УДК 519.2

Ю. П. Вирченко, О. Л. Шпилинская
(Ин-т монокристаллов НАН Украины, Харьков)

ВЕРОЯТНОСТНОЕ ПРОСТРАНСТВО СТОХАСТИЧЕСКИХ ФРАКТАЛОВ

We develop the general method of the construction of probabilistic structure on the space $\mathfrak{E}$ of random sets in $\mathbb{R}$. To do this, by using introduced notion of a c-system, we prove a theorem on the unique extension of a finite measure of c-system to the minimal σ-algebra. The obtained structure of measurability enables us to determine probability distributions of the σ-algebra of random events sufficient, for instance, for the so-called fractal dimensionality of random realizations to be considered as a measurable functional on $\mathfrak{E}$.

Розроблено загальний метод побудови ймовірнісної структури на просторі $\mathfrak{E}$ випадкових множин у $\mathbb{R}$. Для цього на основі введеного поняття c-системи доведено теорему про однозначне продовження скінченної міри з c-системи на мінімальну σ-алгебру. Побудована структура вимірності дає можливість визначати розподіли ймовірностей на σ-алгебрі випадкових подій, достатній, наприклад, для того, щоб так звану фрактальну розмірність випадкових реалізацій можна було розглядати як вимірний функціонал на $\mathfrak{E}$.

1. Проблема вероятностного описания случайных множеств. Случайные точечные множества являются объектами, традиционно изучаемыми теорией вероятностей как с точки зрения общей теории их вероятностных пространств и структурных свойств (см., например, [1]), так и с точки зрения анализа классов конкретных моделей с целью приложений. Структуру измеримости в вероятностных пространствах случайных множеств можно строить различными способами. Выбор метода построения такой структуры определяется теми общими свойствами, которыми, по предположению, с вероятностью единица должны обладать случайные реализации. Так, в теории очередей изучаются случайные множества в $\mathbb{R}$, реализации которых с вероятностью единица состоят из изолированных точек (см., например, [2]), в частности, так называемые *ординарные потоки* (см., например, [3]). В более общем многомерном случае такого рода случайные множества возникают в статистической механике точечных частиц [4]. В обеих указанных теориях используются различные приемы построения вероятностного пространства. В противоположном, в смысле топологической размерности реализаций, случае, когда требуется, чтобы случайные множества представлялись составленными с вероятностью единица из областей евклидового пространства $\mathbb{R}^d$, случайной формы и размеров, как это имеет место в теории распознавания образов [5] или в физике гетерогенно неупорядоченных сред [6], методы, разработанные в указанных выше случаях, становятся непригодными, и поэтому используются иные конструкции вероятностных пространств. В приложениях рассматриваются различные случайные множества, реализации которых с вероятностью единица составляются из случайных кривых с определенными свойствами (статистическая физика полимерных молекул [7]), поверхностей (модели пенообразных сред) и т. д. В статистической физике неупорядоченных сред [6] возникает необходимость синтеза и анализа такого рода моделей. Как правило, эти модели либо конечномерны (множество случайных величин, параметризующих реализации, конечно) и поэтому не возникает необходимости специального описания структуры измеримости в соответствующих вероятностных пространствах, либо распределение вероятностей в них вводится таким же образом, как и в статистической механике точечных частиц, т. е. посредством предельного перехода (термодинамический предел) по набору конечномерных распределений при неограниченном увеличении размерности. В последнем случае, однако, возникает проблема существования этого предела.

© Ю. П. ВИРЧЕНКО, О. Л. ШПИЛИНСКАЯ, 2004

Часто в конструкциях вероятностных моделей, встречающихся в приложениях, предметом которых является изучение случайных множеств, нет необходимости явно задавать структуру измеримости, например, как в известной модели [8, 9], описывающей динамику кристаллизации. В этих моделях случайные множества индуцируются отображениями элементарных событий из другого, корректно определенного математически, вероятностного пространства.

Заметим, что во всех перечисленных примерах случайные множества имеют целочисленную метрическую характеристику (называемую фрактальной размерностью), определяемую на основе покрытий реализаций геометрическими фигурами, принадлежащими заданному фиксированному семейству, например семейству параллелепипедов в $\mathbb{R}^d$ (по поводу точного математического определения фрактальной размерности см. [10]). В статистической физике, однако, возникла необходимость вероятностного описания случайных множеств с нецелочисленной фрактальной размерностью — так называемых *стохастических фракталов*. Частично эта проблема решается приемом, упомянутым выше, — представлением реализаций случайных множеств в виде образов элементарных событий из заданного достаточно богатого вероятностного пространства. А именно, случайные множества, в частности, имеющие реализации с дробной фрактальной размерностью, можно задавать в виде графиков реализаций случайных полей. Такой подход наиболее распространен в физической литературе (см., например, [11]). Впервые такой подход к синтезу моделей случайных геометрических структур был предложен в работе [12]. Не следует думать, что представление случайных множеств в виде графиков случайных полей имеет универсальный характер. В самом деле, каждой реализации $\tilde{X}$ случайного множества в $\mathbb{R}^d$ можно сопоставить индикаторную функцию $\theta\left(x\middle|\tilde{X}\right)$, $x \in \mathbb{R}^d$, которую допустимо рассматривать как реализацию случайного поля $\left\{\tilde{\theta}(x)\right\}$, принимающего с вероятностью единица значения $\{0, 1\}$. Случайное же поле $\{\theta(x)\}$ определяется при этом семейством мер — конечномерных распределений [13]. Однако такой подход имеет естественное и весьма существенное для приложений ограничение. Таким образом возможно задавать случайные множества только в том случае, когда случайное поле $\{\theta(x)\}$ допускает сепарабельную модификацию и эта модификация нетривиальна. Последнее уже не имеет места для простейших случайных множеств, которые описываются ординарными потоками. Попытка задавать их посредством индикаторных функций приводит к несепарабельному случайному процессу. Ввиду указанного ограничения возможностей синтеза моделей случайных множеств посредством графиков случайных полей и необходимости рассмотрения моделей более общего типа с реализациями, имеющими дробную фрактальную размерность, кажется естественной идея о том, что если фрактальные геометрические структуры изучаются на основе покрытий, то и синтез стохастических фракталов, в частности определение структуры измеримости на пространстве элементарных событий, нужно осуществлять также на основе покрытий.

В работах авторов [10, 14] предложено определять вероятностную меру для стохастических фракталов на так называемых *измельчениях* пространства. На этой основе были построены модели стохастических фракталов с произвольной фрактальной размерностью, которые были названы *случайными точечными полями с марковскими измельчениями*. Однако при этом определение структуры измеримости было тесно связано с типом используемого измельчения. Возникает вопрос о возможности такого ее определения, которое не имело бы этого недостатка. В настоящей работе дан положительный ответ на этот вопрос. Для простоты рассмотрен только одномерный случай. Обобщение на многомерный случай можно осуществить изменением терминологии и путем более громоздких обозначений.

В п. 3 введено понятие так называемых c-систем случайных событий и доказана теорема об однозначном продолжении меры с c-системы на минимальную σ-алгебру, порождаемую ею. Далее, в п. 4 доказано, что введенная в п. 2 система $\mathbb{F}(\mathfrak{E}, C)$ случайных событий, описывающих случайные множества посредством покрытий, является c-системой и при этом формулируемые ниже условия согласованности для распределения вероятностей на $\mathbb{F}(\mathfrak{E}, C)$ являются необходимыми и достаточными для введения распределения вероятностей на минимальной σ-алгебре, порождаемой этой системой.

