi_1 + \beta_2\xi_2 + \beta_3\xi_3$, *де* α_j, $\beta_j \in \mathrm{Aut}(X)$. *Припустимо, що лінійні форми* L_1 *та* L_2 *незалежні. Тоді:*

I. *Якщо:*

i) $X = G$, *то* μ_j *— вироджені розподіли;*

ii) $X = G \times \mathbb{Z}(3)$, *то хоча б два розподіли* μ_{j_1} *та* μ_{j_2} *є ідемпотентними;*

iii) $X = G \times \mathbb{Z}(5)$, *то хоча б один розподіл* μ_{j_1} *є ідемпотентним.*

II. *Якщо* X *топологічно не ізоморфна групам, переліченим у пп. i) – iii), то існують незалежні випадкові величини* ξ_j, $j = 1, 2, 3$, *зі значеннями у* X *та з розподілами* μ_j *і автоморфізми* $\alpha_j, \beta_j \in \mathrm{Aut}(X)$ *такі, що* L_1 *та* L_2 *є незалежними, а всі* μ_j *не належать* $I(X)$.

Для доведення теореми 2 нам знадобляться кілька лем.

Лема 1. *Для кожної з груп* $X = \Delta_p$, *де* p *— просте та* $p \ge 3$, *і* $X = \Delta_2 \times \Delta_2$ *існують незалежні випадкові величини* ξ_j, $j = 1, 2, 3$, *зі значеннями у* X *та з розподілами* μ_j *і автоморфізми* $\alpha, \beta \in \mathrm{Aut}(X)$ *такі, що лінійні форми* $L_1 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$ *та* $L_2 = \xi_1 + \alpha\xi_2 + \beta\xi_3$ *є незалежними, а всі* μ_j *не належать* $I(X)$.

Доведення. Нехай $X=\Delta_p$, де p — просте та $p\geq 3$. Тоді $Y\approx\mathbb{Z}(p^\infty)$. Будемо вважати, що $Y=\mathbb{Z}(p^\infty)$. Позначимо через ζ елемент порядку p^2 підгрупи $\mathbb{Z}(p^2)\subset\mathbb{Z}(p^\infty)$. Розглянемо на X функції $\rho(x)=1+\frac{1}{2}\operatorname{Re}(x,\zeta)$, $\rho'(x)=1+\frac{1}{2}\operatorname{Re}(x,2\zeta)$.

Нехай $\mu_1=\mu_2$ — розподіли на групі X зі щільністю $\rho(x)$ відносно m_X, а μ_3 — розподіл на групі X зі щільністю $\rho'(x)$ відносно m_X. Тоді характеристичні функції $\hat\mu_j(y)$ мають вигляд

$$\hat\mu_1(y) = \hat\mu_2(y) = \begin{cases} 1, & y=0,\\ \frac{1}{4}, & y\in\{\zeta,-\zeta\},\\ 0, & y\notin\{0,\zeta,-\zeta\},\end{cases} \qquad \hat\mu_3(y) = \begin{cases} 1, & y=0,\\ \frac{1}{4}, & y\in\{2\zeta,-2\zeta\},\\ 0, & y\notin\{0,2\zeta,-2\zeta\}.\end{cases}.$$

Нехай ξ_j — незалежні випадкові величини зі значеннями у X та з розподілами μ_j і автоморфізми $\alpha,\beta\in\operatorname{Aut}(X)$ мають вигляд $\alpha x=-x$, $\beta x=2x$. Тоді $\tilde\alpha x=-x$, $\tilde\beta x=2x$. Покажемо, що лінійні форми $L_1=\xi_1+\xi_2+\xi_3$ та $L_2=\xi_1-\xi_2+2\xi_3$ є незалежними. Для цього перевіримо, що виконано рівняння (2), яке у даному випадку набирає вигляду

$$\hat\mu_1(u+v)\hat\mu_2(u-v)\hat\mu_3(u+2v) = \hat\mu_1(u)\hat\mu_2(u)\hat\mu_3(u)\hat\mu_1(v)\hat\mu_2(-v)\hat\mu_3(2v), \quad u,\ v\in Y. \tag{11}$$

Очевидно, що (11) виконано, якщо або $u=0$, або $v=0$. Тому припустимо, що $u\neq 0$, $v\neq 0$. Тоді права частина рівняння (11) дорівнює нулю, оскільки або $\hat\mu_1(u)=0$, або $\hat\mu_3(u)=0$. Перевіримо, що і ліва частина рівняння (11) у цьому випадку дорівнює нулю.

Покажемо спочатку, що ліва частина рівняння (11) дорівнює нулю при $u,v\in\mathbb{Z}(p^2)$, $u\neq 0$, $v\neq 0$. Якщо це не так, то: 1) $u+v\in\{0,\zeta,-\zeta\}$, 2) $u-v\in\{0,\zeta,-\zeta\}$, 3) $u+2v\in\{0,2\zeta,-2\zeta\}$. Із умов 1 та 3 випливає, що $v\in\{0,\zeta,-\zeta,2\zeta,-2\zeta,3\zeta,-3\zeta\}$, а із умов 1 та 2 — що $2v\in\{0,\zeta,-\zeta,2\zeta,-2\zeta\}$. Оскільки ζ — елемент порядку p^2, а $p\geq 3$, то із останніх двох включень випливає, що $v\in\{0,\zeta,-\zeta\}$. Якщо $v=\zeta$, то умова 1 має місце лише при $u=-\zeta$ або $u=-2\zeta$, але у цьому випадку не виконано умову 2. Для випадку $v=-\zeta$ міркування аналогічні. Отже, ліва частина рівняння (11) дорівнює нулю при $u,v\in\mathbb{Z}(p^2)$, $u\neq 0, v\neq 0$.

