УДК 517.98

У. А. Розиков, А. Ю. Хамраев (Ин-т математики АН Республики Узбекистан, Ташкент)

О КУБИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРАХ, ОПРЕДЕЛЕННЫХ НА КОНЕЧНОМЕРНЫХ СИМПЛЕКСАХ

We introduce the notion of cubic operator. For a class of cubic operators defined on finite-dimensional simplexes, we give the complete description of a behavior of trajectories. We show the Cesàro convergence of means.

Введено поняття кубічного оператора. Для одного класу кубічних операторів, визначених на скінченновимірних симплексах, наведено повний опис поведінки траєкторій. Показано збіжність середніх за Чезаро.

1. Введение. Многие задачи решаются с применением теории меры и теории динамических систем. Пусть $E = \{1, 2, \ldots, n\}$. Рассмотрим множество

$$S^{n-1} = \left\{ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n :\ x_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \right\}.$$

Множество S^{n-1} называется $(n-1)$-мерным симплексом. Каждый элемент $x \in S^{n-1}$ является вероятностной мерой на E, и его можно интерпретировать как состояние биологической (физической, социологической и т. п.) системы, состоящей из n элементов.

Одна из основных задач для данной системы состоит в изучении эволюции состояния системы. Обычно „потомки" состояния системы определяются некоторым законом. Для решения задач, возникающих в математической генетике, используются квадратичные операторы, теория которых в настоящее время хорошо развита (см., например, [1–10]).

В настоящей работе изучаются динамические системы, задаваемые кубическими операторами. Определение кубических операторов приведено в п. 2. В п. 3 полностью изучается траектория одного кубического оператора на S^{n-1} для любого $n \in N$, которая естественным образом возникает при изучении некоторых простых задач. В п. 4 приведены биологические и другие интерпретации полученных результатов.

2. Определение кубических операторов. В простейшей задаче популяционной генетики рассматривается биологическая система E, состоящая из n разновидностей $1, 2, \ldots, n$. Считаем, что разновидности „родителей" i, j, k однозначно определяют вероятность каждой разновидности l для непосредственного потомка. (Заметим, что тройку (i, j, k) скрещиваний можно рассмотреть, например, в различных сортах растений и получить сорт l.) Обозначим эту вероятность через $p_{ijk,l}$. Тогда $p_{ijk,l} \geq 0$, $\sum_{l=1}^{n} p_{ijk,l} = 1$, и значения $p_{ijk,l}$ не изменяются при любой перестановке i, j, k, если разновидности не связаны с полом.

Состояние популяции описывается набором $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ вероятности разновидностей. Следовательно, $x \in S^{n-1}$.

При случайном скрещивании

$$x_l' = \sum_{i,j,k=1}^{n} p_{ijk,l} x_i x_j x_k, \qquad l = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

является полной вероятностью разновидности для непосредственных потомков.

Пусть $W: S^{n-1} \to S^{n-1}$ — отображение, определяемое равенством (1).

Оператор W назовем кубическим оператором.

Таким образом, если в некотором поколении популяция находится в состоянии x, то в следующем поколении она находится в состоянии $x' = Wx$. Напомним, что если в скрещиваниях участвуют только два „родителя" i, j и рождается k, то поколение популяции определяется оператором V:

$$x'_k = \sum_{i,j=1}^{n} p_{ij,k} x_i x_j, \qquad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{2}$$

где $p_{ij,k} \geq 0$, $\sum_{k=1}^{n} p_{ij,k} = 1$ и $p_{ij,k} = p_{ji,k}$ для любого i, j, k.

Оператор (2) называется квадратичным оператором [1–10].

Заметим, что операторами (1), (2) можно описать эволюции не только биологических систем, но и физических явлений, социологических состояний и т. п.