2. Система $\mathbb{F}(\mathfrak{E}, C)$ случайных событий. В этом пункте мы построим систему случайных событий, пригодную для вероятностного описания случайных множеств на $\mathbb{R}$. Эта система оказывается достаточной в том смысле, что порождаемая ею минимальная σ-алгебра случайных событий настолько богата, что так называемая фрактальная размерность реализаций является *случайной величиной*.

Обозначим через $\mathfrak{E} = \left\{ \tilde{X};\ \tilde{X} \subset \mathbb{R} \right\}$ пространство элементарных событий — случайных реализаций $\tilde{X}$, являющихся подмножествами из $\mathbb{R}$. Рассмотрим случайные события, которые описывают свойства реализаций $\tilde{X}$ на основе покрытий их полуоткрытыми интервалами в $\mathbb{R}$. Пусть $\Delta = \langle \delta_1, \ldots, \delta_n \rangle$, $n \in \mathbb{N}$, — конечные упорядоченные наборы непересекающихся полуоткрытых интервалов, $\delta_i = [a_i, b_i)$, $a_i < b_i$, $\delta_i \subset \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, $b_i \le a_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Совокупность всех таких наборов обозначим $\mathbb{S}$.

Введем расслоение C на множестве $\mathbb{S}$ с базой $\left\{ \{0,1\}^n;\ n \in \mathbb{N} \right\}$, где каждый слой $C^{-1}(\Theta)$, $\Theta = \langle \theta_1, \ldots, \theta_n \rangle$, $\theta_i \in \{0, 1\}$, $i = 1, \ldots, n$, представляет собой множество упорядоченных наборов $\{ \Delta \in \mathbb{S};\ \Delta = \langle \delta_1, \ldots, \delta_n \rangle \}$. Расслоение C является инструментом „координатизации" конструируемой системы случайных событий.

Далее, обозначим через $\chi(\cdot|X)$ индикаторные функции на $\mathbb{S}$, порождаемые подмножествами $X \subset \mathbb{R}$. А именно, определим для любого полуинтервала $\sigma \subset \subset \mathbb{R}$ и произвольного множества $X \subset \mathbb{R}$ индикаторы

$$\chi(\sigma|X) = \begin{cases} 1, & \sigma \bigcap X \neq \varnothing, \\ 0, & \sigma \bigcap X = \varnothing. \end{cases}$$

Для произвольного набора $\langle \delta_1, \ldots, \delta_n \rangle \in \mathbb{S}$ набор индикаторов $\langle \chi(\delta_i|X);\ i = 1, \ldots, n \rangle$ составляет набор из базы расслоения $\left\{ \{0,1\}^n;\ n \in \mathbb{N} \right\}$. Тогда расслоение C есть множество пар $\langle \Delta, \Theta \rangle$, где $\Delta \in \mathbb{S}$ и Θ — набор индикаторов, связанных с Δ.

Определим систему $\mathbb{F}(\mathfrak{E}, C) = \left\{ \tilde{A}(\langle \Delta, \Theta \rangle);\ \langle \Delta, \Theta \rangle \in C \right\}$ случайных *цилиндрических событий*

$$\tilde{A}(\langle \Delta, \Theta \rangle) = \left\{ \tilde{X}\colon \chi\left(\delta|\tilde{X}\right) = \Theta(\delta),\ \delta \in \Delta \right\},$$
$$\Theta = \langle \Theta(\delta);\ \delta \in \Delta \rangle. \tag{1}$$

Обозначим $\langle \Delta, \Theta \rangle = \langle \delta, \theta \rangle$ в случае, если набор Δ состоит из одного интервала δ, которому сопоставлено число $\theta \in \{0, 1\}$. Тогда из определения (1) следует, что для любой пары $\langle \Delta, \Theta \rangle \in C$

$$\tilde{A}(\langle \Delta, \Theta \rangle) = \bigcap_{\delta \in \Delta} \tilde{A}(\langle \delta, \Theta(\delta) \rangle). \qquad (2$$

В частности, если полуинтервал σ представить в виде дизъюнктивного объеди нения полуинтервалов $\langle \delta_1, \ldots, \delta_n \rangle$, $\sigma = \bigcup_{i=1}^{n} \delta_i$, то

$$\tilde{A}(\langle \sigma, 0 \rangle) = \bigcap_{i=1}^{n} \tilde{A}(\langle \delta_i, 0 \rangle). \qquad (3$$

Точно так же из определения непосредственно следует

$$\tilde{A}(\langle \delta, \theta \rangle) \cap \tilde{A}(\langle \delta, \theta' \rangle) = \varnothing \qquad (4$$

при $\theta \neq \theta'$. Кроме того, для любого полуинтервала δ справедливо тождество

$$\tilde{A}(\langle \delta, 0 \rangle) \cup \tilde{A}(\langle \delta, 1 \rangle) = \mathfrak{E}. \qquad (5$$

Пусть набор Δ получается из набора $\Delta' = \langle \delta'_1, \ldots, \delta'_{n'} \rangle$ операцией проекти рования, т. е. вычеркиванием из Δ' подходящих компонент δ'_i. В этом случа будем писать $\Delta = P(\Delta')$.

Если имеет место отношение $\Delta = P(\Delta')$ и набор Θ в паре $\langle \Delta, \Theta \rangle$ получае ся из набора Θ' в паре $\langle \Delta', \Theta' \rangle$ вычеркиванием компонент, одноименных с те ми, которые вычеркиваются при проектировании Δ' на Δ, то будем писать $\Theta = P_{(\Delta', \Delta)}(\Theta')$.

Из формул (2), (4) непосредственно следует такая лемма.

Лемма 1. *Для фиксированного набора Δ события $\tilde{A}(\langle \Delta, \Theta \rangle)$, $\tilde{A}(\langle \Delta, \Theta' \rangle)$ порождаемые различными упорядоченными наборами Θ, Θ', не пересекаютс. Кроме того, для любого набора Δ' такого, что $\Delta = P(\Delta')$, имеет место ди зъюнктивное разложение*

$$\tilde{A}(\langle \Delta, \Theta \rangle) = \bigcup_{\{\Theta' :\, P_{(\Delta', \Delta)}(\Theta') = \Theta,\ C(\Delta') = \Theta'\}} \tilde{A}(\langle \Delta', \Theta' \rangle).$$

В частности, имеет место разложение

$$\mathfrak{E} = \bigcup_{\Theta \subset \{0,1\}^n} \tilde{A}(\langle \Delta, \Theta \rangle), \qquad n = \mathrm{Card}\,(\Delta). \qquad (6$$

(Во всех дальнейших формулах, где встречается перечисление наборов Θ всегда полагается, что $C(\Delta) = \Theta$, как это имеет место в предыдущей формуле

Заметим, что параметризация случайных событий $\tilde{A}(\langle \Delta, \Theta \rangle)$ на основе па $\langle \Delta, \Theta \rangle \in C$ неоднозначна.

