УДК 517.51

В. В. Михайлюк (Чернівец. нац. ун-т)

НАРІЗНО НЕПЕРЕРВНІ ФУНКЦІЇ НА ДОБУТКАХ І ЇХ ЗАЛЕЖНІСТЬ ВІД $\aleph$ КООРДИНАТ

We investigate necessary and sufficient conditions on topological spaces $X = \prod_{s\in S} X_s$ and $Y = \prod_{t\in T} Y_t$ for the every separately continuous function $f\colon X\times Y \to \mathbb{R}$ to be dependent on at most $\aleph$ coordinates with respect to certain coordinate.

Досліджуються необхідні і достатні умови на топологічні добутки $X = \prod_{s\in S} X_s$ і $Y = \prod_{t\in T} Y_t$ для того, щоб кожна нарізно неперервна функція $f\colon X\times Y \to \mathbb{R}$ залежала не більше ніж від $\aleph$ координат відносно тієї чи іншої змінної.

1. Нехай $(X_s)_{s\in S}$ — сім'я множин, $X = \prod_{s\in S} X_s$, Z — довільна множина і $f\colon X\to Z$ — довільне відображення. Говорять, що відображення f *зосереджене на множині* $T\subseteq S$, якщо $f(x') = f(x'')$, як тільки $x', x''\in X$ і $x'\big|_T = x''\big|_T$. Якщо, до того ж, $|T|\le\aleph$, то говорять, що f *залежить не більше ніж від* $\aleph$ *координат*. Якщо Y — ще якась множина, то говорять, що відображення $g\colon X\times Y\to Z$ *зосереджене на множині* T *відносно першої змінної*, якщо асоційоване з g відображення $\varphi\colon X\to Z^Y$, $\varphi(x)(y) = g(x, y)$, зосереджене на множині T, а коли при цьому $|T|\le\aleph$, то говорять, що g *залежить не більше ніж від* $\aleph$ *координат відносно першої змінної*. Аналогічно вводиться поняття залежності відображення $g\colon X\times Y\to Z$ не більше ніж від $\aleph$ координат відносно другої змінної. Тут і далі через $\aleph$ ми позначаємо нескінченний кардинал. Для скорочення замість точного виразу „залежить не більше ніж від $\aleph$ координат" будемо вживати коротший вираз „залежить від $\aleph$ координат".

Для довільної сім'ї $\mathcal{A} = (A_i\colon i\in I)$ потужність множини I будемо називати *потужністю сім'ї* $\mathcal{A}$. Нагадаємо, що сім'я $\mathcal{A} = (A_i\colon i\in I)$ підмножин A_i топологічного простору X називається *локально скінченною*, якщо для кожної точки $x\in X$ існує такий її окіл U, що множина $\{i\in I\colon A_i\cap U\ne\varnothing\}$ є скінченною, *точково скінченною* чи $\aleph$*-точковою*, якщо для кожного $x\in X$ множина $\{i\in I\colon x\in A_i\}$ є скінченною чи має потужність, що не перевищує $\aleph$.

У даній роботі ми будемо використовувати наступні властивості топологічних просторів, які описуються в термінах сімей відкритих непорожніх множин:

$(\mathrm{I}_\aleph)$ кожна локально скінченна сім'я відкритих непорожніх підмножин топологічного простору має потужність, що не перевищує $\aleph$;

$(\mathrm{II}_\aleph)$ кожна точково скінченна сім'я відкритих непорожніх підмножин топологічного простору має потужність, що не перевищує $\aleph$;

$(\mathrm{III}_\aleph)$ кожна $\aleph$-точкова сім'я відкритих непорожніх підмножин топологічного простору має потужність, що не перевищує $\aleph$.

Зауважимо, що топологічний простір з $(\mathrm{I}_\aleph)$ — це *псевдо-*$\aleph^+$*-компактний простір*, де $\aleph^+$ — наступний після $\aleph$ кардинал. За допомогою розробленої в [1] техніки, основну роль у якій відіграє лема Шаніна [2, с. 185], що часто використовується при дослідженні топологічних властивостей добутків, в [3] (твердження 1) доведено, що топологічний добуток має властивість $(\mathrm{I}_\aleph)$, $(\mathrm{II}_\aleph)$ чи $(\mathrm{III}_\aleph)$, якщо кожен його скінченний піддобуток має відповідну властивість. Очевидно також, що $(\mathrm{III}_\aleph)\Rightarrow(\mathrm{II}_\aleph)\Rightarrow(\mathrm{I}_\aleph)$.

Топологічний простір X називається $\aleph$*-компактним*, якщо з довільного відкритого покриття $\mathcal{U}$ простору X з $|\mathcal{U}| \leq \aleph$ можна виділити скінченне підпокриття. Зокрема, $\aleph_0$-компактний простір називається *зліченно компактним*.

Залежність неперервних відображень на добутках від $\aleph$ координат досліджувалась у працях багатьох математиків середини XX століття (див. [2, с. 187]). Н. Нобл і М. Ульмер в [1] отримали найбільш загальний результат у цьому напрямку, встановивши тісний зв'язок такої залежності з псевдо-$\aleph$-компактністю. Зокрема, з їхніх результатів випливає наступне твердження.

Теорема (Нобл, Ульмер). *Нехай $X = \prod_{s \in S} X_s$ — добуток нетривіальних ($|X_s| > 1$) цілком регулярних просторів X_s, причому $|S| > \aleph_i$, де $\aleph_i$ — нескінченний кардинал. Тоді кожна неперервна функція $f: X \to \mathbb{R}$ залежить від $\aleph_i$ координат тоді і тільки тоді, коли простір X є псевдо-$\aleph_{i+1}$-компактним, де $\aleph_{i+1}$ — наступний після $\aleph_i$ кардинал.*

Природним є вивчення умов залежності для відображень, що мають властивості, слабші за неперервність, наприклад, для нарізно неперервних функцій, тобто функцій, неперервних відносно кожної змінної. З іншого боку, в роботі [4], де описано множини точок розриву нарізно неперервних функцій двох змінних, що є добутками метризовних компактів, було виявлено зв'язок таких досліджень із залежністю функцій від зліченної кількості координат.

Умови залежності від $\aleph$ координат нарізно неперервних функцій вивчалися в [3], де було встановлено, що, як і для неперервних функцій в [1], ці питання тісно пов'язані з властивостями $(\mathrm{I}_\aleph)$, $(\mathrm{II}_\aleph)$ і $(\mathrm{III}_\aleph)$ топологічних добутків. У роботі [3] показано (теорема 2), що якщо кожна нарізно неперервна функція $f: X \times Y \to \mathbb{R}$, де X — цілком регулярний простір, $Y = \prod_{t \in T} Y_t$ — добуток нетривіальних цілком регулярних просторів Y_t і $|T| > \aleph$, залежить від $\aleph$ координат відносно змінної y, то добуток $X \times Y$ має властивість $(\mathrm{I}_\aleph)$ і хоча б один із просторів X і Y має властивість $(\mathrm{II}_\aleph)$. І навпаки (теореми 3–5), кожна нарізно неперервна функція $f: X \times Y \to \mathbb{R}$, де X і Y такі, як і раніше, але не обов'язково цілком регулярні, залежить від $\aleph$ координат відносно y, якщо виконується хоча б одна з наступних умов:

(i) X має властивість $(\mathrm{III}_\aleph)$, а Y — властивість $(\mathrm{I}_\aleph)$;

(ii) X має властивість $(\mathrm{II}_\aleph)$, а Y є псевдо-$\aleph_0$-компактним;

(iii) X — зліченно компактний, а Y має властивість $(\mathrm{II}_\aleph)$.