3. Полное описание поведения траекторий кубических операторов. Заметим, что кубический оператор однозначно определяется матрицей

$$\mathbf{M} = \left\{p_{ijk,l}\right\}_{i,j,k,l=1}^{n}, \qquad p_{ijk,l} \geq 0, \qquad \sum_{l=1}^{n} p_{ijk,l} = 1. \tag{3}$$

Рассмотрим коэффициенты следующего вида:

$$p_{ijk,l} = \begin{cases} 1, & \text{если } \delta_{il} + \delta_{jl} + \delta_{kl} \geq 2, \\ \dfrac{1}{3}, & \text{если } \delta_{il} + \delta_{jl} + \delta_{kl} = 1 \\ & \text{и } \delta_{ij} + \delta_{ik} + \delta_{jk} = 0, \\ 0 & \text{– в остальных случаях,} \end{cases} \tag{4}$$

где δ_{ij} — символ Кронекера.

Кубический оператор $W\colon S^{n-1} \to S^{n-1}$, соответствующий коэффициентам (4), имеет вид

$$x'_i = x_i \left(x_i^2 + 3x_i \sum_{i \neq j=1}^{n} x_j + 2 \sum_{j<k,\, j \neq i,\, k \neq i}^{n} x_j x_k \right), \qquad i = \overline{1, n}. \tag{5}$$

Пусть $\lambda_0 \in S^{n-1}$ — начальное распределение. Траектория точки λ_0 при действии оператора (5) определяется следующим образом: $\lambda_m = W^{(m)}(\lambda_0)$.

Основная задача этого пункта — изучить траекторию $\{\lambda_m\}$, т. е. описать множество предельных точек последовательности $W^{(m)}(\lambda_0)$ для любого $\lambda_0 \in$ $\in S^{n-1}$.

3.1. Инвариантные множества. Пусть s_n — группа перестановок порядка n.

Действие s_n на S^{n-1} определим следующим образом: если $g \in s_n$, $x \in$ $\in S^{n-1}$, $M \subseteq S^{n-1}$, то $g(x) = \left(x_{g(1)}, x_{g(2)}, \ldots, x_{g(n)}\right)$ и $g(M) = \{g(x)\colon x \in M\}$.

Действие s_n на оператор W определим так:

$$(gW)(x) = g\big(W(x)\big).$$

Лемма 1. *Для любого* $g \in s_n$ *и* $x \in S^{n-1}$ *выполняется равенство*

$$(gW)(x) = W\big(g(x)\big).$$

Доказательство легко следует из построения оператора (5).

Лемма 2. *Если M — инвариантное множество оператора W, т. е. $W(M) = M$, то для любого $g \in s_n$ множество $g(M)$ также является инвариантным множеством для оператора W.*

Доказательство. Имеем

$$W(g(M)) = \{W(g(x)) : x \in M\} = \{g(W(x)) : x \in M\}. \tag{6}$$

Пусть $x' = W(x)$, $x \in M$, тогда $x' \in M$, так как M — инвариантное множество. Следовательно, из (6) получаем $W(g(M)) = \{gx' : x' \in M\} = g(M)$.

Лемма доказана.

Лемма 3. *Если x — неподвижная точка оператора W, т. е. $W(x) = x$, то для любого $g \in s_n$ точка $g(x)$ также является неподвижной.*

Доказательство. В качестве M выберем $\{x\}$, где x — неподвижная точка, тогда в силу леммы 2 получим $W(g(x)) = g(x)$.

Лемма доказана.

Обозначим

$$M_r = \left\{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S^{n-1} : x_1 = x_2 = \ldots = x_r = 0\right\}, \qquad r = \overline{0, n-1}.$$

Лемма 4. *Для любого $g \in s_n$ и $r = \overline{0, n-1}$ множества $g(M_r)$ являются инвариантными подмножествами для оператора* (5).

Доказательство. Легко заметить, что если $x_i = 0$, то $x_i' = 0$. Отсюда в силу леммы 2 следует утверждение леммы.

Лемма 5. *Для любого $g \in s_n$ и $r = \overline{0, n-1}$ сужение W_r оператора* (5) *на множестве $g(M_r)$ является оператором такого же вида и $W_r : S^{n-r-1} \to$ $\to S^{n-r-1}$.*

Доказательство очевидно.