Заменим любую пару $\langle \Delta, \Theta \rangle$ на пару $\langle \Delta', \Theta' \rangle$, получаемую разбиением лю бого $\delta \in \Delta$, для которого $\Theta(\delta) = 0$, на два полуинтервала δ_1, δ_2, $\delta_1 \cup \delta_2 = \delta$ и заменой δ в наборе Δ упорядоченной естественным образом парой $\langle \delta_1, \delta_2$ При этом набор Θ преобразуется в Θ' заменой в нем компоненты $\Theta(\delta) = 0$ н упорядоченную пару $\langle \Theta'(\delta_1) = 0,\ \Theta'(\delta_2) = 0 \rangle$. Если две пары $\langle \Delta, \Theta \rangle$, $\langle \Delta', \Theta$ связаны таким образом, что одна из них может быть получена из другой опи санным преобразованием, то такие пары будем называть *смежными*, само преоб разование — *преобразованием разрезания*, а обратное — *склейки*. На основ нии формул (2), (3) очевидным образом делается вывод о том, что смежные па ры параметризуют одно и то же событие $\tilde{A}(\langle \Delta, \Theta \rangle) = \tilde{A}(\langle \Delta', \Theta' \rangle)$.

Отношение смежности порождает класс пар, эквивалентных данной пар $\tilde{A}(\langle \Delta, \Theta \rangle)$, посредством многократного применения преобразований разрезани и склейки. При этом класс эквивалентных пар порождает отношение эквив лентности $\sim$ и все эквивалентные пары $\langle \Delta, \Theta \rangle$ описывают одно и то же событие $\tilde{A}(\langle \Delta, \Theta \rangle)$.

Введем следующие понятия. Для каждого элемента $\Delta \in \mathbb{S}$ из слоя $C^{-1}(\Theta)$, порождаемого упорядоченным набором Θ, определим множество

$$N(\langle \Delta, \Theta \rangle) = \bigcup_{\delta \in \Delta:\ \Theta(\delta)=0} \delta \subset \mathbb{R}$$

и упорядоченный набор $\overline{\Delta} = \langle \delta \in \Delta,\ \Theta(\delta) = 1 \rangle = P(\Delta)$.

Будем говорить, что пара $\langle \Delta', \Theta' \rangle$ подчинена паре $\langle \Delta, \Theta \rangle$, если для каждого полуинтервала $\delta \in \Delta$ существует полуинтервал $\delta' \in \Delta'$ такой, что $\delta' \subset \delta$. Отношение подчинения между парами $\langle \Delta, \Theta \rangle$ и $\langle \Delta', \Theta' \rangle$ будем обозначать знаком $\succ$, т. е. в указанном выше случае будем писать $\langle \Delta, \Theta \rangle \succ \langle \Delta', \Theta' \rangle$. Роль введенных понятий характеризует следующее утверждение.

Лемма 2. *Для того чтобы имело место включение*

$$\tilde{A}(\langle \Delta', \Theta' \rangle) \subset \tilde{A}(\langle \Delta, \Theta \rangle) \tag{7}$$

для двух фиксированных пар $\langle \Delta, \Theta \rangle$, $\langle \Delta', \Theta' \rangle$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$N(\langle \Delta, \Theta \rangle) \subset N(\langle \Delta', \Theta' \rangle), \tag{8}$$

$$\langle \Delta, \Theta \rangle \succ \langle \Delta', \Theta' \rangle. \tag{9}$$

Доказательство. *Необходимость.* Предположим, что условие (8) не выполняется, т. е.

$$N(\langle \Delta, \Theta \rangle) \setminus N(\langle \Delta', \Theta' \rangle) \neq \varnothing.$$

Тогда найдется реализация $\tilde{X} \in \tilde{A}(\langle \Delta', \Theta' \rangle)$, которая имеет непустое пересечение с множеством $N(\langle \Delta, \Theta \rangle) \setminus N(\langle \Delta', \Theta' \rangle)$. Следовательно, в наборе $\langle \delta \in \Delta,\ \Theta(\delta) = 0 \rangle$ найдется такой интервал $\delta(\delta') \subset N(\langle \Delta, \Theta \rangle)$, для которого $\delta(\delta') \cap \tilde{X} \neq \varnothing$, т. е. $\chi\left(\delta(\delta') | \tilde{X}\right) = 1 \neq \Theta(\delta(\delta')) = 0$. Поэтому $\tilde{X} \notin \tilde{A}(\langle \Delta, \Theta \rangle)$, что противоречит (7).

Далее, допустим, что (9) не имеет места. Тогда существует такой полуинтервал $\delta \in \overline{\Delta}$, для которого $\delta' \setminus \delta \neq \varnothing$ при всех $\delta' \in \overline{\Delta}'$. В таком случае можно выбрать $\tilde{X} \in \tilde{A}(\langle \Delta', \Theta' \rangle)$ так, чтобы $\tilde{X} \cap \delta = \varnothing$ и при этом $\tilde{X} \cap \delta' \neq \varnothing$ при всех $\delta' \in \overline{\Delta}'$. Такой выбор не будет противоречить условиям $\tilde{X} \cap \delta' = \varnothing$ для всех тех компонент δ' из Δ', для которых $\Theta'(\delta') = 0$. Следовательно, для такой реализации $\tilde{X}$ выполняется $\chi\left(\delta | \tilde{X}\right) = 0$, что означает $\tilde{X} \notin$ $\notin \tilde{A}(\langle \Delta, \Theta \rangle)$, так как для этого события $\chi\left(\delta | \tilde{X}\right) = \Theta(\delta) = 1$. Это противоречит (7). Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть теперь, наоборот, условия (8), (9) выполняются. Рассмотрим любую реализацию $\tilde{X} \in \tilde{A}(\langle \Delta', \Theta' \rangle)$, для которой $\chi\left(\delta' | \tilde{X}\right) =$ $= \Theta'(\delta')$, $\delta' \in \Delta'$. Покажем, что в этом случае $\chi\left(\delta | \tilde{X}\right) = \Theta(\delta)$, $\delta \in \Delta$.

Пусть $\Theta(\delta) = 1$, т. е. $\delta \in \overline{\Delta}$. Тогда, согласно (9), найдется компонента δ' в Δ', зависящая от δ, т. е. $\delta' \equiv \delta'(\delta)$, такая, что $\delta'(\delta) \subset \delta$ и $\delta'(\delta) \in \overline{\Delta}'$, т. е. $\tilde{X} \cap \delta'(\delta) \neq \varnothing$ и поэтому $\tilde{X} \cap \delta \neq \varnothing$. Иными словами, если $\Theta(\delta) = 1$, то $\Theta(\delta'(\delta)) = 1$ и $\chi\left(\delta | \tilde{X}\right) = 1$.

Пусть $\Theta(\delta) = 0$, т. е. $\delta \subset N(\langle \Delta, \Theta \rangle)$. Ввиду (8), найдется упорядоченный набор полуинтервалов $\left\langle \delta'_{i_1}, \ldots, \delta'_{i_s} \right\rangle$, являющийся проекцией Δ', такой, что

$\delta \subset \bigcup_{j=1}^{s} \delta'_{i_j} \subset N(\langle \Delta', \Theta' \rangle)$. Поскольку $\tilde{X} \in \tilde{A}(\langle \Delta', \Theta' \rangle)$, то $\chi(\delta' | \tilde{X}) = \Theta'(\delta') = 0$, т. е. выполняется $\tilde{X} \cap \delta' = \varnothing$. Следовательно, $\tilde{X} \cap \delta = \varnothing$ и поэтому $\chi(\delta | \tilde{X}) = 0$, что совпадает с $\Theta(\delta) = 0$. Отсюда вместе с выводом предыдущего абзаца следует, что $\tilde{X} \in \tilde{A}(\langle \Delta, \Theta \rangle)$. Поскольку реализация $\tilde{X}$ произвольна, то имеет место включение (7). Достаточность доказана.