У випадку, коли всі простори X_s і Y_t зліченно компактні регулярні, кожна нарізно неперервна функція $f: X \times Y \to \mathbb{R}$ на добутку просторів $X = \prod_{s \in S} X_s$ і $Y = \prod_{t \in T} Y_t$, де $|T| > \aleph$, залежить від $\aleph$ координат відносно другої змінної $\left(\text{чи просто від } \aleph \text{ координат як функція на добутку } \prod_{s \in S} X_s \times \prod_{t \in T} Y_t\right)$ тоді і тільки тоді, коли X або Y має властивість $(\mathrm{II}_\aleph)$ (теорема 6).

Серед цих результатів привертає увагу той факт, що часто на X і Y накладаються симетричні умови, хоча вивчається залежність відносно змінної y. Це випливає з симетричності необхідної умови залежності (теорема 2 з [3]) і симетричності достатніх умов (ii) і (iii) для зліченних компактів. У зв'язку з цим природно виникають наступні питання: чи можна в (i) умови на простори X і Y поміняти місцями; чи можна в умовах (ii) та (iii) відповідно псевдо-$\aleph$-компактність та зліченну компактність послабити до $(\mathrm{I}_\aleph)$ і чи є справедливим обернене твердження до теореми 2 з [3]?

У даній роботі ми покажемо, що всі ці питання мають, взагалі кажучи, негативні відповіді. Крім того, буде встановлено, що в дослідженнях залежності нарізно неперервних функцій на добутках від $\aleph$ координат важливу роль може відігравати беровість. Зокрема, буде показано, що при умові беровості простору X відповідь на перше з сформульованих питань є позитивною, причому при доведенні цього використовуються теореми про величину множини точок неперервності нарізно неперервних функцій.

2. Розпочнемо з достатніх умов залежності. Множина $S_0 \subseteq S$ називається *найменшою множиною, на якій відображення* $f\colon X \to Z$, *де* $X = \prod_{s\in S} X_s$, *зосереджене,* якщо f зосереджене на S_0 і для довільної множини $S_1 \subseteq S$, на якій f зосереджене, має місце включення $S_0 \subseteq S_1$. Аналогічно вводиться поняття найменшої множини, на якій відображення зосереджене відносно тієї чи іншої змінної. Наступне твердження (див. [4], наслідок) описує найменші множини для нарізно неперервних відображень.

Твердження 1. *Нехай* $X = \prod_{s\in S} X_s$ *— топологічний добуток сім'ї топологічних просторів* X_s, Y *— деяка множина,* Z *— хаусдорфовий топологічний простір і* $f\colon X \times Y \to Z$ *— неперервне відносно першої змінної відображення. Тоді множина*

$$S_0 = \left\{s \in S\colon (\exists\, y \in Y)(\exists\, u, v \in X)\left(u|_{S\setminus\{s\}} = v|_{S\setminus\{s\}} \quad i \quad f(u, y) \neq f(v, y)\right)\right\}$$

є найменшою множиною, на якій f *зосереджене відносно першої змінної.*

Наступний результат дає можливість розглядати замість простору Y з властивістю $(\mathrm{III}_\aleph)$ канторовий куб відповідної ваги.

Теорема 1. *Нехай* X *— топологічний простір,* $Y = \prod_{t\in T} Y_t$ *— добуток сім'ї топологічних просторів* Y_t *з властивістю* $(\mathrm{III}_\aleph)$ *і* $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ *— нарізно неперервна функція, яка не залежить від* $\aleph$ *координат відносно другої змінної. Тоді існують множина* $S \subseteq T$ *з* $|S| > \aleph$ *і нарізно неперервна функція* $g\colon X \times Y_1 \to \mathbb{R}$, *де* $Y_1 = \{0, 1\}^S$, *яка не залежить від* $\aleph$ *координат відносно другої змінної.*

Доведення. Згідно з твердженням 1 множина

$$T_0 = \left\{t \in T\colon (\exists\, x \in X)(\exists\, y, z \in Y)\left(y|_{T\setminus\{t\}} = z|_{T\setminus\{t\}} \quad \text{і} \quad f(x, y) \neq f(x, z)\right)\right\}$$

є найменшою множиною, на якій f зосереджене. З умови теореми випливає, що $|T_0| > \aleph$. Для кожного $t \in T_0$ виберемо точки $x_t \in X$, $y_t, z_t \in Y$, які фігурують в означенні множини T_0. Використовуючи неперервність f відносно другої змінної, знайдемо такі базисні відкриті околи $\tilde{V}_t = \prod_{s\in T} \tilde{V}_s^{(t)}$ і $\tilde{W}_t = \prod_{s\in T} \tilde{W}_s^{(t)}$ відповідно точок y_t і z_t в Y, що $f(x_t, y) \neq f(x_t, z)$ для довільних $y \in \tilde{V}_t$ і $z \in \tilde{W}_t$. Покладемо $V_s^{(t)} = \tilde{V}_s^{(t)} \cap \tilde{W}_s^{(t)}$ для кожного $s \in T\setminus\{t\}$, $V_t^{(t)} = \tilde{V}_t^{(t)}$ і $V_t = \prod_{s\in T} V_s^{(t)}$. Зауважимо, що V_t — відкритий окіл точки y_t, $V_t \subseteq \tilde{V}_t$, причому для кожного $y \in V_t$ точка $z \in Y$, яка визначається таким чином:

$$z(s) = \begin{cases} y(s), & s \in T\setminus\{t\}, \\ z_t(t), & s = t, \end{cases}$$

входить у $\tilde{W}_t$ і, отже, $f(x_t, y) \neq f(x_t, z)$.