Заметим, что множество $M^{(n-1)} = \{g(M_{n-1}) : g \in s_n\}$ является множеством всех вершин симплекса S^{n-1}, и каждая вершина является неподвижной точкой. Опишем теперь другие неподвижные точки оператора (5).

Для этого рассмотрим систему уравнений $W(\lambda) = \lambda$.

Пусть $x_i x_j \neq 0$ для некоторых $i \neq j = \overline{1, n}$. Тогда из (5) получаем

$$\begin{gathered} 1 = x_i^2 + 3x_i \sum_{i \neq k = 1}^{n} x_k + 2 \sum_{p < k,\, p \neq i,\, k \neq i}^{n} x_p x_k, \\ 1 = x_j^2 + 3x_j \sum_{j \neq k = 1}^{n} x_k + 2 \sum_{p < k,\, p \neq j,\, k \neq j}^{n} x_p x_k. \end{gathered} \tag{7}$$

Из (7) имеем

$$(x_i - x_j)(x_i + x_j) + 3(x_i - x_j) \sum_{k \neq i,\, j;\, k = 1}^{n} x_k + 2x_j \sum_{p \neq i;\, p = 1}^{n} x_p - 2x_i \sum_{p \neq j;\, p = 1}^{n} x_p = 0.$$

Следовательно, $x_i = x_j$. Таким образом, если для $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ненулевыми координатами являются $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_r}$, т. е. $\prod_{j=1}^{r} x_{i_j} \neq 0$, то $x_{i_1} =$ $= x_{i_2} = \ldots = x_{i_r} = y$. Следовательно, из (5) получаем уравнение

$$y^2 + 3(r-1)y^2 + (r-1)(r-2)y^2 = 1,$$

откуда $y = \dfrac{1}{r}$.

Таким образом, точка $y^{(r)} = \left(\underbrace{\frac{1}{r}, \frac{1}{r}, \ldots, \frac{1}{r}}_{r}, 0, \ldots, 0\right)$ является неподвижной точкой для любого $r = \overline{1, n}$.

В силу леммы 3 справедлива следующая лемма.

Лемма 6. *Для любого $g \in s_n$ и $r = \overline{1, n}$ точка $g(y^{(r)})$ является неподвижной точкой оператора* (5). *Более того, точками $g(y^{(r)})$ исчерпываются все неподвижные точки оператора* (5).

Пусть $N_r = \left\{x \in S^{n-1} : x_1 = x_2 = \ldots = x_r\right\}$, $r = \overline{1, n}$.

Лемма 7. *Для любого $g \in s_n$ и $r = \overline{1, n}$ множество $g(N_r)$ является инвариантным подмножеством оператора* (5).

Доказательство. Пусть в (5) $x_i = x_j$. Докажем, что $x_i' = x_j'$:

$$x_i' - x_j' = x_i\left(x_i^2 + 3x_i \sum_{i \neq k = 1}^{n} x_k + 2 \sum_{p<k,\, p \neq i,\, k \neq i}^{n} x_p x_k\right) -$$

$$- x_j\left(x_j^2 + 3x_j \sum_{j \neq k = 1}^{n} x_k + 2 \sum_{p<k,\, p \neq j,\, k \neq j}^{n} x_p x_k\right) =$$

$$= (x_i - x_j)\left(x_i^2 + 4x_i x_j + x_j^2 + 3(x_i + x_j) \sum_{i, j \neq k = 1}^{n} x_k\right) = 0.$$

Лемма доказана.

Обозначим $G_k = \left\{x \in S^{n-1} : x_1 > x_2 > \ldots > x_k > 0\right\}$.

Лемма 8. *Для любого $g \in s_n$ и $k = \overline{1, n}$ множество $g(G_k)$ является инвариантным подмножеством оператора* (5).

Доказательство. В силу леммы 2 достаточно доказать, что $W(G_k) = G_k$.