Перевіримо, що ліва частина рівняння (11) дорівнює нулю при будь-яких $u,v\in Y$, $u\neq 0, v\neq 0$.

Нехай або $u\in\mathbb{Z}(p^2)$, $v\notin\mathbb{Z}(p^2)$, або $u\notin\mathbb{Z}(p^2)$, $v\in\mathbb{Z}(p^2)$. Тоді $u+v\notin\mathbb{Z}(p^2)$ і, отже, $\mu_1(u+v)=0$.

Нехай $u,v\notin\mathbb{Z}(p^2)$. Ліва частина рівняння (11) не дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли $u+v\in\mathbb{Z}(p^2)$, $u+2v\in v\in\mathbb{Z}(p^2)$. Звідси випливає, що $v\in\mathbb{Z}(p^2)$, а це не так. Отже, ліва частина рівняння (11) у цьому випадку також дорівнює нулю.

Таким чином, для групи $X=\Delta_p$, де p — просте та $p\geq 3$, лему 1 доведено.

Нехай $X=\Delta_2\times\Delta_2$. Тоді $Y\approx\mathbb{Z}(2^\infty)\times\mathbb{Z}(2^\infty)$. Будемо вважати, що $Y=\mathbb{Z}(2^\infty)\times\mathbb{Z}(2^\infty)$. Позначимо елементи групи X через (a,b), $a,b\in\Delta_2$, а елементи групи Y через (p,q), $p,q\in\mathbb{Z}(2^\infty)$. Задамо автоморфізми $\alpha,\beta\in\operatorname{Aut}(X)$

за формулами $\alpha(a, b) = (a, a+b)$, $\beta(a, b) = (a+b)$. Тоді $\tilde{\alpha}(p, q) = (p+q, q)$, $\tilde{\beta}(p, q) = (q, p)$.

Розглянемо на групі X функцію $\rho(x) = 1 + \frac{1}{2}(x, \zeta)$, де $\zeta = (0, 1)$ — елемент підгрупи $\mathbb{Z}(2) \times \mathbb{Z}(2) \subset \mathbb{Z}(2^\infty) \times \mathbb{Z}(2^\infty)$. Нехай $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu$ — розподіли на групі X зі щільністю $\rho(x)$ відносно m_X. Тоді характеристична функція $\hat{\mu}(y)$, очевидно, має вигляд

$$\hat{\mu}(y) = \begin{cases} 1, & y = 0, \\ \frac{1}{2}, & y = \zeta, \\ 0, & y \notin \{0, \zeta\}. \end{cases}$$

Припустимо, що ξ_j, $j = 1, 2, 3$, — незалежні однаково розподілені з розподілами μ випадкові величини зі значеннями у групі X. Покажемо, що лінійні форми $L_1 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$ та $L_2 = \xi_1 + \alpha\xi_2 + \beta\xi_3$ є незалежними. Для цього достатньо переконатись у справедливості рівняння (2), яке у даному випадку набирає вигляду

$$\hat{\mu}(u+v)\hat{\mu}(u+\tilde{\alpha}v)\hat{\mu}(u+\tilde{\beta}v) = \hat{\mu}^3(u)\hat{\mu}(v)\hat{\mu}(\tilde{\alpha}v)\hat{\mu}(\tilde{\beta}v), \quad u, v \in Y. \tag{12}$$

Очевидно, що (12) виконується, якщо або $u = 0$, або $v = 0$. Тому припустимо, що $u \neq 0$, $v \neq 0$. Тоді, очевидно, права частина рівняння (12) дорівнює нулю. Перевіримо, що ліва частина також дорівнює нулю.

Нехай $u, v \in \mathbb{Z}(2) \times \mathbb{Z}(2)$, $u \neq 0$, $v \neq 0$. Ліва частина рівняння (12) не дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли: 1) $u + v \in \{0, \zeta\}$, 2) $u + \tilde{\alpha}v \in \{0, \zeta\}$, 3) $u + \tilde{\beta}v \in \{0, \zeta\}$.

Із умов 2 та 3 випливає, що $(\tilde{\alpha} - \tilde{\beta})v \in \{0, \zeta\}$. Оскільки $(\tilde{\alpha} - \tilde{\beta}) \in \mathrm{Aut}(Y)$ та $v \neq 0$, то $(\tilde{\alpha} - \tilde{\beta})v = \zeta$. Звідси отримуємо $v = \zeta$. Із умови 1 випливає, що $u = \zeta$. Але тоді $u + \tilde{\beta}v \notin \{0, \zeta\}$. Отже, при $u, v \in \mathbb{Z}(2) \times \mathbb{Z}(2)$, $u \neq 0$, $v \neq 0$, ліва частина рівняння (12) дорівнює нулю.

Нехай або $u \in \mathbb{Z}(2) \times \mathbb{Z}(2)$, $v \notin \mathbb{Z}(2) \times \mathbb{Z}(2)$, або $u \notin \mathbb{Z}(2) \times \mathbb{Z}(2)$, $v \in \mathbb{Z}(2) \times \mathbb{Z}(2)$. Тоді $u + v \notin \mathbb{Z}(2) \times \mathbb{Z}(2)$, і, отже, $\mu(u+v) = 0$, і ліва частина рівняння (12) дорівнює нулю.