Розглянемо сім'ю $\mathcal{V} = (V_t\colon t \in T_0)$. Оскільки простір Y має властивість $(\mathrm{III}_\aleph)$ і $|T_0| > \aleph$, то $\mathcal{V}$ не є $\aleph$-точковою. Тому існують множина $S \subseteq T_0$ і точка $y^* \in Y$ такі, що $|S| > \aleph$ і $y^* \in V_s$ для всіх $s \in S$. Для кожного $s \in S$ позначимо $a_s = y^*(s)$, $b_s = z_s(s)$ і покладемо

$$z_s^*(t) = \begin{cases} y^*(t), & t \in T \setminus \{s\}, \\ b_t, & s = t. \end{cases}$$

Зауважимо, що $y^*\big|_{T\setminus\{s\}} = z_s^*\big|_{T\setminus\{s\}}$ і $f(x_s, y^*) \neq f(x_s, z_s^*)$. Крім того, простір $Y^* = \prod_{t\in S}\{a_t, b_t\} \times \prod_{t\in T\setminus S}\{y^*(t)\}$ гомеоморфний $\{0,1\}^S$, причому звуження $f^* = f|_{X\times Y^*}$ є нарізно неперервним відображенням, для якого множина S є найменшою множиною, на якій f^* зосереджене відносно другої змінної. Залишилось взяти неперервне відображення $\varphi\colon \{0,1\}^S \to Y^*$, яке визначається формулою

$$\varphi(a)(t) = \begin{cases} a_t, & t \in S, \quad a(t) = 0, \\ b_t, & t \in S, \quad a(t) = 1, \\ y^*(t), & \qquad t \in T \setminus S, \end{cases}$$

і розглянути функцію $g\colon X \times Y_1 \to \mathbb{R}$, де $Y_1 = \{0,1\}^S$ і $g(x, a) = f(x, \varphi(a))$.

Для базисної відкритої множини $V = \prod_{t\in T} V_t$ в топологічному добутку $Y = \prod_{t\in T} Y_t$ і множини $B \subseteq T$ через $V|_B$ позначатимемо множину $\prod_{t\in B} V_t$, а через $R(V)$ — скінченну множину $\{t \in T\colon V_t \neq Y_t\}$.

Ми будемо використовувати також наступний результат, який є переформулюванням леми Шаніна [2, с. 185] для ізольованих кардиналів.

Твердження 2. *Нехай $(A_i\colon i \in I)$ — довільна сім'я скінченних множин A_i, причому $|I| > \aleph$. Тоді існують скінченна множина $B \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} A_i$ і множина $J \subseteq I$ такі, що $|J| > \aleph$ і $A_i \cap A_j = B$ для довільних різних $i, j \in J$.*

Тепер розглянемо функції на добутку берівського простору і канторового куба.

Теорема 2. *Нехай X — берівський простір, що має властивість $(\mathrm{I}_\aleph)$, і $Y = \{0,1\}^T$. Тоді кожна нарізно неперервна функція $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ залежить від $\aleph$ координат відносно другої змінної.*

Доведення. Припустимо, що це не так, тобто існує така нарізно неперервна функція $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$, яка не залежить від $\aleph$ координат відносно змінної y. Зрозуміло, що це можливо лише у випадку, коли $|T| > \aleph$. Тоді згідно з твердженням 1 $|T_0| > \aleph$, де

$$T_0 = \big\{t \in T\colon (\exists\, x \in X)(\exists\, y, z \in Y)\big(y|_{T\setminus\{t\}} = z|_{T\setminus\{t\}} \quad \text{і} \quad f(x, y) \neq f(x, z)\big)\big\}.$$

Для кожного $n \in \mathbb{N}$ покладемо

$$T_n = \left\{t \in T\colon (\exists\, x \in X)(\exists\, y, z \in Y)\left(y|_{T\setminus\{t\}} = z|_{T\setminus\{t\}} \quad \text{і} \quad |f(x, y) - f(x, z)| > \frac{1}{n}\right)\right\}.$$

Зрозуміло, що $T_0 = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} T_n$. Оскільки $\aleph$ — нескінченний кардинал, то інує такий номер n_0, що $\left|T_{n_0}\right| > \aleph$.

Позначимо $S = T_{n_0}$, $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$ і для кожного $t \in S$ виберемо точки $\tilde{x}_t \in X$, $y_t, z_t \in Y$, які фігурують в означенні множини T_{n_0}. Використовуючи неперервність функції f відносно змінної x, для кожного $s \in S$ знайдемо відкритий окіл $\tilde{U}_s$ точки $\tilde{x}_s$ в X такий, що $|f(x, y_t) - f(x, z_t)| > \varepsilon$ для довільного $x \in \tilde{U}_s$. Зауважимо, що канторовий куб Y є конаміоковим (див. наслідок 1.2 або теорему 2.2 з [5]), тобто для довільного берівського простору X' і нарізно неперервної функції $g\colon X' \times Y \to \mathbb{R}$ існує така скрізь щільна G_δ-множина A в X', що g є неперервною в кожній точці множини $A \times Y$. Тому в кожній відкритій непорожній множині $\tilde{U}_s$ можна вибрати точку x_s так, що f є неперервною в точках (x_s, y_s) і (x_s, z_s). Для кожного $s \in S$ виберемо відкритий окіл U_s точки x_s в X і базисні відкриті околи V_s і W_s відповідно точок y_s і z_s в Y такі, що $R(V_s) = R(W_s)$, $V_s|_{T \setminus \{s\}} = W_s|_{T \setminus \{s\}}$ і $|f(x, y) - f(x, z)| > \varepsilon$ для довільних $x \in U_s$, $y \in V_s$ і $z \in W_s$.

Розглянемо сім'ю $(R(V_s)\colon s \in S)$, що складається з скінченних множин $R(V_s)$. Згідно з твердженням 2 існують скінченна множина $B \subseteq S$ і множина $S_1 \subseteq S$ такі, що $|S_1| > \aleph$, $B \cap S_1 = \varnothing$ і $R(V_s) \cap R(V_t) = B$ для довільних різних $s, t \in S_1$. Оскільки множина $\{0,1\}^B$ скінченна і всі множини $V_s|_B$, $s \in S_1$, непорожні, то існує таке $y' \in \{0,1\}^B$, що множина $S_0 = \{s \in S_1\colon y' \in V_s|_B\}$ має потужність, що перевищує $\aleph$.

Покажемо, що сім'я $(U_s\colon s \in S_0)$ є локально скінченною в X. Нехай $x_0 \in X$. Використовуючи компактність простору Y і неперервність функції $f^{x_0}\colon Y \to \mathbb{R}$, $f^{x_0}(y) = f(x_0, y)$, легко знайти таку скінченну множину $B_0 \subseteq T$, що $|f(x_0, y) - f(x_0, z)| < \varepsilon$ для довільних $y, z \in Y$ з $y|_{B_0} = z|_{B_0}$. Розглянемо точки $y_0, z_0 \in Y$, які визначаються таким чином:

$$y_0(t) = \begin{cases} y'(t), & t \in B, \\ y_s(t), & t \in R(V_s) \setminus B, \quad s \in S_0 \setminus B_0, \\ 0 & \text{— в іншому випадку,} \end{cases}$$

$$z_0(t) = \begin{cases} y'(t), & t \in B, \\ z_s(t), & t \in R(V_s) \setminus B, \quad s \in S_0 \setminus B_0, \\ 0 & \text{— в іншому випадку.} \end{cases}$$

Зауважимо, що згідно з вибором B і S_1 множини $R(V_s) \setminus B$ попарно не перетинаються при $s \in S_1$ і означення є коректними. Оскільки $y_s|_{S \setminus \{s\}} = z_s|_{S \setminus \{s\}}$ для кожного $s \in S_0$, то $y_s(t) = z_s(t)$ для довільних $t \in B_0$ і $s \in S_0 \setminus B_0$. Тому $y_0|_{B_0} = z_0|_{B_0}$ і $|f(x_0, y_0) - f(x_0, z_0)| < \varepsilon$. Використовуючи неперервність f відносно змінної x, виберемо такий окіл U_0 точки x_0 в X, що $|f(x, y_0) - f(x, z_0)| < \varepsilon$ для кожного $x \in U_0$.