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 3. *Для совпадения событий* $\tilde{A}(\langle \Delta, \Theta \rangle)$ *и* $\tilde{A}(\langle \Delta', \Theta' \rangle)$ *необходимо и достаточно, чтобы* $\langle \Delta, \Theta \rangle \sim \langle \Delta', \Theta' \rangle$.

Доказательство. При выполнении $\langle \Delta, \Theta \rangle \sim \langle \Delta', \Theta' \rangle$ совпадение событий $\tilde{A}(\langle \Delta, \Theta \rangle)$ и $\tilde{A}(\langle \Delta', \Theta' \rangle)$ следует из определения отношения $\sim$.

Пусть, наоборот, $\tilde{A}(\langle \Delta, \Theta \rangle) = \tilde{A}(\langle \Delta', \Theta' \rangle)$. Тогда на основании леммы 2 заключаем, что

$$N(\langle \Delta, \Theta \rangle) = N(\langle \Delta', \Theta' \rangle) \tag{10}$$

и одновременно имеют место отношения $\langle \Delta, \Theta \rangle \succ \langle \Delta', \Theta' \rangle$, $\langle \Delta', \Theta' \rangle \succ \langle \Delta, \Theta \rangle$. Последнее означает, что для каждого $\delta \in \overline{\Delta}$ найдется $\delta' \in \overline{\Delta}'$, $\delta' \subset \delta$, и наоборот. Это возможно только в случае, если $\overline{\Delta}' = \overline{\Delta}$.

Обратимся теперь к условию (10). Разобьем множество $N(\langle \Delta, \Theta \rangle)$ на связные компоненты $\sigma_1, \ldots, \sigma_p$. Они являются общими для обоих наборов $\langle \Delta', \Theta' \rangle$ и $\langle \Delta, \Theta \rangle$. Каждой связной компоненте σ_i в наборе Δ соответствует набор $\Delta_i = P(\Delta) = \left\langle \delta_1^{(i)}, \ldots, \delta_{s_i}^{(i)} \right\rangle$, $i = 1, \ldots, p$, а в наборе Δ' — набор $\Delta'_i = P(\Delta') = \left\langle \delta_1'^{(i)}, \ldots, \delta_{s'_i}'^{(i)} \right\rangle$, $i = 1, \ldots, p$. При этом $P_{(\Delta, \Delta_i)}(\Theta) = \Theta_i = \underbrace{\langle 0, \ldots, 0 \rangle}_{s_i}$, $P_{\langle \Delta', \Delta'_i \rangle}(\Theta') = \Theta'_i = \underbrace{\langle 0, \ldots, 0 \rangle}_{s'_i}$,

$$\bigcup_{j=1}^{s_i} \delta_j^{(i)} = \bigcup_{j=1}^{s'_i} \delta_j'^{(i)} = \sigma_i, \quad i = 1, \ldots, p.$$

Посредством последовательных преобразований склейки для каждого $i = 1, \ldots, p$ можно перевести наборы Δ_i и Δ'_i в однокомпонентный набор σ_i. Тогда на основании формулы (3) получим

$$\tilde{A}(\langle \sigma_i, 0 \rangle) = \tilde{A}(\langle \Delta_i, \Theta_i \rangle) = \tilde{A}(\langle \Delta'_i, \Theta'_i \rangle), \quad i = 1, \ldots, p.$$

Беря пересечение этих событий при $i = 1, \ldots, p$, имеем

$$\bigcap_{i=1}^{p} \tilde{A}(\langle \sigma_i, 0 \rangle) = \bigcap_{\delta \subset N(\langle \Delta, \Theta \rangle)} \tilde{A}(\langle \delta, 0 \rangle) = \bigcap_{\delta' \subset N(\langle \Delta', \Theta' \rangle)} \tilde{A}(\langle \delta', 0 \rangle).$$

Наконец, на основании (2) и факта совпадения $\overline{\Delta} = \overline{\Delta}'$ находим

$$\tilde{A}(\langle \Delta, \Theta \rangle) = \left(\bigcap_{\delta \in \overline{\Delta}} \tilde{A}(\langle \delta, 1 \rangle) \right) \left(\bigcap_{\delta \subset N(\langle \Delta, \Theta \rangle)} \tilde{A}(\langle \delta, 0 \rangle) \right) =$$

$$= \left(\bigcap_{\delta' \in \overline{\Delta}'} \tilde{A}(\langle \delta', 1 \rangle) \right) \left(\bigcap_{\delta' \subset N(\langle \Delta', \Theta' \rangle)} \tilde{A}(\langle \delta', 0 \rangle) \right) = \tilde{A}(\langle \Delta', \Theta' \rangle).$$

Лемма 3 доказана.

Пусть теперь на системе $\mathbb{F}(\mathfrak{E}, C)$ задано распределение вероятностей $P(\Delta,$

$\Theta) = \Pr\left\{\tilde{A}(\langle\Delta, \Theta\rangle)\right\}$. Вследствие леммы 1 набор этих вероятностей должен удовлетворять соотношениям *согласованности*

$$P(\Delta, \Theta) = \sum_{\Theta':\, P_{(\Delta', \Delta)}(\Theta') = \Theta} P(\Delta', \Theta'), \tag{11}$$

что в сочетании с (4), (5) дает свойство нормированности,

$$1 = \sum_{\Theta \in \{0, 1\}^n} P(\Delta, \Theta), \qquad n = \operatorname{Card}(\Delta). \tag{12}$$

Кроме того, вследствие неоднозначности параметризации событий $\tilde{A}(\langle\Delta, \Theta\rangle)$ функция $P(\Delta, \Theta)$ должна удовлетворять тождествам

$$P(\Delta, \Theta) = P(\Delta', \Theta'), \tag{13}$$

если пары $\langle\Delta, \Theta\rangle$, $\langle\Delta', \Theta'\rangle$ эквивалентны.

3. *c*-Системы и продолжение меры. С целью построения структуры измеримости в наиболее общем виде, дающем возможность применять ее не только для вероятностного описания случайных множеств в $\mathbb{R}^d$, но и в других возможных случаях при решении проблемы построения меры, будем рассматривать произвольное пространство $\mathfrak{E}$. Обозначим через $\mathcal{P}(\mathfrak{E})$ семейство всех подмножеств этого пространства. Элементы этого семейства будем обозначать, в общем случае, готическими буквами. Для удобства рассуждений будем считать, что семейство $\mathcal{P}(\mathfrak{E})$ „координатизовано", т. е. все его элементы занумерованы метками. Множество меток обозначим через $\mathcal{J}$, а его элементы будем обозначать буквами i, j, k. Буква $\mathfrak{C}$ будет служить символом типичного элемента множества $\mathcal{P}(\mathfrak{E})$. Таким образом, $\mathcal{P}(\mathfrak{E}) = \{\mathfrak{C}_i \subset \mathfrak{E};\ i \in \mathcal{J}\}$.