Нехай $u, v \notin \mathbb{Z}(2) \times \mathbb{Z}(2)$. Ліва частина рівняння (12) не дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли $u + \tilde{\alpha}v \in \mathbb{Z}(2) \times \mathbb{Z}(2)$, $u + \tilde{\beta}v \in \mathbb{Z}(2) \times \mathbb{Z}(2)$. Звідси випливає, що $(\tilde{\alpha} - \tilde{\beta})v \in \mathbb{Z}(2) \times \mathbb{Z}(2)$. Оскільки $(\tilde{\alpha} - \tilde{\beta}) \in \mathrm{Aut}(Y)$ та $\mathbb{Z}(2) \times \mathbb{Z}(2)$ — характеристична підгрупа групи Y, то $v \in \mathbb{Z}(2) \times \mathbb{Z}(2)$, але це не так. Отже, ліва частина рівняння (12) дорівнює нулю при будь-яких $u, v \in Y$, $u \neq 0$, $v \neq 0$. Лему 1 повністю доведено.

Лема 2. *Нехай X — прямий добуток циклічних груп $X = \underset{m \in \mathbb{N}}{P} \mathbb{Z}(p^{k_m})$, $k_m \leq k_{m+1}$, $m \in \mathbb{N}$, де p — просте число. Тоді існують незалежні випадкові величини ξ_1, ξ_2, ξ_3 зі значеннями в X та з розподілами $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \notin I(X)$ і автоморфізм $\delta \in \mathrm{Aut}(X)$ такі, що лінійні форми $L_1 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$ та $L_2 = \xi_1 + \xi_1 + \delta\xi_3$ є незалежними.*

Доведення. Елементи групи X — це послідовності $t = \{t_m\}_{m=1}^\infty$, $t_m \in \mathbb{Z}(p^{k_m})$. Нехай $\delta \in \mathrm{Aut}(X)$ — автоморфізм, побудований при доведенні п. 2

теореми 1. Зазначимо, що $(\delta - I)$ не мономорфізм, оскільки при будь-якому $t_1 \in \mathbb{Z}\left(p^{k_1}\right)$ елементи вигляду $t = (t_1, 0, \ldots)$ належать $\mathrm{Ker}(\delta - I)$. Звідси випливає, що $\mathrm{Im}(\tilde{\delta} - I) \neq Y$. Виберемо елементи $\pm y_0 \notin \mathrm{Im}(\tilde{\delta} - I)$. Задамо на X функцію $\rho(x) = 1 + \frac{1}{2}\mathrm{Re}(x, y_0)$. Нехай μ — розподіл на групі X зі щільністю $\rho(x)$ відносно m_X. Перевіримо, що справджується рівняння

$$\hat{m}_X(u+v)\hat{\mu}(u+\tilde{\delta}v) = \hat{m}_X(u)\hat{m}_X(v)\hat{\mu}(u)\hat{\mu}(\tilde{\delta}v), \quad u, v \in Y. \tag{13}$$

Нагадаємо, що $\hat{m}_X(y) = 0$ при $y \neq 0$. Очевидно, коли або $u = 0$, або $v = 0$, то (13) виконується. Перевіримо його виконання при $u \neq 0$, $v \neq 0$. Тоді права частина (13) дорівнює нулю. Покажемо, що зліва також нуль. Припустимо, що це не так. Якщо ліва частина рівняння (13) відмінна від нуля, то існують такі u_0, v_0, що: 1) $u_0 + v_0 = 0$, 2) $u_0 + \tilde{\delta}v_0 \in \{0, y_0, -y_0\}$. Звідси випливає, що $\left(\tilde{\delta} - I\right)v_0 \in \{0, y_0, -y_0\}$. Оскільки $(\delta - I)$ — епіморфізм, то $\left(\tilde{\delta} - I\right)$ — мономорфізм, а отже, $\left(\tilde{\delta} - I\right)v_0 = 0$ тоді і тільки тоді, коли $v_0 = 0$, тому випадок $\left(\tilde{\delta} - I\right)v_0 = 0$ є неможливим. Випадок $\left(\tilde{\delta} - I\right)v_0 = \pm y_0$ також неможливий, оскільки $\pm y_0 \notin \mathrm{Im}\left(\tilde{\delta} - I\right)$. Таким чином, ліва частина рівняння (13) також дорівнює нулю при $u \neq 0$, $v \neq 0 \in Y$. Отже, рівняння (13) виконується при будь-яких $u, v \in Y$.

Виберемо відмінні від нуля елементи $y_1, y_2 \in Y$ так, щоб $\{y_1, -y_1\} \cap \cap \{y_2, -y_2\} = \varnothing$. Розглянемо на групі X функції $\rho_j(x) = 1 + \frac{1}{2}\mathrm{Re}(x, y_j)$, $j = 1, 2$. Позначимо через ε_j розподіл на X зі щільністю $\rho_j(x)$ відносно m_X. Легко бачити, що $\varepsilon_1 * \varepsilon_2 = m_X$. Підставимо у (13) $\hat{\varepsilon}_1(y)\hat{\varepsilon}_2(y)$ замість $\hat{m}_X(y)$ та отримаємо, що рівняння

$$\hat{\varepsilon}_1(u+v)\hat{\varepsilon}_2(u+v)\hat{\mu}(u+\tilde{\delta}v) = \hat{\varepsilon}_1(u)\hat{\varepsilon}_1(v)\hat{\varepsilon}_2(u)\hat{\varepsilon}_2(v)\hat{\mu}(u)\hat{\mu}(\tilde{\delta}v) \tag{14}$$

виконується для будь-яких $u, v \in Y$. Нехай ξ_j — незалежні випадкові величини зі значеннями у X та з розподілами μ_j, де $\mu_1 = \varepsilon_1$, $\mu_2 = \varepsilon_2$, $\mu_3 = \mu$. Тоді лінійні форми $L_1 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$ та $L_2 = \xi_1 + \xi_1 + \delta\xi_3$ є незалежними. Лему 2 доведено.