З іншого боку, оскільки $S_0 \cap B = \varnothing$, то $V_s|_B = W_s|_B$, а тому $y' \in W_s|_B$ для кожного $s \in S_0$. Крім того, $y_0|_{R(V_s) \setminus B} = y_s|_{R(V_s) \setminus B}$ і $z_0|_{R(V_s) \setminus B} = z_s|_{R(V_s) \setminus B}$ для всіх $s \in S_0 \setminus B_0$. Врахувавши, що $y_s \in V_s$ і $z_s \in W_s$, одержимо $y_0|_{R(V_s)} \in V_s|_{R(V_s)}$ і $z_0|_{R(V_s)} \in W_s|_{R(V_s)}$, тому $y_0 \in V_s$ і $z_0 \in W_s$, адже $R(W_s) = R(V_s)$ для кожного $s \in S_0 \setminus B_0$. Згідно з вибором околів U_s, V_s і W_s маємо $|f(x, y_0) - f(x, z_0)| > \varepsilon$ для довільних $x \in U_s$ і $s \in S_0 \setminus B_0$.

Отже, $U \cap U_s = \varnothing$ для кожного $s \in S_0 \setminus B_0$, тому множина $\{s \in S_0\colon$

$U_0 \cap U_s \neq \varnothing\}$ є скінченною, а сім'я $\{U_s : s \in S_0\}$ — локально скінченною в X. А це суперечить тому, що X має властивість $(\mathrm{I}_{\aleph})$, адже $|S_0| > \aleph$.

З теорем 1 і 2 безпосередньо випливає основний результат даного пункту.

Теорема 3. *Нехай X — берівський простір, який має властивість $(\mathrm{I}_{\aleph})$, $Y = \prod_{t \in T} Y_t$ — добуток сім'ї топологічних просторів Y_t, який має властивість $(\mathrm{I}_{\aleph})$. Тоді кожна нарізно неперервна функція $f: X \times Y \to \mathbb{R}$ залежить від $\aleph$ координат відносно другої змінної.*

3. Тепер покажемо, що умова беровості в теоремі 3 є істотною. Розпочнемо з допоміжних результатів.

Твердження 3. *Нехай X — топологічний простір, $\mathcal{U}$ — нескінченна локально скінченна сім'я непорожніх відкритих множин в X. Тоді існує така сім'я $\mathcal{V}$ непорожніх попарно неперетинних відкритих в X множин, що $|\mathcal{V}| = |\mathcal{U}|$.*

Доведення. Нехай $\mathcal{U} = (U_\alpha : \alpha < \beta)$, де β — перший ординал потужності $|\mathcal{U}|$. Сім'ю $\mathcal{V}$ будуватимемо індуктивно.

Виберемо довільну точку $x_1 \in U_1$ і такий відкритий окіл V_1 точки x_1, що множина $A_1 = \{\alpha < \beta : V_1 \cap U_\alpha \neq \varnothing\}$ є скінченною.

Припустимо, що попарно неперетинні множини V_ξ при $\xi < \alpha < \beta$ побудовано так, що множини $A_\xi = \left\{\gamma < \beta : V_\xi \cap U_\gamma \neq \varnothing\right\}$ є скінченними. Зауважимо, що $\left|\bigcup_{\xi<\alpha} A_\xi\right| < |\beta|$. Справді, якщо α — скінченний ординал, то $\left|\bigcup_{\xi<\alpha} A_\xi\right| < \aleph_0 \leq |\beta|$. Якщо ж α — нескінченний ординал, то $\left|\bigcup_{\xi<\alpha} A_\xi\right| \leq \aleph_0 |\alpha| = |\alpha| < |\beta|$. Тому існує таке $\gamma < \beta$, що $\gamma \notin \bigcup_{\xi<\alpha} A_\xi$, тобто $U_\gamma \cap \left(\bigcup_{\xi<\alpha} V_\xi\right) = \varnothing$. Виберемо довільну точку $x_\gamma \in U_\gamma$ і відкритий окіл V_α точки x_γ такий, що множина $A_\alpha = \left\{\xi < \beta : V_\alpha \cap U_\xi \neq \varnothing\right\}$ є скінченною. Сім'я $\mathcal{V} = (V_\alpha : \alpha < \beta)$ — шукана.

Зауважимо, що у випадку, коли простір X є регулярним, можна побудувати дискретну сім'ю $\mathcal{V}$ відповідної потужності.

Твердження 4. *Нехай топологічний простір X має властивість $(\mathrm{II}_{\aleph})$, Y — скрізь щільна в X множина. Тоді простір Y з індукованою з X топологією має властивість $(\mathrm{I}_{\aleph})$.*

Доведення. Нехай $\mathcal{U}$ — локально скінченна сім'я непорожніх відкритих в Y множин. Згідно з твердженням 3 існує сім'я $\mathcal{V} = (V_i : i \in I)$ попарно неперетинних непорожніх відкритих в Y множин V_i така, що $|I| = |\mathcal{U}|$. Для кожного $i \in I$ виберемо непорожню відкриту множину U_i в X таку, що $U_i \cap Y = V_i$. Зауважимо, що сім'я $(U_i : i \in I)$ складається з попарно неперетинних множин. Оскільки X має властивість $(\mathrm{II}_{\aleph})$, то $|I| \leq \aleph$, тобто $|\mathcal{U}| \leq \aleph$. Отже, Y має властивість $(\mathrm{I}_{\aleph})$.

Приклад. Нехай $Y = [0, 1]^S$, $X = C_p(Y)$ — простір неперервних функцій на Y із топологією поточкової збіжності і $f: X \times Y \to \mathbb{R}$ — функція обчислення, тобто $f(x, y) = x(y)$.