Пусть $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in G_k$, т. е. $x_1 > x_2 > \ldots > x_k > 0$. Докажем, что $x_1' > x_2' > \ldots > x_k' > 0$. Заметим, что (см. доказательство леммы 7)

$$x_1' - x_2' = (x_1 - x_2)\left[x_1^2 + 4x_1 x_2 + x_2^2 + 3(x_1 + x_2) \sum_{k=3}^{n} x_k\right] > 0.$$

Отсюда $x_1' > x_2'$. Аналогично можно доказать, что $x_i' > x_{i+1}'$ для всех $i = \overline{2, k}$.

Лемма доказана.

3.2. Поведение траектории на инвариантных множествах. Заметим, что все инвариантные множества, которые получены в пп. 3.1, полностью покрывают симплекс S^{n-1}, т. е.

$$S^{n-1} = \bigcup_{g \in s_n} \bigcup_{k=1}^{n} \left(g(M_k) \cup g(N_k) \cup g(G_k)\right).$$

Поэтому достаточно проверить поведение траектории только на каждом инвариантном множестве.

Пусть $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S^{n-1}$ и $\varphi(x) = x_1 x_2 \ldots x_n$.

Лемма 9. *Для любого $x \in S^{n-1}$ выполняется неравенство*

$$\varphi(W(x)) \leq \varphi(x).$$

Доказательство. Имеем

$$\varphi(W(x)) = \prod_{i=1}^{n} x_i' = \varphi(x)\prod_{i=1}^{n}\left[x_i^2 + 3x_i\sum_{i\neq k=1}^{n} x_k + 2\sum_{p<k,\, p\neq i,\, k\neq i}^{n} x_p x_k\right] \leq$$

$$\leq \varphi(x)\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2 + 3x_i\sum_{i\neq k=1}^{n} x_k + 2\sum_{p<k,\, p\neq i,\, k\neq i}^{n} x_p x_k\right)\right]^n =$$

$$= \varphi(x)\left[\frac{1}{n}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 + 2n\sum_{j<k} x_j x_k\right)\right]^n = \varphi(x)\left[\frac{1}{n}\left(1 + 2n\sum_{j<k} x_j x_k\right)\right]^n. \qquad (8)$$

Для $x \in S^{n-1}$ обозначим

$$f(x) = \sum_{j<k=1}^{n} x_j x_k.$$

Заметим, что

$$\max_{x\in S^{n-1}} f(x) = f\left(\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right)\right) = \frac{n-1}{2n}.$$

Следовательно, из (8) получаем $\varphi(W(x)) \leq \varphi(x)$.

Лемма доказана.

Пусть $x \in S^{n-1}$. Обозначим

$$m(x) = \min_{1\leq i\leq n} x_i, \qquad M(x) = \max_{1\leq i\leq n} x_i.$$

Лемма 10. *Для любого* $x \in S^{n-1} \setminus \left\{\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right)\right\}$ *имеют место неравенства*

$$\text{а) } \frac{1}{n} < M(x) < M(W(x)), \qquad \text{б) } m(W(x)) < m(x) < \frac{1}{n}.$$

Доказательство. а) Пусть для некоторого $x \in S^{n-1} \setminus \left\{\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right)\right\}$ выполняется $M(x) < \frac{1}{n}$. Тогда $x_i < \frac{1}{n}$ для любого $i = \overline{1, n}$, что противоречит условию $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$.

Теперь докажем, что $M(x) < M(W(x))$. Пусть $M(x) = x_{i_0}$. Достаточно доказать, что

$$x_{i_0}^2 + 3x_{i_0}\sum_{i_0\neq k=1}^{n} x_k + 2\sum_{p<k,\, p\neq i_0,\, k\neq i_0}^{n} x_p x_k > 1.$$

Заменяя в выражении

$$x_{i_0}^2 + 3x_{i_0}\sum_{i_0\neq k=1}^{n} x_k + 2\sum_{p<k,\, p\neq i_0,\, k\neq i_0}^{n} x_p x_k - 1$$

1 на $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$, получаем

$$-\sum_{i_0\neq i=1}^{n} x_i^2 + 3x_{i_0}\sum_{i_0\neq k=1}^{n} x_k - 2x_{i_0}\sum_{i_0\neq j=1}^{n} x_j = \sum_{i_0\neq j=1}^{n} x_j(x_{i_0}-x_j) > 0.$$

Пункт б) доказывается аналогично.