Лема 3 [12]. *Для кожної з груп* $X = \mathbb{Z}(3) \times \mathbb{Z}(3)$, $X = \mathbb{Z}(5) \times \mathbb{Z}(5)$, $X = \mathbb{Z}(2^k) \times \mathbb{Z}(2^k)$, $X = \mathbb{Z}(3) \times \mathbb{Z}(5)$, $X = \mathbb{Z}(2n-1)$, $n \geq 4$, *існують незалежні випадкові величини* $\xi_j, j = 1, 2, 3$, *зі значеннями у групі* X *та з розподілами* μ_j *і автоморфізми* $\alpha, \beta \in \mathrm{Aut}(X)$ *такі, що лінійні форми* $L_1 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$ *та* $L_2 = \xi_1 + \alpha\xi_2 + \beta\xi_3$ *є незалежними, а всі* μ_j *не належать* $I(X)$.

Лема 4 [12]. *Нехай* $\xi_j, j = 1, 2, 3,$ — *незалежні випадкові величини зі значеннями у групі* $X = \mathbb{Z}(5)$ *та з розподілами* μ_j. *Якщо лінійні форми* $L_1 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$, $L_2 = \delta_1\xi_1 + \delta_2\xi_2 + \delta_3\xi_3$, *де* $\delta_j \in \mathrm{Aut}(X)$, *незалежні, то хоча б один розподіл* μ_{j_1} *є ідемпотентним.*

Доведення теореми 2. Твердження i) та ii) випливають з теореми А. Доведемо твердження iii).

Нехай $X = G \times \mathbb{Z}(5)$. Позначимо $H = G^*$. Розглянемо розподіли $\nu_j = \mu_j * \overline{\mu_j}$, $j = 1, 2, 3$. Тоді $\hat{\nu}_j(y) = \left|\hat{\mu}_j(y)\right|^2 \geq 0$ та характеристичні функції $\hat{\nu}_j(y)$ задовольняють рівняння

$$\hat{\nu}_1\left(\tilde{\alpha}_1u+\tilde{\beta}_1v\right)\hat{\nu}_2\left(\tilde{\alpha}_2u+\tilde{\beta}_2v\right)\hat{\nu}_3\left(\tilde{\alpha}_3u+\tilde{\beta}_3v\right) =$$
$$= \hat{\nu}_1(\tilde{\alpha}_1u)\hat{\nu}_2(\tilde{\alpha}_2u)\hat{\nu}_3(\tilde{\alpha}_3u)\hat{\nu}_1\left(\hat{\beta}_1v\right)\hat{\nu}_2\left(\hat{\beta}_2v\right)\hat{\nu}_3\left(\hat{\beta}_3v\right), \quad u,\ v\in Y. \tag{15}$$

Оскільки H — характеристична підгрупа групи Y, можна розглядати обмеження рівняння (15) на підгрупу H. Із твердження і) отримаємо, що $\hat{\nu}_j(y)=1$ при $y\in H$, $j=1, 2, 3$. Звідси випливає, що $\sigma(\nu_j)\subset A(X, H)=\mathbb{Z}(5)$. Тому розподіли μ_j можна так замінити їх зсувами μ_j', що носії розподілів μ_j' належать $\mathbb{Z}(5)$, $j = 1, 2, 3$. Оскільки $\mathbb{Z}(5)$ — характеристична підгрупа групи X, твердження ііі) випливає з леми 4.

Доведемо твердження II. Оскільки X — сепарабельна цілком незв'язна компактна абелева метрична група, то Y — зліченна періодична дискретна абелева група. Подамо Y як слабкий прямий добуток p-примарних підгруп: $Y=\mathop{P^*}_{p\in\mathcal{P}}Y_p$, де $\mathcal{P}$ — множина простих чисел. Кожна p-примарна підгрупа Y_p розкладається у прямий добуток $Y_p=D_p\times N_p$, де D_p — максимальна подільна підгрупа Y_p, N_p — редукована зліченна p-примарна підгрупа. Група D_p ізоморфна слабкому прямому добутку груп $\mathbb{Z}(p^\infty)$. У будь-якій редукованій групі N_p можна виділити прямий множник $\mathbb{Z}\left(p^{l_p}\right)$, тобто $N_p=\mathbb{Z}\left(p^{l_p}\right)\times F_p$ [18] (§ 27). Отже, група Y має вигляд $Y=\mathop{P^*}_{p\in\mathcal{P}}\left(\left(\mathbb{Z}\left(p^\infty\right)\right)^{\mathfrak{n}_p^*}\times\mathbb{Z}\left(p^{l_p}\right)\times F_p\right)$, де $\mathfrak{n}_p$ — кардинальне число, а l_p — невід'ємне ціле число. Тоді група X є прямим добутком $X=\mathop{P}_{p\in\mathcal{P}}\left(\Delta_p^{\mathfrak{n}_p}\times\mathbb{Z}\left(p^{l_p}\right)\times G_p\right)$, де $G_p\approx F_p^*$.