Зрозуміло, що f — нарізно неперервна функція. Оскільки, як легко бачити, кожний скінченний степінь $[0, 1]^n$ має властивість $(\mathrm{III}_{\aleph})$, то згідно з твердженням 1 з [3] Y також має властивість $(\mathrm{III}_{\aleph})$. Аналогічно можна показати, що $\mathbb{R}^Y$ має властивість $(\mathrm{II}_{\aleph})$. Врахувавши, що X є щільним в $\mathbb{R}^Y$, на підставі твердження 4 одержимо, що X має властивість $\left(\mathrm{I}_{\aleph_0}\right)$. Зафіксуємо $s \in S$. Позначимо через x_s функцію з X, яка визначається таким чином: $x_s(y) = y(s)$. Виберемо довільні точки $y_s, z_s \in Y$ такі, що $y_s|_{S\setminus\{s\}} = z_s|_{S\setminus\{s\}}$ і $y_s(s) \neq z_s(s)$, тобто $f(x_s, y_s) \neq f(x_s, z_s)$. Отже, згідно з твердженням 2 $s \in S_0$, де S_0 — найменша множина, на якій функція f зосереджена відносно змінної y. Отже, $S_0 = S$.

Взявши S так, щоб $|S| > \aleph$, одержимо приклад нарізно неперервної функції на добутку просторів X і Y, де X має властивість $(\mathrm{I}_{\aleph})$, а Y — властивість $(\mathrm{III}_{\aleph})$, яка не залежить від $\aleph$ координат відносно змінної y. Отже, в теоремі 3 умову беровості простору X зняти не можна, навіть якщо властивість $(\mathrm{I}_{\aleph})$ підсилити до $\left(\mathrm{I}_{\aleph_0}\right)$.

4. Розглянемо простори, які будемо використовувати при побудові прикладів, що показують істотність відповідних властивостей просторів X і Y в достатніх умовах залежності нарізно неперервних функцій на добутках від $\aleph$ координат. Крім того, встановимо зв'язок між цими властивостями.

Твердження 5. *Кожний хаусдорфовий псевдо-$\aleph_0$-компактний простір є берівським.*

Доведення. Нехай X — псевдо-$\aleph_0$-компактний простір, тобто кожна локально скінченна сім'я відкритих непорожніх множин в X є скінченною. Покажемо, що простір X — берівський.

Нехай U_0 — довільна відкрита непорожня множина в X. Припустимо, що U_0 першої категорії в X. Тоді існує послідовність $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ ніде не щільних замкнених множин F_n в X така, що $U_0 \subseteq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$. Легко побудувати спадну послідовність $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ відкритих в X непорожніх множин U_n таку, що $\overline{U_n} \subseteq U_{n-1}$ і $U_n \cap F_n = \varnothing$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Зауважимо, що

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U_n} = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n\right) \cap U_0 = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n\right) \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) =$$

$$= \bigcup_{m=1}^{\infty} \left(\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n\right) \cap F_m\right) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (U_n \cap F_n) = \varnothing.$$

Тому послідовність $\left(\overline{U_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ є локально скінченною, отже, послідовність $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ також локально скінченна. А це суперечить псевдо-$\aleph_0$-компактності простору X. Отже, U_0 другої категорії в X, а X — берівський простір.

Нагадаємо, що для довільної функції $f\colon X \to \mathbb{R}$ множина $\operatorname{supp} f = \{x \in X\colon f(x) \neq 0\}$ називається *носієм функції* f.

Нехай $P_{\aleph} = \left\{x \in [0,1]^{\aleph^+} : |\operatorname{supp} x| \leq \aleph\right\}$, де $\aleph^+$ — наступний після $\aleph$ кардинал, тобто $P_{\aleph}$ — підпростір тихоновського куба ваги $\aleph^+$, що складається з усіх функцій, носії яких мають потужність меншу ніж $\aleph^+$.

Твердження 6. *Мають місце такі твердження:*

а) $P_{\aleph}$ *має властивість* $\left(\mathrm{II}_{\aleph_0}\right)$;

б) $P_{\aleph}$ *не має властивості* $(\mathrm{III}_{\aleph})$;

в) $P_\aleph$ *має властивість* $(\mathrm{III}_{\aleph'})$ *для довільного нескінченного кардинала* $\aleph' \neq \aleph$;

г) $P_\aleph$ *є* $\aleph$*-компактним.*

Доведення. Нехай S — така множина, що $|S| = \aleph^+$ і $P_\aleph \subseteq [0,1]^S$.

а). Нехай $\mathcal{U} = (U_i\colon i \in I)$ — довільна сім'я базисних відкритих непорожніх множин U_i в $P_\aleph$, причому $|I| > \aleph_0$. Для кожного $i \in I$ позначимо через $\tilde{U}_i$ таку базисну відкриту непорожню множину в $[0,1]^S$, що $U_i = \tilde{U}_i \cap P_\aleph$. Розглянемо сім'ю $(B_i\colon i \in I)$, де $B_i = R(\tilde{U}_i)$. Згідно з твердженням 2 існують скінченна $B \subseteq S$ і незліченна $I_1 \subseteq I$ множини такі, що $B_i \cap B_j = B$ для довільних різних $i, j \in I_1$. Простір $[0,1]^B$ має властивість $(\mathrm{II}_{\aleph_0})$, тому сім'я $(V_i\colon i \in I_1)$, де $V_i = \tilde{U}_i\big|_B$, не є точково скінченною. Отже, існують точка $x_0 \in [0,1]^B$ і зліченна множина $I_0 \subseteq I_1$ такі, що $x_0 \in V_i$ для довільного $i \in I_0$. Виберемо для кожного $i \in I_0$ довільну точку $x_i \in \tilde{U}_i$ і розглянемо функцію $x\colon S \to [0,1]$, яка визначається таким чином:

$$x(s) = \begin{cases} x_0(s), & s \in B, \\ x_i(s), & s \in B_i \setminus B, \quad i \in I_0, \\ 0, & s \in S \setminus \left(\bigcup\limits_{i \in I_0} B_i \right). \end{cases}$$

Оскільки $B_i \cap B_j = B$, то $(B_i \setminus B) \cap (B_j \setminus B) = \varnothing$ для довільних різних $i, j \in I_0$, тому функцію x визначено коректно. Крім того, $\operatorname{supp} x \subseteq \bigcup\limits_{i \in I_0} B_i$ і $\left| \bigcup\limits_{i \in I_0} B_i \right| \leq$ $\leq |I_0| \cdot \aleph_0 \leq \aleph$. Отже, $|\operatorname{supp} x| \leq \aleph$, тому $x \in P_\aleph$. Зауважимо також, що $x|_B =$ $= x_0 \in V_i = \tilde{U}_i\big|_B$ і $x|_{B_i \setminus B} = x_i|_{B_i \setminus B} \in \tilde{U}_i\big|_{B_i \setminus B}$, тому $x|_{B_i} \in \tilde{U}_i\big|_{B_i}$, тобто $x \in \tilde{U}_i$ для кожного $i \in I_0$. Таким чином, $x \in U_i$ для кожного $i \in I_0$ і сім'я $\mathcal{U}$ не є точково скінченною. Отже, $P_\aleph$ має властивість $(\mathrm{II}_{\aleph_0})$.