Определение. *Систему* $\mathbb{F}$ *множеств из* $\mathcal{P}(\mathfrak{E})$ *будем называть c-системой, если она содержит* $\varnothing$ *и удовлетворяет следующим условиям:*

a) *если* $\mathfrak{A}$ *и* $\mathfrak{B}$ *принадлежат системе* $\mathbb{F}$, *то множество* $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ *представимо в виде конечного дизъюнктивного разложения*

$$\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} = \bigcup_{i \in I} \mathfrak{C}_i, \qquad I \subset \mathcal{J},$$

с элементами $\varnothing \neq \mathfrak{C}_i \in \mathbb{F}$, $i \in I$, *т. е.* $\mathfrak{C}_i \cap \mathfrak{C}_j = \varnothing$ *при* $i \neq j$ *для всех значений индексов* $i, j \in I$;

b) *если* $\mathfrak{A} \in \mathbb{F}$, *то существует конечный дизъюнктивный набор* $\{\mathfrak{C}_j;\ j \in J\}$, $\mathfrak{C}_i \cap \mathfrak{C}_j = \varnothing$, $i, j \in J$, *множеств из* $\mathbb{F}$ *такой, что*

$$\complement\mathfrak{A} = \bigcup_{j \in J} \mathfrak{C}_j, \qquad J \subset \mathcal{J}.$$

Основное свойство c-систем выражается следующей теоремой.

Теорема 1. *Пусть* $\mathbb{F}$ — *c-система в* $\mathcal{P}(\mathfrak{E})$ *и* $\mathcal{A}(\mathbb{F})$ — *система множеств, определяемая формулой*

$$\mathcal{A}(\mathbb{F}) = \left\{\bigcup_{i \in I} \mathfrak{C}_i : \mathfrak{C}_i \in \mathbb{F},\ i \in I;\ \mathfrak{C}_i \cap \mathfrak{C}_j = \varnothing,\ i \neq j;\ i, j \in I;\ \operatorname{Card}(I) < \aleph_0\right\}.$$

Тогда $\mathcal{A}(\mathbb{F})$ — *булева алгебра. Она является минимальной алгеброй, содержащей систему* $\mathbb{F}$.

Доказательство. Проверим замкнутость системы $\mathcal{A}(\mathbb{F})$ относительно операций $\cup$, $\cap$, $\complement$. Пусть $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ — произвольные множества из $\mathcal{A}(\mathbb{F})$. Тогда они представимы в виде

$$\mathfrak{A} = \bigcup_{i\in I} \mathfrak{C}_i, \quad \mathfrak{C}_i \in \mathbb{F}, \quad i \in I,$$
$$\mathfrak{B} = \bigcup_{j\in J} \mathfrak{C}_j, \quad \mathfrak{C}_j \in \mathbb{F}, \quad j \in J.$$

Вследствие свойства a) определения для любых $\mathfrak{C}_i$ и $\mathfrak{C}_j$ определено конечное множество $K_{i,j} \subset \mathcal{J}$ такое, что справедливо дизъюнктивное разложение

$$\mathfrak{C}_i \cap \mathfrak{C}_j = \bigcup_{k\in K_{i,j}} \mathfrak{C}_k \tag{14}$$

с $\mathfrak{C}_k \in \mathbb{F}$, $k \in K_{i,j}$. Кроме того, так как наборы множеств $\mathfrak{C}_i$, $i \in I$, и $\mathfrak{C}_j$, $j \in J$, дизъюнктивны, то при $i_1, i_2 \in I$, $j_1, j_2 \in J$, согласно (14), для множеств $\mathfrak{C}_{k_1}$, $\mathfrak{C}_{k_2}$ с метками $k_1 \in K_{i_1,j_1}$, $k_2 \in K_{i_2,j_2}$ выполняется $\mathfrak{C}_{k_1} \cap \mathfrak{C}_{k_2} = \varnothing$. Это имеет место либо вследствие того, что выполняется хотя бы одно из неравенств $i_1 \neq i_2$, $j_1 \neq j_2$, либо при $i_1 = i_2 = i$ и $j_1 = j_2 = j$ пустота пересечения при несовпадающих k_1, k_2 следует из определения множеств $\mathfrak{C}_k$ посредством равенства (14). Поэтому следующее разложение является дизъюнктивным:

$$\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} = \bigcup_{i\in I} \bigcup_{j\in J} \left(\mathfrak{C}_i \cap \mathfrak{C}_j\right) = \bigcup_{i\in I} \bigcup_{j\in J} \bigcup_{k\in K_{i,j}} \mathfrak{C}_k$$

и, следовательно, $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} \in \mathcal{A}(\mathbb{F})$.

Далее, индукцией по $p = 1, 2, \ldots$, исходя из свойства a) определения c-системы, с очевидностью следует, что для любого набора множеств $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_p$, для их пересечения всегда имеет место дизъюнктивное разложение

$$\bigcap_{s=1}^{p} \mathfrak{A}_s = \bigcup_{j\in J} \mathfrak{C}_j \tag{15}$$

с некоторым множеством J меток из $\mathcal{J}$.

Из пункта b) определения c-системы следует, что для каждого $\mathfrak{C}_i$, $i \in I$, найдется конечное множество меток $J_i \subset \mathcal{J}$ такое, что имеет место дизъюнктивное разложение

$$\complement \mathfrak{C}_i = \bigcup_{j\in J_i} \mathfrak{C}_j,$$

$\mathfrak{C}_j \cap \mathfrak{C}_k = \varnothing$ при $j \neq k$. Тогда, учитывая закон двойственности, для дополнения множества $\mathfrak{A} = \bigcup_{i\in I} \mathfrak{C}_i$ получаем

$$\complement \mathfrak{A} = \complement\left(\bigcup_{i\in I} \mathfrak{C}_i\right) = \bigcap_{i\in I} \complement \mathfrak{C}_i = \bigcap_{i\in I} \bigcup_{j\in J_i} \mathfrak{C}_j = \bigcup_{\gamma\in\Gamma}\left(\bigcup_{j\in\gamma} \mathfrak{C}_j\right),$$

где $\Gamma = \otimes_{i\in I} J_i$ — множество, состоящее из упорядоченных наборов $\gamma = \langle j_i; i \in I\rangle$, занумерованных метками из I с i-ми компонентами из J_i. При этом совокупность множеств $\left(\bigcap_{j\in\gamma} \mathfrak{C}_j\right)$, $\gamma \in \Gamma$, дизъюнктивна, так как в пересечении

$$\left(\bigcap_{j_1\in\gamma_1} \mathfrak{C}_{j_1}\right) \cap \left(\bigcap_{j_2\in\gamma_2} \mathfrak{C}_{j_2}\right)$$

с несовпадающими γ_1, γ_2 найдется пустое пересечение $\mathfrak{C}_{j_1} \cap \mathfrak{C}_{j_2} = \varnothing$ с j_1, j_2, являющимися несовпадающими одноименными (т. е. выбранными из одного и того же J_i) компонентами упорядоченных наборов γ_1, γ_2.

Используя разложения (15) для попарно непересекающихся множеств $\left(\bigcap_{j\in\gamma}\mathfrak{C}_j\right)$, $\gamma\in\Gamma$, получаем дизъюнктивное разложение множества $\complement\mathfrak{A}$ по множествам системы $\mathbb{F}$, т. е. $\complement\mathfrak{A}\in\mathcal{A}(\mathbb{F})$.

Наконец, из $\mathfrak{A}\in\mathcal{A}(\mathbb{F})$, $\mathfrak{B}\in\mathcal{A}(\mathbb{F})$ получаем $\mathfrak{A}\bigcup\mathfrak{B}\in\mathcal{A}(\mathbb{F})$. Это следует из представления

$$\mathfrak{A}\bigcup\mathfrak{B} = \complement(\complement\mathfrak{A}\bigcap\complement\mathfrak{B})$$

и доказанной выше замкнутости относительно операций $\bigcap$ и $\complement$.