Лемма доказана.

Лемма 11. *Для любого* $x \in S^{n-1}\setminus\left\{\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n},\ldots,\frac{1}{n}\right)\right\}$ *неподвижная точка* $\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n},\ldots,\frac{1}{n}\right)$ *не может быть предельной точкой для последовательности* $\left\{W^{(m)}(x)\right\}$.

Доказательство. В силу леммы 7

$$\frac{1}{n} < M(x) < M(W(x)) < M\left(W^2(x)\right) < \ldots < M\left(W^{(k)}(x)\right).$$

Отсюда

$$\lim_{k\to\infty} M\left(W^{(k)}(x)\right) > \frac{1}{n},$$

т. е. существует координата $> \frac{1}{n}$.

Лемма доказана.

Лемма 12. *Для любого* $x \in S^{n-1}\setminus\left\{\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n},\ldots,\frac{1}{n}\right)\right\}$ *справедливо равенство*

$$\lim_{k\to\infty} \varphi\left(W^{(k)}(x)\right) = 0.$$

Доказательство. В силу леммы 9 $\varphi\left(W^{(k+1)}(x)\right) \le \varphi\left(W^{(k)}(x)\right)$, т. е. $\varphi\left(W^{(k)}(x)\right)$ монотонно убывает. При $x \in S^{n-1}\setminus\bigcup_{g\in s_n} g(G_k)$ доказательство тривиально. Пусть теперь $x \in \bigcup_{g\in s_n} g(G_k)$. Тогда $0 < \varphi(x) < \frac{1}{n^n}$. Следовательно, $\varphi\left(W^{(k)}(x)\right)$ сходится. Пусть

$$\lim_{k\to\infty} \varphi\left(W^{(k)}(x)\right) = \mu > 0.$$

Тогда

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\varphi\left(W^{(k+1)}(x)\right)}{\varphi\left(W^{(k)}(x)\right)} =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \prod_{i=1}^{n} \left[\left(x_i^{(k)}\right)^2 + 3x_i^{(k)}\sum_{i\neq j=1}^{n} x_j^{(k)} + 2\sum_{p<q,\, p\neq i,\, q\neq i} x_p^{(k)}x_q^{(k)}\right] = 1.$$

Заметим, что (см. доказательство леммы 9)

$$\prod_{i=1}^{n} \left[\left(x_i^{(k)}\right)^2 + 3x_i^{(k)}\sum_{i\neq j=1}^{n} x_j^{(k)} + 2\sum_{p<q,\, p\neq i,\, q\neq i} x_p^{(k)}x_q^{(k)}\right] \le 1.$$

Отсюда имеем

$$\prod_{i=1}^{n}\left[1-\left(2\sum_{j\neq i}\left(x_j^{(k)}\right)^2-\sum_{j\neq i}x_j^{(k)}+2\sum_{p<q,\,p\neq i,\,q\neq i}x_p^{(k)}x_q^{(k)}\right)\right]\leq 1.$$

Следовательно,

$$\lim_{k\to\infty}\max_{i=\overline{1,n}}\left|2\sum_{j\neq i}\left(x_j^{(k)}\right)^2-\sum_{j\neq i}x_j^{(k)}+2\sum_{p<q,\,p\neq i,\,q\neq i}x_p^{(k)}x_q^{(k)}\right|=0,$$

и поэтому

$$\lim_{k\to\infty}x_i^{(k)}=\frac{1}{n}\quad\text{для любого}\quad i=\overline{1,n},$$

что в силу леммы 11 невозможно.