Покажемо, що якщо група X топологічно не ізоморфна групам, переліченим у пп. і) – ііі), то X містить у якості топологічного прямого множника одну з груп, перелічених у лемах 1 – 3. Припустимо протилежне. Тоді $\mathfrak{n}_p=0$ при $p\geq 3$, а $\mathfrak{n}_2=0$, або $\mathfrak{n}_2=1$. Крім цього, $l_p=0$ та $G_p=0$ при $p\geq 7$. Нехай $p=3$ або $p=5$. Тоді група X може містити у якості топологічного прямого множника або групу $\mathbb{Z}(3)$, або групу $\mathbb{Z}(5)$. Нехай $p=2$. Якщо підгрупа F_2 є нескінченною, то група Y містить у якості прямого множника підгрупу вигляду $\mathop{P^*}_{m\in\mathbb{N}}\mathbb{Z}\left(2^{k_m}\right)$, $k_m\leq k_{m+1}$, $m\in\mathbb{N}$, а отже, група X містить у якості топологічного прямого множника підгрупу вигляду $\mathop{P}_{m\in\mathbb{N}}\mathbb{Z}\left(2^{k_m}\right)$, $k_m\leq k_{m+1}$, $m\in\mathbb{N}$, а це суперечить припущенню. Таким чином, підгрупа F_2 — скінченна, а отже, і підгрупа G_2 є скінченною, до того ж група X не містить топологічних прямих множників вигляду $\mathbb{Z}\left(2^k\right)\times\mathbb{Z}\left(2^k\right)$. Звідси отримуємо, що група X така, як у пп. і) – ііі), що також суперечить припущенню. Таким чином, ми довели, що група X містить у якості топологічного прямого множника одну з груп, перелічених у лемах 1 – 3. Твердження теореми 2 випливає тепер з лем 1 – 3. Теорему 2 повністю доведено.

Перейдемо до випадку дискретних періодичних абелевих груп X. Зазначимо, що тоді $\Gamma(X)=D(X)$ [15]. Наша мета — опис множин $\mathcal{A}_3$ та $\mathcal{B}_3$ у вказаному класі груп (див. нижче теорему 3). Нам знадобиться ще одна лема.

Лема 5. *Для кожної з груп вигляду* $X=\mathbb{Z}\left(p^\infty\right)$, *де* p — *просте та* $p\geq 3$, $X=\mathbb{Z}\left(2^\infty\right)\times\mathbb{Z}\left(2^\infty\right)$ *існують незалежні випадкові величини* ξ_j, $j=1, 2, 3$, *зі значеннями у* X *та з розподілами* μ_j *і автоморфізми* $\alpha, \beta\in\mathrm{Aut}(X)$ *такі,* *що лінійні форми* $L_1 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$ *та* $L_2 = \xi_1 + \alpha\xi_2 + \beta\xi_3$ *є незалежними, а всі* μ_j *не належать* $I(X)$.

Доведення. Нехай $X = \mathbb{Z}(p^\infty)$, де p — просте та $p \geq 3$. Розглянемо підгрупу $K \approx \mathbb{Z}(p^2)$ групи X. Тоді $K^* = L \approx \mathbb{Z}(p^2)$. Покажемо, що існують незалежні випадкові величини $\xi_j, j = 1, 2, 3,$ зі значеннями у K та з розподілами μ_j і автоморфізми $\alpha, \beta \in \mathrm{Aut}(K)$ такі, що лінійні форми $L_1 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$ та $L_2 = \xi_1 + \alpha\xi_2 + \beta\xi_3$ є незалежними, а всі μ_j не належать $I(K)$.

Нехай ζ — елемент порядку p^2 підгрупи L. Розглянемо на K функції $\rho(x) = 1 + \frac{1}{2}\mathrm{Re}(x, \zeta)$, $\rho'(x) = 1 + \frac{1}{2}\mathrm{Re}(x, 2\zeta)$. Нехай $\mu_1 = \mu_2$ — розподіли на групі K зі щільністю $\rho(x)$ відносно m_K, μ_3 — розподіл на групі K зі щільністю $\rho'(x)$ відносно m_K, ξ_j — незалежні випадкові величини зі значеннями у X та з розподілами μ_j.

Задамо автоморфізми $\alpha, \beta \in \mathrm{Aut}(K)$ за формулами $\alpha x = -x$, $\beta x = 2x$. Тоді $\tilde{\alpha} x = -x$, $\tilde{\beta} x = 2x$. Покажемо, що лінійні форми $L_1 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$ та $L_2 = \xi_1 - \xi_2 + 2\beta\xi_3$ є незалежними. Для цього досить переконатись у справедливості рівняння (2), яке набирає вигляду

$$\hat{\mu}_1(u+v)\hat{\mu}_2(u-v)\hat{\mu}_3(u+2v) = \hat{\mu}_1(u)\hat{\mu}_2(u)\hat{\mu}_3(u)\hat{\mu}_1(v)\hat{\mu}_2(-v)\hat{\mu}_3(2v), \quad u,\ v \in L.$$

Але це рівняння, як установлено при доведенні леми 1, виконується. Отже, лінійні форми L_1 та L_2 є незалежними.

Оскільки автоморфізми α, β — очевидно, автоморфізми усієї групи X, а випадкові величини $\xi_j, j = 1, 2, 3,$ можна вважати такими, що набувають значень у всій групі X, то для $X = \mathbb{Z}(p^\infty)$, де p — просте та $p \geq 3$, лему 5 доведено.