Минимальность алгебры $\mathcal{A}(\mathbb{F})$ среди алгебр, содержащих систему $\mathbb{F}$, очевидна.

Теорема 1 доказана.

Доказанная теорема позволяет указать каким образом элементы минимальной σ-алгебры, порождаемой данной c-системой, конструируются из элементов этой системы.

Следствие. *Для c-системы $\mathbb{F}$ множеств из $\mathcal{P}(\mathfrak{E})$ минимальная σ-алгебра $\mathcal{A}_\infty(\mathbb{F})$, содержащая ее, состоит только из таких элементов $\mathfrak{A}$, которые представимы в виде пределов*

$$\mathfrak{A} = \lim_{n\to\infty}\mathfrak{A}_n$$

монотонных последовательностей

$$\mathfrak{A}_n = \bigcup_{k\in I_n}\mathfrak{C}_k, \quad \mathfrak{C}_i\bigcap\mathfrak{C}_j = \varnothing, \quad i\neq j,$$

$$i,j\in I_n\subset\mathcal{J}, \quad \operatorname{Card}(I_n) < \aleph_0, \quad n = 1,2,\ldots.$$

Явное построение минимальной σ-алгебры, содержащей заданную фиксированную c-систему $\mathbb{F}$, позволяет, в свою очередь, доказать однозначность продолжения аддитивной меры, определенной на $\mathbb{F}$, до σ-аддитивной меры на $\mathcal{A}_\infty(\mathbb{F})$.

Теорема 2. *Пусть на c-системе $\mathbb{F}$ определена аддитивная (σ-аддитивная), ограниченная функция $\mu(\cdot)$, т. е. такая, что для каждого конечного (не более чем счетного) дизъюнктивного разложения множества $\mathfrak{C}$ из $\mathbb{F}$ по множествам, также принадлежащим $\mathbb{F}$,*

$$\mathfrak{C} = \bigcup_{i\in I}\mathfrak{C}_i,$$

выполняется

$$\mu(\mathfrak{C}) = \sum_{i\in I}\mu(\mathfrak{C}_i).$$

Тогда эта функция однозначным образом продолжается до аддитивной (σ-аддитивной) функции $\overline{\mu}(\cdot)$ на минимальной алгебре $\mathcal{A}(\mathbb{F})$ (σ-алгебре $\mathcal{A}_\infty(\mathbb{F})$), содержащей систему $\mathbb{F}$.

Доказательство. Достаточно проверить однозначность продолжения по аддитивности (σ-аддитивности), что осуществляется таким же образом, как и в случае продолжения меры с булевского полукольца (см., например, [15]). Пусть $\mathfrak{A}\in\mathcal{A}(\mathbb{F})$ ($\mathfrak{A}\in\mathcal{A}_\infty(\mathbb{F})$). На основании следствия теоремы 1 множество $\mathfrak{A}$ представимо в виде дизъюнктивного разложения

$$\mathfrak{A} = \bigcup_{i \in I} \mathfrak{C}_i, \quad \mathfrak{C}_i \in \mathbb{F}, \quad \operatorname{Card}(I_n) < \aleph_0 \quad (\operatorname{Card}(I) \le \aleph_0).$$

Поэтому значение $\overline{\mu}_1(\mathfrak{A})$ функции $\overline{\mu}(\cdot)$ на $\mathfrak{A}$, следуя ее σ-аддитивности на $\mathcal{A}_\infty(\mathbb{F})$, должно быть определено посредством этого разложения:

$$\overline{\mu}_1(\mathfrak{A}) = \sum_{i \in I} \mu(\mathfrak{C}_i).$$

По любому другому представлению множества $\mathfrak{A}$ в виде дизъюнктивного разложения

$$\mathfrak{A} = \bigcup_{j \in J} \mathfrak{C}_j, \quad \mathfrak{C}_j \in \mathbb{F}, \quad \operatorname{Card}(J) < \aleph_0 \quad (\operatorname{Card}(J) \le \aleph_0),$$

значение $\overline{\mu}_2(\mathfrak{A})$ функции $\overline{\mu}(\cdot)$ на множестве $\mathfrak{A}$ должно быть определено как равное:

$$\overline{\mu}_2(\mathfrak{A}) = \sum_{j \in J} \mu(\mathfrak{C}_j).$$

Сравнивая имеющиеся два разложения множества $\mathfrak{A}$, получаем конечное (не более чем счетное) дизъюнктивное разложение для каждого множества $\mathfrak{C}_i$, $i \in I$:

$$\mathfrak{C}_i = \mathfrak{C}_i \cap \mathfrak{A} = \mathfrak{C}_i \cap \left(\bigcup_{j \in J} \mathfrak{C}_j \right) = \bigcup_{j \in J} (\mathfrak{C}_i \cap \mathfrak{C}_j) = \bigcup_{j \in J} \bigcup_{k \in K_{i,j}} \mathfrak{C}_k. \qquad (16)$$

Они дизъюнктивны, так как согласно определению c-системы в разложении

$$\mathfrak{C}_i \cap \mathfrak{C}_j = \bigcup_{k \in K_{i,j}} \mathfrak{C}_k$$

с метками из множества $K_{i,j}$, определяемого парой $\{\mathfrak{C}_i, \mathfrak{C}_j\}$, все множества $\mathfrak{C}_k$, $k \in K_{i,j}$, попарно не пересекаются. Более того, $\mathfrak{C}_{k_1} \cap \mathfrak{C}_{k_2} = \varnothing$ при k_1, k_2, взятых из различных $K_{i,j}$. Это следует из того, что при несовпадении K_{i_1,j_1}, K_{i_2,j_2} либо $i_1 \ne i_2$, либо $j_1 \ne j_2$. В первом случае имеем $\mathfrak{C}_{i_1} \cap \mathfrak{C}_{i_2} = \varnothing$, так как $i_1, i_2 \in I$, во втором — $\mathfrak{C}_{i_1} \cap \mathfrak{C}_{i_2} = \varnothing$, так как $j_1, j_2 \in J$.

Рассуждая точно так же, для каждого $j \in J$ находим конечное (не более чем счетное) дизъюнктивное разложение

$$\mathfrak{C}_j = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{k \in K_{j,i}} \mathfrak{C}_k.$$

Тогда на основании (16)

$$\mu(\mathfrak{C}_i) = \mu\left(\bigcup_{j \in J} \bigcup_{k \in K_{i,j}} \mathfrak{C}_k \right) = \sum_{j \in J} \sum_{k \in K_{j,i}} \mu(\mathfrak{C}_k).$$

Отсюда следует

$$\overline{\mu}_1(\mathfrak{A}) = \sum_{i \in I} \mu(\mathfrak{C}_i) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{k \in K_{j,i}} \mu(\mathfrak{C}_k).$$

Замечая, что $K_{i,j} = K_{j,i}$, находим

$$\overline{\mu}_1(\mathfrak{A}) = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} \sum_{k \in K_{i,j}} \mu(\mathfrak{C}_k) =$$

$$= \sum_{j \in J} \mu\left(\bigcup_{i \in I} \bigcup_{k \in K_{i,j}} \mathfrak{C}_k \right) = \sum_{j \in J} \mu(\mathfrak{C}_j) = \overline{\mu}_2(\mathfrak{A}).$$

Теорема 2 доказана.