б). Для кожного $s \in S$ покладемо $U_s = \{x \in P_\aleph\colon x(s) > 0\}$. Зрозуміло, що сім'я $(U_s\colon s \in S)$ є $\aleph$-точковою в $P_\aleph$, причому $|S| > \aleph$. Отже, $P_\aleph$ не має властивості $(\mathrm{III}_\aleph)$.

в). Нехай $\aleph'$ — нескінченний кардинал, відмінний від $\aleph$, і $\mathcal{U} = (U_i\colon i \in I)$ — сім'я непорожніх відкритих базисних множин в $P_\aleph$, причому $|I| = \aleph'^+$. Для кожного $i \in I$ виберемо базисну відкриту множину $\tilde{U}_i$ в $[0,1]^S$ таку, що $U_i = \tilde{U}_i \cap P_\aleph$, і покладемо $B_i = R(\tilde{U}_i)$.

Спочатку розглянемо випадок, коли $\aleph' < \aleph$. Позначимо $B = \bigcup\limits_{i \in I} B_i$. Простір $[0,1]^B$ має властивість $(\mathrm{III}_{\aleph'})$, тому сім'я $(V_i\colon i \in I)$, де $V_i = \tilde{U}_i\big|_B$, не є $\aleph'$-точковою, тобто існують такі $x \in [0,1]^B$ і $I_1 \subseteq I$, що $|I_1| > \aleph'$ і $x \in V_i$ для кожного $i \in I_1$. Визначимо точку $y \in [0,1]^S$ таким чином:

$$y(s) = \begin{cases} x(s), & s \in B, \\ 0, & s \in S \setminus B. \end{cases}$$

Оскільки $\operatorname{supp} y \subseteq B$ і $|B| \leq |I|\aleph_0 \leq \aleph'^+ \aleph_0 \leq \aleph$, то $y \in P_\aleph$. Тепер легко переконатися, що $y \in U_i$ для кожного $i \in I_1$. Отже, $\mathcal{U}$ не є $\aleph'$-точковою. Отже, $P_\aleph$ має властивість $\left(\mathrm{III}_{\aleph'}\right)$.

Тепер нехай $\aleph' > \aleph^+$. Розглянемо систему $\mathcal{A}$ усіх скінченних підмножин множини S. Зрозуміло, що $|\mathcal{A}| = |S| = \aleph^+$. Для кожного $A \in \mathcal{A}$ покладемо $I_A = \{i \in I \colon B_i = A\}$.

Припустимо, що $|I_A| \le \aleph'$ для кожного $A \in \mathcal{A}$. Тоді $|I| = \left|\bigcup_{A \in \mathcal{A}} I_A\right| \le$ $\le |\mathcal{A}|\aleph' = \aleph^+\aleph' \le \aleph'$, а це суперечить тому, що $|I| = \aleph'^+$. Отже, існують такі $A_0 \in \mathcal{A}$ і $I_0 \subseteq I$, що $|I_0| > \aleph'$ і $B_i = A_0$ для кожного $i \in I_0$.

Врахувавши, що простір $[0,1]^{A_0}$ має властивість $\left(\mathrm{III}_{\aleph'}\right)$, отримаємо, що існують такі $x \in [0,1]^{A_0}$ та $I_1 \subseteq I_0$, що $|I_1| > \aleph'$ і $x \in \tilde{U}_i\big|_{A_0}$. Тоді точка $y \in [0,1]^S$, яка визначається таким чином:

$$y(s) = \begin{cases} x(s), & s \in A_0, \\ 0, & s \in S \setminus A_0, \end{cases}$$

належить $P_\aleph$, причому $y \in U_i$ для кожного $i \in I_1$.

Отже, $\mathcal{U}$ не є $\aleph'$-точковою і $P_\aleph$ має властивість $\left(\mathrm{III}_{\aleph'}\right)$.

г). Це випливає з того, що замикання в $P_\aleph$ довільної множини, потужність якої не перевищує $\aleph$, є компактним.

Із цього твердження, зокрема, випливає, що властивості $(\mathrm{III}_\aleph)$ непорівнянні між собою для різних $\aleph$, хоча легко бачити, що $(\mathrm{I}_\aleph) \Rightarrow \left(\mathrm{I}_{\aleph'}\right)$ і $(\mathrm{II}_\aleph) \Rightarrow \left(\mathrm{II}_{\aleph'}\right)$, якщо $\aleph < \aleph'$. Крім того, приклад дискретного простору потужності $\aleph$ показує, що імплікація $(\mathrm{III}_\aleph) \Rightarrow \left(\mathrm{I}_{\aleph'}\right)$ не виконується при $\aleph > \aleph'$. А приклад компактифікації Александрова [2, с. 261] дискретного простору потужності $\aleph^+$ вказує на те, що з компактності не випливає жодна з властивостей $(\mathrm{II}_\aleph)$, а отже, і $(\mathrm{III}_\aleph)$.

Таким чином, властивості, які фігурують у дослідженнях залежності нарізно неперервних функцій від $\aleph$ координат, можна зобразити у вигляді наступної діаграми, причому імплікація з твердження 5 справджується для хаусдорфових просторів і жодна із незображених імплікацій не має місця:

$$\begin{array}{cccccccccc}
\text{зліченна компактність} & \Rightarrow & \text{псевдо-}\aleph_0\text{-компактність} & \Rightarrow & (\mathrm{I}_{\aleph_0}) & \Rightarrow & (\mathrm{I}_{\aleph_1}) & \Rightarrow \ldots \Rightarrow & (\mathrm{I}_{\aleph}) & \Rightarrow \ldots \\
\Uparrow & & \Downarrow & & \Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow & \\
\aleph\text{-компактність} & & \text{беровість} & & (\mathrm{II}_{\aleph_0}) & \Rightarrow & (\mathrm{II}_{\aleph_1}) & \Rightarrow \ldots \Rightarrow & (\mathrm{II}_{\aleph}) & \Rightarrow \ldots \\
\Uparrow & & & & \Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow & \\
\text{компактність} & & & & (\mathrm{III}_{\aleph_0}) & & (\mathrm{III}_{\aleph_1}) & \ldots & (\mathrm{III}_{\aleph}) & \ldots
\end{array}$$

Для дослідження властивостей другого множника нам потрібен наступний допоміжний результат.

Твердження 7. *Нехай X — топологічний простір з $(\mathrm{II}_\aleph)$, $\mathcal{U} = (U_i \colon i \in I)$ — сім'я відкритих непорожніх множин в X, причому $|I| > \aleph$. Тоді існує точка $x_0 \in X$ така, що для довільного околу U точки x_0 в X множина $\{i \in I \colon U_i \cap U \ne \varnothing\}$ має потужність, що перевищує $\aleph$.*

Доведення. Нехай це не так, тобто для довільного $x \in X$ існує відкритий окіл V_x точки x такий, що потужність множини $\{i \in I\colon U_i \cap V_x \neq \varnothing\}$ не перевищує $\aleph$.