Нехай $X = \mathbb{Z}(2^\infty) \times \mathbb{Z}(2^\infty)$. Розглянемо підгрупу $K \approx \mathbb{Z}(2) \times \mathbb{Z}(2)$ групи X. Тоді $K^* = L \approx \mathbb{Z}(2) \times \mathbb{Z}(2)$. Будемо вважати, що $L = \mathbb{Z}(2) \times \mathbb{Z}(2)$. Покажемо, що існують незалежні випадкові величини $\xi_j, j = 1, 2, 3,$ зі значеннями у K та з розподілами μ_j і автоморфізми $\alpha, \beta \in \mathrm{Aut}(K)$ такі, що лінійні форми $L_1 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$ та $L_2 = \xi_1 + \alpha\xi_2 + \beta\xi_3$ є незалежними, а всі $\mu_j \notin I(K)$.

Позначимо елементи груп K та L через (a, b), $a, b \in \mathbb{Z}(2)$. Нехай автоморфізми $\alpha, \beta \in \mathrm{Aut}(K)$ мають вигляд $\alpha(a, b) = (a, a+b)$, $\beta(a, b) = (b, a)$. Тоді $\tilde{\alpha}(a, b) = (a+b, b)$, $\tilde{\beta}(a, b) = (b, a)$.

Розглянемо на групі K функцію $\rho(x) = 1 + \frac{1}{2}(x, \zeta)$, де $\zeta = (0, 1)$ — елемент підгрупи $\mathbb{Z}(2) \times \mathbb{Z}(2)$. Нехай $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu$ — розподіли на групі X зі щільністю $\rho(x)$ відносно m_X.

Припустимо, що $\xi_j, j = 1, 2, 3,$ — незалежні однаково розподілені з розподілом μ випадкові величини зі значеннями у групі K. Покажемо, що лінійні форми $L_1 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$ та $L_2 = \xi_1 + \alpha\xi_2 + \beta\xi_3$ є незалежними. Для цього досить переконатись у справедливості рівняння (2), яке набирає вигляду

$$\hat{\mu}(u+v)\hat{\mu}(u+\tilde{\alpha}v)\hat{\mu}(u+\tilde{\beta}v) = \hat{\mu}^3(u)\hat{\mu}(v)\hat{\mu}(\tilde{\alpha}v)\hat{\mu}(\tilde{\beta}v), \quad u,\ v \in L.$$

Але це рівняння, як установлено при доведенні леми 1, виконується. Отже, лінійні форми L_1 та L_2 є незалежними.

Оскільки автоморфізми α, β, очевидно, продовжуються природним чином до автоморфізмів усієї групи X, а випадкові величини $\xi_j, j = 1, 2, 3$, можна вважати такими, що набувають значень у всій групі X, то для групи $X = \mathbb{Z}(2^\infty)\times\mathbb{Z}(2^\infty)$ лему 5 також доведено.

Теорема 3. *Нехай* $\xi_j, j = 1, 2, 3$, — *незалежні випадкові величини зі значеннями у зліченній дискретній періодичній абелевій групі* X *та з розподілами* μ_j. *Позначимо через* G *групу вигляду:*

a) K, *де* K — *зліченна редукована 2-примарна група така, що усі її інваріанти Ульма – Капланського дорівнюють або* 0, *або* 1;

b) $\mathbb{Z}(2^\infty)$;

c) $\mathbb{Z}(2^\infty)\times K$, *де* K *така, як у п. a).*

Нехай $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2 + \alpha_3\xi_3$, $L_2 = \beta_1\xi_1 + \beta_2\xi_2 + \beta_3\xi_3$, *де* $\alpha_j, \beta_j \in \mathrm{Aut}(X)$. *Припустимо, що лінійні форми* L_1 *та* L_2 *є незалежними. Тоді:*

I. *Якщо:*

i) $X = G$, *то усі* μ_j — *вироджені розподіли;*

ii) $X = G\times\mathbb{Z}(3)$, *то хоча б два розподіли* μ_{j_1} *та* μ_{j_2} *ідемпотентні;*

iii) $X = G\times\mathbb{Z}(5)$, *то хоча б один розподіл* μ_{j_1} *ідемпотентний.*

II. *Якщо* X *не ізоморфна групам, переліченим у пп. i) – iii), то існують незалежні випадкові величини* $\xi_j, j = 1, 2, 3$, *зі значеннями у* X *та з розподілами* μ_j *і автоморфізми* $\alpha_j, \beta_j \in \mathrm{Aut}(X)$ *такі, що* L_1 *та* L_2 *є незалежними, а всі* μ_j *не належать* $I(X)$.

Доведення. Твердження i) та ii) випливають з теореми A. Твердження iii) доводиться так само, як п. iii) теореми 2.

Доведемо твердження II. Оскільки X — зліченна періодична дискретна абелева група, то X можна зобразити як слабкий прямий добуток p-примарних підгруп: $X = \mathop{P^*}_{p\in\mathcal{P}} X_p$, де $\mathcal{P}$ — множина простих чисел. Кожна p-примарна підгрупа X_p розкладається у прямий добуток $X_p = D_p\times N_p$, де D_p — це максимальна подільна підгрупа X_p, N_p — редукована зліченна p-примарна підгрупа. Група D_p ізоморфна слабкому прямому добутку груп $\mathbb{Z}(p^\infty)$. У будь-якій редукованій групі N_p можна виділити прямий множник $\mathbb{Z}(p^{l_p})$, тобто $N_p = \mathbb{Z}(p^{l_p})\times F_p$ [17] (§ 27). Таким чином, група X має вигляд $X = \mathop{P^*}_{p\in\mathcal{P}}\left(\left(\mathbb{Z}(p^\infty)\right)^{\mathfrak{n}_p*}\times N_p\right) = \mathop{P^*}_{p\in\mathcal{P}}\left(\left(\mathbb{Z}(p^\infty)\right)^{\mathfrak{n}_p*}\times\mathbb{Z}(p^{l_p})\times F_p\right)$, де $\mathfrak{n}_p$ — кардинальне число, а l_p — невід'ємне ціле число.