Лемма доказана.

Определение. *Множества вида* $g(A_k)$, *где* $A_k=\{x\in S^{n-1}: x_1=x_2=\ldots$ $\ldots=x_k=0\}$, $g\in s_n$, $k=\overline{1,n-1}$, *называются* $(n-k-1)$*-мерной гранью симплекса.*

Лемма 13. 1. *Для любого* $x\in S^{n-1}$ *существует предел* $\lim_{k\to\infty}W^{(k)}(x)$.

2. *Только неподвижные точки грани (т. е. точки* $g\left(\frac{1}{r},\frac{1}{r},\ldots,\frac{1}{r},0,\ldots,0\right)$, $g\in s_n$, $r=\overline{1,n-1}$*) могут быть предельными точками для* $x^{(k)}=W^{(k)}(x)$.

Доказательство. 1. Применим метод математической индукции по $n\geq 2$.

Пусть $n=2$. Тогда в силу леммы 10 $M\left(x^{(k)}\right)=\max\left\{x_1^{(k)},x_2^{(k)}\right\}$ и $m\left(x^{(k)}\right)=$ $=\min\left\{x_1^{(k)},x_2^{(k)}\right\}$ — монотонные, ограниченные последовательности. Следовательно, существует предел $\lim_{k\to\infty}x^{(k)}$.

Пусть $n=3$. Тогда в силу леммы 10 $M\left(x^{(k)}\right)=\max\left\{x_1^{(k)},x_2^{(k)},x_3^{(k)}\right\}$ и $m\left(x^{(k)}\right)=\min\left\{x_1^{(k)},x_2^{(k)},x_3^{(k)}\right\}$ также имеют пределы. Существование предела третьей координаты следует из равенства

$$x_1^{(k)}+x_2^{(k)}+x_3^{(k)}=1.$$

Предположим теперь, что при $n=r$, т. е. для любого $x\in S^{r-1}$, предел $\lim_{k\to\infty}x^{(k)}$ существует. Докажем, что для $n=r+1$, т. е. для $x\in S^r$, существует предел $\lim_{k\to\infty}x^{(k)}$.

Согласно предположению индукции для любого $z\in S^{r-1}$ существует предел $\lim_{k\to\infty}z^{(k)}=\lim_{k\to\infty}W^{(k)}(z)=y$, т. е. для любого $\varepsilon>0$ существует k_0 такое, что

$$\forall\, k>k_0:\left\|z^{(k)}-y\right\|_r<\varepsilon,\qquad\text{где}\ \|y\|_r=\max_{1\leq i\leq r}|y_i|.\tag{9}$$

В силу леммы 12 существует $i_0\in\{1,2,\ldots,r+1\}$ такое, что $\lim_{k\to\infty}x_{i_0}^{(k)}=0$. Пусть, для определенности, $i_0=r+1$. Тогда в силу леммы 5 существует такая $z^{(k)}\in S^{r-1}$, что

$$\left\|x^{(k)}-\left(z^{(k)},0\right)\right\|_{r+1}<\varepsilon.\tag{10}$$

Таким образом, на основании (9) и (10) получаем

$$\left\| x^{(k)} - (y, 0) \right\|_{r+1} = \left\| x^{(k)} - \left(z^{(k)}, 0\right) + \left(z^{(k)}, 0\right) - (y, 0) \right\|_{r+1} < 2\varepsilon.$$

Отсюда и следует утверждение 1.

2. Пусть λ является пределом траектории внутренней точки $x \in S^{n-1}$. Тогда

$$\lambda = \lim_{k\to\infty} W^{(k+1)}(x) = \lim_{k\to\infty} W\left(W^{(x)}(x)\right) = W(\lambda),$$

т. е. λ — неподвижная точка. В силу леммы 11 λ — граничная неподвижная точка.

Лемма доказана.