За допомогою трансфінітної індукції побудуємо сім'ю $(G_\alpha\colon \alpha < \beta)$, де β — перший ординал потужності $|I|$, відкритих непорожніх попарно неперетинних множин G_α, що суперечитиме властивості $(\mathrm{II}_\aleph)$ простору X.

Виберемо довільне $i_1 \in I$ і точку $x_1 \in U_{i_1}$. Покладемо $G_1 = V_{x_1} \cap U_{i_1}$. Зрозуміло, що множина $I_1 = \{i \in I\colon U_i \cap G_1 \neq \varnothing\}$ має потужність, що не перевищує $\aleph$.

Припустимо, що множини G_α при $\alpha < \gamma < \beta$ вже побудовано, причому всі множини $I_\alpha = \{i \in I\colon U_i \cap G_\alpha \neq \varnothing\}$ мають потужність, що не перевищує $\aleph$. Зауважимо, що $\left|\bigcup_{\alpha<\gamma} I_\alpha\right| \leq |\gamma|\aleph \leq \aleph^2 = \aleph < |I|$. Тому існує таке $i_\gamma \in I$, що $U_{i_\gamma} \cap G_\alpha = \varnothing$ для кожного $\alpha < \gamma$. Виберемо довільну точку $x_\gamma \in U_{i_\gamma}$ і покладемо $G_\gamma = U_{i_\gamma} \cap V_{x_\gamma}$. Зрозуміло, що потужність відповідної множини I_γ не перевищує $\aleph$.

Перейдемо до розгляду другого множника, який будемо використовувати у подальшій побудові.

Позначимо через $D_\aleph$ дискретний простір потужності $\aleph^+$ і $Q_\aleph = D_\aleph \cup \{\infty\}$, причому околом точки ∞ у просторі $Q_\aleph$ будуть всі множини вигляду $A \cup \{\infty\}$, де $A \subseteq D_\aleph$ і $|D_\aleph \setminus A| \leq \aleph$.

Твердження 8. *Мають місце такі твердження:*

а) $Q_\aleph$ *має властивість* $(\mathrm{I}_\aleph)$;

б) *кожна підсім'я потужності* $\aleph$ *сім'ї* $(\{d\}\colon d \in D_\aleph)$ *є локально скінченною в* $Q_\aleph$;

в) $P_\aleph \times Q_\aleph$ *має властивість* $(\mathrm{I}_\aleph)$.

Доведення. а). Нехай $\mathcal{U} = (U_i\colon i \in U)$ — локально скінченна сім'я непорожніх відкритих в $Q_\aleph$ множин U_i. Виберемо окіл U точки ∞ такий, що множина $J = \{i \in I\colon U_i \cap U \neq \varnothing\}$ є скінченною. Множина $B = D_\aleph \setminus U$ має потужність, що не перевищує $\aleph$. Крім того, для кожного $b \in B$ множина $I_b = \{i \in I\colon b \in U_i\}$ є скінченною. Оскільки $I = J \cup \left(\bigcup_{b \in B} I_b\right)$, то $|I| \leq \aleph_0 + \aleph\aleph_0 \leq \aleph$.

б). Це твердження випливає безпосередньо з означення простору $D_\aleph$.

в). Нехай $\mathcal{W} = (W_i\colon i \in I)$ — локально скінченна сім'я непорожніх базисних відкритих множин $W_i = U_i \times V_i$ у просторі $R = P_\aleph \times Q_\aleph$. При цьому можна вважати, що $V_i = \{d_i\}$, де $d_i \in D_\aleph$. Для кожного $d \in D_\aleph$ покладемо $I_d = \{i \in I\colon V_i = \{d\}\}$. Зрозуміло, що множини I_d попарно не перетинаються. Оскільки сім'я $\mathcal{W}$ є локально скінченною в R, то для кожного $d \in D_\aleph$ сім'я $(U_i\colon i \in I_d)$ — локально скінченна у просторі $P_\aleph$, який має властивість $(\mathrm{II}_{\aleph_0})$. Тому $|I_d| \leq \aleph_0$ для кожного $d \in D_\aleph$.

Покажемо тепер, що множина $B = \{d \in D_\aleph\colon I_d \neq \varnothing\}$ має потужність, що не перевищує $\aleph$.

Припустимо, що $|B| > \aleph$. Для кожного $b \in B$ виберемо довільне $i_b \in I_b$ і позначимо $U_b = U_{i_b}$, $V_b = V_{i_b}$. Розглянемо сім'ю $(U_b\colon b \in B)$. Оскільки $P_\aleph$ має властивість $(\mathrm{II}_\aleph)$, то згідно з твердженням 7 існує точка $p \in P_\aleph$ така, що для довільного околу U точки p множина $B_U = \{b \in B: U \cap U_b \neq \varnothing\}$ має потужність більшу ніж $\aleph$. Для довільного околу V точки ∞ в $Q_\aleph$ маємо $|D_\aleph \setminus V| \leq \aleph$, тому $|B_U \setminus V| \leq \aleph$, отже, множина $B_0 = B_U \cap V$ має потужність, що перевищує $\aleph$. Для кожного $b \in B_0$ маємо $U_b \cap U \neq \varnothing$ і $V_b = \{b\} \subseteq V$. Отже, $B_0 \subseteq \{b \in B: (U \times V) \cap (U_b \times V_b) \neq \varnothing\}$ і $\{i_b: b \in B_0\} \subseteq \{i \in I: (U \times V) \cap \cap W_i \neq \varnothing\} = I'$. Оскільки всі індекси i_b при $b \in B_0$ різні, адже $V_{i_B} = V_b = \{b\}$, то множина I' є нескінченною. Отже, сім'я $\mathcal{W}$ не є локально скінченною в точці (p, ∞), що неможливо.

Таким чином, $|B| \leq \aleph$. Тоді, врахувавши, що $I \subseteq \bigcup_{b \in B} I_b$ і $|I_b| \leq \aleph_0$, одержимо $|I| \leq \aleph_0 |B| \leq \aleph_0 \aleph = \aleph$.

Отже, R має властивість $(\mathrm{I}_\aleph)$.

5. Для побудови прикладів, які показують істотність відповідних властивостей просторів X і Y в достатніх умовах залежності нарізно неперервних функцій на добутках від $\aleph$ координат, розглянемо конструкцію, яка узагальнює запропоновану в [3].

Сім'ї $\mathcal{U} = (U_i: i \in I)$ та $\mathcal{V} = (V_i: i \in I)$ підмножин U_i та V_i топологічних просторів X та Y відповідно називатимемо *узгодженими*, якщо для довільних $x \in X$ та $y \in Y$ сім'ї $\mathcal{V}_x = \left(V_i: i \in I^x\right)$ та $\mathcal{U}_y = \left(U_i: i \in I_y\right)$, де $I^x = \{i \in I: x \in U_i\}$ та $I_y = \{i \in I: y \in V_i\}$, є локально скінченними в Y та X відповідно. Зрозуміло, що точково скінченні сім'ї $\mathcal{U}$ та $\mathcal{V}$ є узгодженими.