Нехай група X не ізоморфна групам, переліченим у пп. i) – iii). Беручи до уваги лему 5, бачимо, що можна обмежитися доведенням твердження II, припускаючи, що $\mathfrak{n}_p = 0$ при $p\geq 3$ та або $\mathfrak{n}_2 = 0$, або $\mathfrak{n}_2 = 1$. Аналогічно, з леми 3 випливає, що можна доводити твердження II, припускаючи, що $N_p = 0$ при $p\geq 7$ та $N_3\approx\mathbb{Z}(3)$, $N_5\approx\mathbb{Z}(5)$, причому X не містить N_3 та N_5 одночасно. Розглянемо прямий множник N_2. Оскільки не всі інваріанти Ульма – Капланського групи X дорівнюють або 0, або 1, то, як відмічено у [9], N_2 містить підгрупу $L\approx\mathbb{Z}(2^k)\times\mathbb{Z}(2^k)$ таку, що будь-який автоморфізм $\delta\in\mathrm{Aut}(L)$ продовжується до автоморфізму групи N_2, а отже, і до автоморфізму групи X. Твердження II випливає тепер з леми 3.

4. Теорема Скитовича – Дармуа для групи $X = \mathbb{R}^m\times\Delta_2\times\mathbb{Z}(2^\infty)\times D$. Для довільної локально компактної абелевої групи позначимо через C_X зв'язну компоненту нуля групи X, а через X_0 підгрупу у X, що складається з усіх компактних елементів групи X. Зазначимо, що підгрупи C_X та X_0 є характеристичними. У роботах [7 – 9] повністю описано скінченні, компактні та дискретні абелеві групи X, на яких із незалежності лінійних форм $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \ldots + \alpha_n\xi_n$ та $L_2 = \beta_1\xi_1 + \ldots + \beta_n\xi_n$, де $\alpha_j, \beta_j \in \mathrm{Aut}(X)$, випливає, що всі μ_j належать $\Gamma(X)$ (див. теорему А). Наступна теорема є узагальненням цих результатів.

Теорема 4. *Нехай $X = \mathbb{R}^m \times \Delta_2 \times \mathbb{Z}(2^\infty) \times D$, де D — зліченна дискретна абелева група, періодична частина якої D_0 є редукованою 2-примарною групою, усі інваріанти Ульма – Капланського якої дорівнюють або 0, або 1. Тоді для будь-яких незалежних випадкових величин $\xi_j, j = 1, 2, \ldots, n$, $n \geq 2$, зі значеннями у групі X та з розподілами μ_j і довільних $\alpha_j, \beta_j \in \mathrm{Aut}(X)$ із незалежності лінійних форм $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \ldots + \alpha_n\xi_n$ та $L_2 = \beta_1\xi_1 + \ldots + \beta_n\xi_n$ випливає, що всі μ_j належать $\Gamma(X)$.*

Доведення. Зазначимо спочатку, що якщо X — довільна локально компактна абелева група, то замкнена підгрупа F у X є характеристичною тоді і тільки тоді, коли її анулятор $H = A(Y, F)$ є характеристичною підгрупою групи Y. Оскільки лінійні форми L_1 та L_2 є незалежними, то характеристичні функції $\hat{\mu}_j(y)$ задовольняють рівняння (1). Покладемо $\nu_j = \mu_j * \overline{\mu_j}$. Тоді $\hat{\nu}_j(y) = \left|\hat{\mu}_j(y)\right|^2 \geq 0$ та характеристичні функції $\hat{\nu}_j(y)$ також задовольняють рівняння (1). Оскільки група X не містить підгрупу, топологічно ізоморфну групі обертів кола $\mathbb{T}$, то за груповим аналогом теореми Крамера [19] із того, що $\nu_j \in \Gamma(X)$, випливає, що $\mu_j \in \Gamma(X)$. Це дозволяє з самого початку доводити теорему 4, припускаючи, що $\hat{\mu}_j(y) \geq 0$.

Оскільки $\Delta_2^* = \mathbb{Z}(2^\infty)$, то з вигляду групи X випливає, що $Y \approx \mathbb{R}^m \times H$, де $H = \mathbb{Z}(2^\infty) \times \Delta_2 \times D^*$, а $C_Y \approx \mathbb{R}^m \times C_H$. Будемо вважати, що $Y = \mathbb{R}^m \times H$. Очевидно, що C_H — характеристична підгрупа групи Y. Розглянемо звуження рівняння (1) на C_H. Як доведено у [7], усі $\hat{\mu}_j(y) = 1$ при $y \in C_H$. Отже, всі $\sigma(\mu_j) \subset A(X, C_H) = G$, де G, як легко бачити, має вигляд

$$G = \mathbb{R}^m \times \Delta_2 \times \mathbb{Z}(2^\infty) \times D_0 \tag{16}$$

(D_0 — періодична частина групи D). Оскільки C_H — характеристична підгрупа групи Y, то G — характеристична підгрупа групи X, та можна доводити теорему 4, припускаючи, що X має вигляд (16).