Введем обозначение

$$G_{i_1 i_2 \ldots i_k} = \left\{ x \in S^{n-1} : M(x) = x_{i_1} = x_{i_2} = \ldots = x_{i_k} \right\},$$
$$k = \overline{1, n}, \quad i_j = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, k}.$$

Следующая теорема является следствием полученных в данном пункте результатов.

Теорема 1. *Для любого* $x \in S^{n-1}$ *траектория оператора* (5) *имеет следующие пределы:*

$$\lim_{m\to\infty} W^{(m)}(x) = \lambda =$$

$$= \begin{cases} x, & \text{если } x \text{ — неподвижная точка,} \\ \left(0, \ldots, 0, \lambda_{i_1} = \dfrac{1}{k}, 0, \ldots, 0, \lambda_{i_2} = \dfrac{1}{k}, 0, \ldots, 0, \lambda_{i_k} = \dfrac{1}{k}, 0, \ldots, 0\right), & \\ & \text{если } x \in G_{i_1 i_2 \ldots i_k}. \end{cases}$$

3.3. ***Пример.*** Пусть $n = 3$. Тогда оператор (5) имеет вид

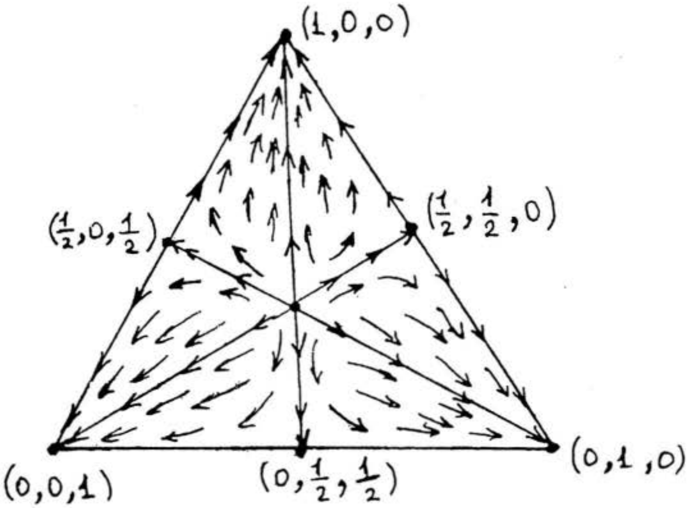
$$\begin{aligned} x' &= x\left(x^2 + 3xy + 3xz + 2yz\right), \\ y' &= y\left(y^2 + 3yx + 3yz + 2xz\right), \\ z' &= z\left(z^2 + 3zx + 3zy + 2xy\right). \end{aligned} \tag{11}$$

Неподвижными точками этого оператора являются: $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, $\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$, $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Теорема 1 в этом случае формулируется так.

Теорема 1′. *Для* $\lambda = (x, y, z) \in S^2$ *траектория оператора* (11) *имеет следующие пределы:*

$$\lim_{n\to\infty} W^{(n)}(\lambda) = \begin{cases} \lambda, & \text{если } \lambda \text{ — неподвижная точка,} \\ \left(0, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right), & \text{если } \lambda \in \left\{\lambda = (x, y, z) : y = z > \dfrac{1}{3}\right\}, \\ \left(\dfrac{1}{2}, 0, \dfrac{1}{2}\right), & \text{если } \lambda \in \left\{\lambda : x = z > \dfrac{1}{3}\right\}, \\ \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, 0\right), & \text{если } \lambda \in \left\{\lambda : x = y > \dfrac{1}{3}\right\}, \\ (1, 0, 0), & \text{если } \lambda \in \{\lambda : x > y \ge z\} \cup \{\lambda : x > z \ge y\}, \\ (0, 1, 0), & \text{если } \lambda \in \{\lambda : y > x \ge z\} \cup \{\lambda : y > z \ge x\}, \\ (0, 0, 1), & \text{если } \lambda \in \{\lambda : z > x \ge y\} \cup \{\lambda : z > y \ge x\}. \end{cases}$$

Таким образом, при $n = 3$ мы получили картину векторного поля, показанного на рисунке.