Теорема 4. *Нехай X, Y — топологічні простори, $(\varphi_i: i \in I)$, $(\psi_i: i \in I)$ — сім'ї неперервних функцій $\varphi_i: X \to \mathbb{R}$ та $\psi_i: Y \to \mathbb{R}$ такі, що сім'ї $\mathcal{U} = (\operatorname{supp} \varphi_i: i \in I)$ та $\mathcal{V} = (\operatorname{supp} \psi_i: i \in I)$ є узгодженими, $(f_i: i \in I)$ — сім'я нарізно неперервних функцій $f_i: X \times Y \to \mathbb{R}$. Тоді функція $f: X \times Y \to \mathbb{R}$, яка визначається формулою*

$$f(x, y) = \sum_{i \in I} \varphi_i(x) \psi_i(y) f_i(x, y),$$

є нарізно неперервною.

Доведення. Зафіксуємо $x_0 \in X$ і позначимо $I_0 = \{i \in I: x_0 \in \operatorname{supp} \varphi_i\}$. Оскільки сім'ї $\mathcal{U}$ та $\mathcal{V}$ є узгодженими, то сім'я $(\operatorname{supp} \psi_i: i \in I_0)$ є локально скінченною на Y. Тому локально скінченна сума $\sum_{i \in I_0} \varphi_i(x_0) \psi_i(y) f_i(x_0, y)$ неперервних на Y функцій $\varphi_i(x_0) \psi_i(y) f_i(x_0, y)$, тобто сума функцій, носії яких утворюють локально скінченну сім'ю, також є неперервною на Y. З іншого боку, $f(x_0, y) = \sum_{i \in I_0} \varphi_i(x_0) \psi_i(y) f_i(x_0, y)$. Отже, f^{x_0} є неперервною на Y.

Аналогічно перевіряється неперервність функції f відносно змінної y.

Теорема 5. *Нехай $Z = [0, 1]^S$, де $|S| = \aleph^+$, $X_1 = P_\aleph$, $Y_1 = Q_\aleph \times Z$, $X_2 = Q_\aleph$, $Y_2 = P_\aleph \times Z$. Тоді існує така нарізно неперервна на $X_1 \times Y_1$ і $X_2 \times Y_2$ функція $f: P_\aleph \times Q_\aleph \times Z \to \mathbb{R}$, що S є найменшою множиною, на якій f зосереджена відносно змінної z.*

Доведення. Нехай $P_\aleph = \left\{x \in [0, 1]^S: |\operatorname{supp} x| \leq \aleph\right\}$ і $Q_\aleph = S \cup \{\infty\}$. Розглянемо сім'ї $(\varphi_s: s \in S)$, $(\psi_s: s \in S)$ і $(f_s: s \in S)$ неперервних функцій $\varphi_s: P_\aleph \to \mathbb{R}$, $\varphi_s(p) = p(s)$, $\psi_s: Q_\aleph \to \mathbb{R}$, $\psi_s(q) = \begin{cases} 0, & q \neq s, \\ 1, & q = s, \end{cases}$ і $f_s: Z \to \mathbb{R}$, $f_s(z) = z(s)$. З означення простору $P_\aleph$ випливає, що сім'я $(\operatorname{supp} \varphi_s: s \in S)$ є $\aleph$-точковою.

Згідно з твердженням 8 довільна підсім'я потужності $\aleph$ сім'ї $(\operatorname{supp}\psi_s : s \in S)$ є локально скінченною. Тому для кожного $p \in P_\aleph$ сім'я $(\operatorname{supp}\psi_s : p \in \operatorname{supp}\varphi_s)$ — локально скінченна в $Q_\aleph$. З іншого боку, сім'я $(\operatorname{supp}\psi_s : s \in S)$ — точково скінченна на $Q_\aleph$. Отже, сім'ї $(\operatorname{supp}\varphi_s : s \in S)$ і $(\operatorname{supp}\psi_s : s \in S)$ є узгодженими.

Згідно з теоремою 4 функція

$$f(p, q, z) = \sum_{s \in S} \varphi_s(p)\psi_s(q) f_s(z)$$

є нарізно неперервною на $X_1 \times Y_1$ і $X_2 \times Y_2$.

Для кожного $s \in S$ позначимо через p_s характеристичну функцію множини $\{s\}$ на S. Крім того, нехай $z_0 \equiv 0$ на S. Тоді $f(p_s, s, p_s) = 1$ і $f(p_s, s, z_0) = 0$, причому $p_s|_{S\setminus\{s\}} = z_0|_{S\setminus\{s\}}$. Отже, згідно з твердженням 1 S — найменша множина, на якій f зосереджена відносно змінної z.

Зауважимо, що X_1 є $\aleph$-компактним з властивістю $\left(\mathrm{II}_{\aleph_0}\right)$ (твердження 6), а Y_1 і $X_1 \times Y_1$ мають властивість $(\mathrm{I}_\aleph)$. Тому цей приклад показує, що в достатній умові (i) властивість $(\mathrm{III}_\aleph)$ простору X не можна послабити до найсильнішої з властивостей другого порядку $\left(\mathrm{II}_{\aleph_0}\right)$, додаючи навіть $\aleph$-компактність, зберігаючи всі необхідні умови залежності, а в достатній умові (ii) псевдо-$\aleph_0$-компактність простору Y не можна послабити до властивості $(\mathrm{I}_\aleph)$. З іншого боку, берівський простір X_2 має властивість $(\mathrm{I}_\aleph)$, а Y_2 є $\aleph$-компактним з властивістю $\left(\mathrm{II}_{\aleph_0}\right)$. Тому зліченну компактність простору X в достатній умові (iii) не можна послабити до властивості $(\mathrm{I}_\aleph)$, навіть дещо підсилюючи властивості простору Y, а властивість $(\mathrm{III}_\aleph)$ простору Y в теоремі 3 не можна послабити до властивості $\left(\mathrm{II}_{\aleph_0}\right)$.

1. *Noble N., Ulmer M.* Factoring functions on Cartesian products // Trans. Amer. Math. Soc. – 1972. – **163**. – P. 329 – 339.
2. *Энгелькинг Р.* Общая топология. – М.: Мир, 1986. – 752 с.
3. *Михайлюк В. В.* Залежність від n координат нарізно неперервних функцій на добутках компактів // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 6. – С. 822 – 829.
4. *Маслюченко В. К., Михайлюк В. В.* Нарізно неперервні функції на добутках компактів та їх залежність від n змінних // Там же. – 1995. – **47**, № 3. – С. 344 – 350.
5. *Bouziad A.* Notes sur la propriété de Namioka // Trans. Amer. Math. Soc. – 1994. – **344**, № 2. – P. 873 – 883.

Одержано 26.05.2003