Отже, $Y \approx \mathbb{R}^m \times \mathbb{Z}(2^\infty) \times \Delta_2 \times L$, де $L = D_0^*$. Будемо вважати, що $Y = \mathbb{R}^m \times \mathbb{Z}(2^\infty) \times \Delta_2 \times L$. Підгрупа $\mathbb{Z}(2^\infty) \times D_0$, очевидно, є замкненою та характеристичною, оскільки складається з усіх елементів скінченного порядку групи X. Отже, її анулятор $A\left(Y, \mathbb{Z}(2^\infty) \times D_0\right) = \mathbb{R}^m \times \mathbb{Z}(2^\infty)$ — характеристична підгрупа групи Y. Таким чином, $\mathbb{Z}(2^\infty)$ — також характеристична підгрупа групи Y. Розглянемо звуження рівняння (1) на $\mathbb{Z}(2^\infty)$. Як випливає з теореми А, $\hat{\mu}_j(y) = 1$ при $y \in \mathbb{Z}(2^\infty)$. Отже, усі $\sigma(\mu_j) \subset A\left(X, \mathbb{Z}(2^\infty)\right) = K$, де

$$K = \mathbb{R}^m \times \mathbb{Z}(2^\infty) \times D_0, \tag{17}$$

а $K^* = \mathbb{R}^m \times \Delta_2 \times L$. Оскільки $\mathbb{Z}(2^\infty)$ — характеристична підгрупа групи Y, то K — характеристична підгрупа групи X, та можна доводити теорему 4, припускаючи, що X має вигляд (17).

Отже, $Y \approx \mathbb{R}^m \times \Delta_2 \times L$. Будемо вважати, що $Y = \mathbb{R}^m \times \Delta_2 \times L$. Підгрупа $Y_0 = \Delta_2 \times L$ — характеристична. Як доведено у [9], усі звуження $\hat{\mu}_j(y) = 1$ при $y \in \Delta_2 \times L$. Таким чином, усі $\sigma(\mu_j) \subset A(X, \Delta_2 \times L) = \mathbb{R}^m$. Оскільки $\mathbb{R}^m$ — характеристична підгрупа групи X, доведення теореми 4 зводиться до її доведення для групи $X = \mathbb{R}^m$. Теорема 4 випливає тепер з теореми Гур'є – Олкіна [4].

Висловлюю подяку Г. М. Фельдману за увагу до роботи та О. І. Ільїнському за низку зауважень, що сприяли покращанню викладання результатів роботи.

1. *Скитович В. П.* Об одном свойстве нормального распределения // Докл. АН СССР. – 1953. – **89**. – С. 217 – 219.
2. *Darmois G.* Analyse generale des liaisons stochastiques // Rev. Inst. int. statist. – 1953. – **21**. – P. 2 – 8.
3. *Каган А. М., Линник Ю. В., Рао С. Р.* Характеризационные задачи математической статистики. – М.: Наука, 1972. – 656 с.
4. *Ghurye S. G., Olkin I.* A characterization of the multivariate normal distribution // Ann. Math. Statist. – 1962. – **33**. – P. 533 – 541.
5. *Neuenschwander D., Roynette B., Schott R.* Characterization of Gauss measures on nilpotent Lie groups and symmetric spaces // C. r. Acad. sci. Ser. I. – 1997. – **324**. – P. 87 – 92.
6. *Neuenschwander D., Schott R.* The Bernstein and Scitovich – Darmois characterization theorems for Gaussian distributions on groups, symmetric spaces, and quantum groups // Exp. Math. – 1997. – **15**. – P. 289 – 314.
7. *Фельдман Г. М.* К теореме Скитовича – Дармуа на абелевых группах // Теория вероятностей и ее применения. – 1992. – **37**, № 4. – С. 695 – 708.
8. *Фельдман Г. М.* Теорема Скитовича – Дармуа для компактных групп // Там же. – 1996. – **41**, № 4. – С. 901 – 906.
9. *Фельдман Г. М.* Теорема Скитовича – Дармуа для дискретных периодических абелевых групп // Там же. – 1997. – **42**, № 4. – С. 747 – 756.
10. *Фельдман Г. М.* К теореме Скитовича – Дармуа для конечных абелевых групп // Там же. – 2000. – **45**, № 3. – С. 603 – 607.
11. *Feldman G. M., Graczyk.* On the Scitovich – Darmois theorem on compact Abelian groups // J. Theor. Probab. – 2000. – **13**, № 3. – P. 859 – 869.
12. *Грачик П., Фельдман Г. М.* Независимые линейные статистики на конечных абелевых группах // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 4. – С. 441 – 448.
13. *Feldman G. M., Graczyk.* On the Scitovich – Darmois theorem for discrete Abelian groups // Univ. Angers. Prepubl. dép. math. – 2002. – № 155.
14. *Feldman G. M.* A characterization of Gaussian distribution on Abelian groups // Probab. Theor Relat. Fields. – 2003. – **126**, № 1. – P. 91 – 102.
15. *Parthasarathy K. R.* Probability measures on metric spaces. – New York; London: Acad. Press, 1967. – 276 p.
16. *Хьюитт Э., Росс К.* Абстрактный гармонический анализ: В 2 т. – М.: Наука, 1975. – Т. 1. – 656 с.
17. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы: В 2 т. – М.: Наука, 1974. – Т. 1. – 336 с.
18. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы: В 2 т. – М.: Наука, 1977. – Т. 2. – 416 с.
19. *Фельдман Г. М.* О разложении гауссового распределения на группах // Теория вероятностей и ее применения. – 1977. – **22**, № 1. – С. 136 – 143.

Одержано 17.06.2003