4. c-Система случайных событий. Нашей дальнейшей задачей является доказательство того, что система $\mathbb{F}(\mathfrak{E}, C)$ является c-системой.

Введем на семействе $\mathbb{S}$ коммутативную бинарную операцию $*$ *взаимного измельчения.* Пусть дана пара наборов $\Delta_1 = \left\langle \delta_1^{(1)},\ldots,\delta_{n_1}^{(1)} \right\rangle$, $\Delta_2 = \left\langle \delta_1^{(2)},\ldots,\delta_{n_2}^{(2)} \right\rangle$. Набор $\Delta = \Delta_1 * \Delta_2$ строится следующим образом. Сначала образуются семейства $\left\{ \delta_i^{(1)} \cap \delta_j^{(2)};\ i=1,\ldots,n_1;\ j=1,\ldots,n_2 \right\}$, $\left\{ \delta_i^{(1)} \setminus \bigcup_{j=1}^{n_2} \delta_j^{(2)};\ i=1,\ldots,n_1 \right\}$, $\left\{ \delta_i^{(2)} \setminus \bigcup_{j=1}^{n_1} \delta_j^{(1)};\ i=1,\ldots,n_2 \right\}$. Пусть σ и σ' — два любых элемента из этих трех семейств. Тогда $\sigma \cap \sigma' = \varnothing$. В самом деле, это имеет место вследствие дизъюнктивности интервалов, входящих в наборы Δ_1, Δ_2.

Удалим из полученных семейств пустые множества и объединим все полученные таким образом семейства в одно семейство $\Sigma(\Delta_1, \Delta_2)$. При этом каждый элемент $\sigma \in \Sigma(\Delta_1, \Delta_2)$, по построению, однозначным образом представим в виде дизъюнктивного объединения связных компонент $\sigma = \left\{ \delta_1(\sigma),\ldots,\delta_{n(\sigma)}(\sigma) \right\}$, $\sigma = \bigcup_{i=1}^{n(\sigma)} \delta_i(\sigma)$. Эти компоненты естественным образом упорядочены своими левыми крайними точками и представляют собой полуоткрытые интервалы. Поэтому каждый элемент σ однозначным образом порождает упорядоченный набор $\left\langle \delta_1(\sigma),\ldots,\delta_{n(\sigma)}(\sigma) \right\rangle$, принадлежащий $\mathbb{S}$. При таком построении интервалы $\delta_i(\sigma)$ и $\delta_j(\sigma')$, порождаемые разными элементами σ и σ', не пересекаются. Поэтому множество $\left\{ \delta_i(\sigma);\ \sigma \in \Sigma(\Delta_1, \Delta_2);\ i=1,\ldots,n(\sigma) \right\}$ состоит из непересекающихся полуинтервалов, объединение которых совпадает с объединением всех интервалов, входящих в Δ_1 и Δ_2. Естественное упорядочение этого множества, по определению, представляет набор $\Delta = \Delta_1 * \Delta_2$.

Если наборы Δ и Δ' таковы, что $\Delta * \Delta' = \Delta'$, то для каждого $\delta \in \Delta$ определена функция $\max\{ \Theta'(\delta') \colon \delta' \subset \delta,\ \delta' \in \Delta' \}$, которая при наличии отношения подчиненности $\langle \Delta, \Theta \rangle \succ \langle \Delta', \Theta' \rangle$ совпадает с $\Theta(\delta)$,

$$\Theta(\delta) = \max\{ \Theta'(\delta') \colon \delta' \subset \delta,\ \delta' \in \Delta' \}. \tag{17}$$

Для обозначения такой связи мы также будем использовать знак $\succcurlyeq$ и писать $\Theta \succcurlyeq \Theta'$.

Лемма 4. *Если наборы Δ и Δ' из $\mathbb{S}$ таковы, что $\Delta * \Delta' = \Delta'$, то для любого $\Theta = C(\Delta)$ справедливо дизъюнктивное разложение*

$$\tilde{A}(\langle \Delta, \Theta \rangle) = \bigcup_{\Theta' \colon \Theta \succcurlyeq \Theta'} \tilde{A}(\langle \Delta', \Theta' \rangle). \tag{18}$$

Доказательство. Допустим, что имеется реализация $\tilde{X}$ из $\tilde{A}(\langle \Delta, \Theta \rangle)$, которая не попадает ни в одно из событий $\tilde{A}(\langle \Delta', \Theta' \rangle)$ из объединения, стоящего в правой части (18). Это означает, что для такой реализации $\tilde{X}$ набор индикаторов $\left\langle \chi\left(\delta' \middle| \tilde{X}\right) = \Theta'(\delta');\ \delta' \in \Delta' \right\rangle$ не находится в отношении $\langle \Theta(\delta);\ \delta \in \Delta \rangle \succcurlyeq$ $\succcurlyeq \left\langle \chi\left(\delta' \middle| \tilde{X}\right);\ \delta' \in \Delta' \right\rangle$. Следовательно, найдется интервал δ в наборе Δ, для которого нарушается формула (17), т. е.

$$\max\left\langle \chi\left(\delta' \middle| \tilde{X}\right) \colon \delta' \subset \delta,\ \delta' \in \Delta' \right\rangle \neq \Theta(\delta).$$

Но при $\Theta(\delta) = \chi\left(\delta \middle| \tilde{X}\right) = 0$ это невозможно, так как из $\tilde{X} \cap \delta = \varnothing$ при наличии отношения $\Delta * \Delta' = \Delta'$ для каждого интервала $\delta' \in \Delta'$ такого, что $\delta' \subset \delta$, следует $\tilde{X} \cap \delta' = \varnothing$ и поэтому $\max\{ \Theta'(\delta') \colon \delta' \subset \delta,\ \delta' \in \Delta' \} = 0$.

Если же $\Theta(\delta) = \chi\left(\delta \middle| \tilde{X}\right) = 1$, то это невозможно, так как из $\tilde{X} \cap \delta \neq \varnothing$ и в связи с тем, что при $\Delta * \Delta' = \Delta'$ каждый интервал из Δ представим в виде объединения, составленного из интервалов, принадлежащих Δ', следует, что найдется интервал $\delta' \in \Delta'$, для которого $\delta' \subset \delta$, $\tilde{X} \cap \delta' \neq \varnothing$. Полученное противоречие доказывает включение

$$\tilde{A}(\langle \Delta, \Theta \rangle) \subset \bigcup_{\Theta' :\, \Theta \succcurlyeq \Theta'} \tilde{A}(\langle \Delta', \Theta' \rangle).$$

Докажем обратное включение. Пусть $\tilde{X} \in \tilde{A}(\langle \Delta', \Theta' \rangle)$, где для функции Θ' выполняется формула (17). Зафиксируем интервал $\delta \in \Delta$. Пусть $\Theta(\delta) = 0$. Тогда на основании формулы (17) для всех интервалов $\delta' \in \Delta'$, $\delta' \subset \delta$, выполняются такие же равенства $\Theta'(\delta') = 0$. Следовательно, если множество $\tilde{X}$ принадлежит $\tilde{A}(\langle \Delta', \Theta' \rangle)$, то оно принадлежит и $\tilde{A}(\langle \delta, 0 \rangle)$. Это следует из того, что каждое δ представимо в виде объединения интервалов δ' из Δ' и формулы (3). Поскольку множество $\tilde{X}$ произвольно, то $\tilde{A}(\langle \Delta', \Theta' \rangle) \subset$ $\subset \tilde{A}(\langle \delta, 0 \rangle)$.