4. Некоторые применения теоремы 1.

4.1. О средних по Чезаро оператора W. Одной из основных задач динамической системы является изучение предельного поведения средних по Чезаро $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} W^{(k)}(a)$, $a \in S^{n-1}$, данной системы. Исследуя квадратичные операторы, С. Улам [6] формулирует гипотезу, что для любого квадратичного оператора V имеет место следующее свойство: для любого $a \in S^{n-1}$ существует предел $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} V^{(k)}(a)$. Однако М. И. Захаревич [3] для квадратичного оператора $V: S^2 \to S^2$:

$$x' = x^2 + 2xy,$$
$$y' = y^2 + 2yz,$$
$$z' = z^2 + 2xz$$

доказал, что для любой внутренней начальной точки $x \in S^2 \setminus \left\{\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)\right\}$ указанный предел не существует. Но из теоремы 1 вытекает такое следствие.

Следствие. *Для оператора* (5) *средние по Чезаро сходятся.*

4. 2. Биологические интерпретации теоремы 1. В математической биологии оператор W называется оператором эволюции. Неподвижные точки W трактуются как равновесные состояния популяции, $\lambda \in S^{n-1}$ называется состоянием популяции, $W(\lambda)$, $W^{(2)}(\lambda)$, ... называются состоянием популяции в следующих поколениях (потомки).

Пусть эволюция некоторой биологической системы, состоящей из n разновидностей, описывается оператором (5). Применяя теорему 1, можно сделать следующие выводы:

1. Биологическая система имеет $2^n - 1$ равновесных состояний.
2. С течением времени некоторые разновидности окажутся на грани исчезновения.
3. В биологических системах рассматриваемого типа несколько разновидностей могут образовать коалицию $\left(\text{вершины } g\left(\frac{1}{r}, \ldots, \frac{1}{r}, 0, \ldots, 0\right),\ g \in s_n\right)$. В этом случае разновидности, не попавшие в коалицию, постепенно исчезают.

4. Если система находится в равновесном состоянии, то в зависимости от состояний она может иметь 1, 2, ... , n разновидностей. Заметим, что для вольтерровских квадратичных операторов это свойство не выполняется, т. е. остаются состояния только лишь с нечетным числом разновидностей [7–9].

1. *Бернштейн С. Н.* Решение одной математической проблемы, связанной с теорией наследовательности // Уч. зап. н.-и. каф. Украины. – 1924. – **I**. – С. 83 – 115.
2. *Динамическая* теория биологических популяций / Под ред. Полуэктова. – М.: Наука, 1974. – 188 с.
3. *Захаревич М. И.* О поведении траекторий и эргодической гипотезе для квадратичных отображений симплекса // Успехи мат. наук. – 1978. – **33**, вып. 6. – С. 207 – 208.
4. *Любич Ю. И.* Математические структуры в популяционной генетике. – Киев: Наук. думка, 1983. – 296 с.
5. *Любич Ю. И.* Об одном классе квадратичных отображений // Теория функций, функцион. анализ и их прил. – 1974. – Вып. 21. – С. 36 – 42.
6. *Улам С. М.* Нерешенные математические задачи. – М.: Наука, 1964. – 168 с.
7. *Ганиходжаев Р. Н.* Квадратичные стохастические операторы, функция Ляпунова и турниры // Мат. сб. – 1992. – **183**, № 8. – С. 121 – 140.
8. *Ганиходжаев Р. Н.* О неподвижных точках квадратичных операторов // Докл. АН УзССР. – 1977. – № 8. – С. 12 – 15.
9. *Ганиходжаев Р. Н., Сарымсаков А. Т.* Математическая модель коалиции биологических систем // Докл. АН Республики Узбекистан. – 1992. – № 3. – С. 14 – 17.
10. *Manzel M. T., Stein P. R., Ulam S. M.* Quadratic transformations. – Los Alamos, 1959. – 158 p.

Получено 07.03.2003