Пусть для интервала $\delta \in \Delta$ имеет место $\Theta(\delta) = 1$. Тогда из (17) следует, что для него найдется интервал $\delta' \in \Delta'$, который в нем содержится, $\delta' \subset \delta$, и имеет свойство $\Theta'(\delta') = 1$. Если $\tilde{X} \in \tilde{A}(\langle \Delta', \Theta' \rangle)$, то $\chi\left(\delta' \middle| \tilde{X}\right) = \Theta'(\delta') = 1$ и, следовательно, $\tilde{X} \cap \delta' \neq \varnothing$, т. е. $\tilde{X} \cap \delta \neq \varnothing$, $\tilde{X} \in \tilde{A}(\langle \delta, 1 \rangle)$. Тогда вследствие произвольности реализации $\tilde{X}$ имеем $\tilde{A}(\langle \Delta, \Theta \rangle) \subset \tilde{A}(\langle \delta, 1 \rangle)$.

Поскольку интервал δ произволен, доказанные включения имеют место для любого интервала из Δ. Беря пересечение по всем интервалам δ из Δ и применяя формулу (2), получаем включение

$$\tilde{A}(\langle \Delta, \Theta \rangle) \supset \bigcup_{\Theta' :\, \Theta \succcurlyeq \Theta'} \tilde{A}(\langle \Delta', \Theta' \rangle).$$

Лемма 4 доказана.

Теперь можно доказать утверждения о свойствах системы событий $\mathbb{F}$, гарантирующих однозначность продолжения заданного на ней распределения вероятностей на порождаемую этой системой минимальную σ-алгебру.

Теорема 3. *Для двух произвольных пар* $\langle \Delta, \Theta \rangle$, $\langle \Delta', \Theta' \rangle$, *образованных наборами* Δ, $\Delta' \in \mathbb{S}$ *и заданными на них функциями* $\Theta = C(\Delta)$, $\Theta' = C(\Delta')$, *справедливо дизъюнктивное разложение по событиям из системы* $\mathbb{F}(\mathfrak{E}, C)$

$$\tilde{A}(\langle \Delta, \Theta \rangle) \cap \tilde{A}(\langle \Delta', \Theta' \rangle) = \bigcup_{\Theta'' :\, \Theta'' \succcurlyeq \Theta,\, \Theta'' \succcurlyeq \Theta'} \tilde{A}(\langle \Delta'', \Theta'' \rangle), \tag{19}$$

где $\Delta'' = \Delta * \Delta'$.

Доказательство. Пусть $\Delta'' = \Delta * \Delta'$. Тогда $\Delta'' = \Delta * \Delta''$ и $\Delta'' = \Delta' * \Delta''$. Поэтому, воспользовавшись леммой 4, а затем леммой 1, выполним следующие преобразования:

$$\tilde{A}(\langle \Delta, \Theta \rangle) \cap \tilde{A}(\langle \Delta', \Theta' \rangle) = \left(\bigcup_{\Sigma :\, \Sigma \succcurlyeq \Theta} \tilde{A}(\langle \Delta'', \Sigma \rangle) \right) \cap \left(\bigcup_{\Sigma' :\, \Sigma' \succcurlyeq \Theta'} \tilde{A}(\langle \Delta'', \Sigma' \rangle) \right) =$$

$$= \bigcup_{\{\Sigma :\, \Sigma \succcurlyeq \Theta\}} \bigcup_{\{\Sigma' :\, \Sigma' \succcurlyeq \Theta'\}} \left[\tilde{A}(\langle \Delta'', \Sigma \rangle) \cap \tilde{A}(\langle \Delta'', \Sigma' \rangle) \right] = \bigcup_{\Upsilon :\, \Upsilon \succcurlyeq \Theta,\, \Upsilon \succcurlyeq \Theta'} \tilde{A}(\langle \Delta'', \Upsilon \rangle).$$

Согласно лемме 1, события, входящие в последнее объединение, попарно не пересекаются.

Теорема 3 доказана.

Теорема 4. *Для любой пары* $\langle \Delta, \Theta \rangle \in C$ *дополнение события* $\tilde{A}(\langle \Delta, \Theta \rangle)$ *имеет следующее дизъюнктивное разложение по цилиндрическим событиям из системы* $\mathbb{F}(\mathfrak{E}, C)$:

$$\complement \tilde{A}(\langle \Delta, \Theta \rangle) = \bigcup_{\Theta' \neq \Theta} \tilde{A}(\langle \Delta, \Theta' \rangle). \tag{20}$$

Доказательство. На основании (6) для данного набора интервалов Δ имеем

$$\complement \tilde{A}(\langle \Delta, \Theta \rangle) = \mathfrak{E} \setminus \tilde{A}(\langle \Delta, \Theta \rangle) = \left(\bigcup_{\Theta' \in C^{-1}(\Delta)} \tilde{A}(\langle \Delta, \Theta' \rangle) \right) \setminus \tilde{A}(\langle \Delta, \Theta \rangle),$$

что дает разложение (20), дизъюнктивное в силу леммы 1.

Для доказательства утверждения, которое в предлагаемой конструкции вероятностного пространства случайных множеств является аналогом известной теоремы Колмогорова, на основе которой определяется мера на пространстве случайных функций, необходимо, прежде всего, установить достаточность условий для того, чтобы функция $P(\cdot, \cdot)$ была аддитивной на c-системе $\mathbb{F}(\mathfrak{E}, C)$.

Для c-системы этот факт не столь очевиден, как это имеет место для булевского полукольца.

Теорема 5. *Если на системе* $\mathbb{F}(\mathfrak{E}, C)$ *задана положительная функция* $P(\cdot, \cdot)$, *удовлетворяющая условиям* (11) – (13), *то эта функция однозначно продолжается до распределения вероятностей на* $\mathcal{A}(\mathbb{F}(\mathfrak{E}, C))$.

Доказательство. Из теорем 3 и 4 ввиду того, что формулы (19) и (20) являются для событий системы $\mathbb{F}(\mathfrak{E}, C)$ выражением свойств а) и б) определения c-системы, следует, что $\mathbb{F}(\mathfrak{E}, C)$ является c-системой. Тогда из теоремы 2 следует, что функция $P(\cdot, \cdot)$ однозначно продолжается по аддитивности с $P(\mathfrak{E}, C)$ на минимальную алгебру $\mathcal{A}(\mathbb{F}(\mathfrak{E}, C))$. Остается доказать, что условия (11) – (13) являются достаточными для аддитивности $P(\cdot, \cdot)$ на $\mathbb{F}(\mathfrak{E}, C)$.

Как следствие леммы 3 получаем, что удовлетворение функции $P(\cdot, \cdot)$ полному набору тождеств (13) есть достаточное условие для взаимной однозначности соответствия $P(\Delta, \Theta) \leftrightarrow \tilde{A}(\langle \Delta, \Theta \rangle)$.

Достаточно установить аддитивность функции $P(\cdot, \cdot)$ на $\mathbb{F}(\mathfrak{E}, C)$. Пусть имеется произвольное дизъюнктивное разложение события $\tilde{A}(\langle \Delta, \Theta \rangle)$ по событиям из $\mathbb{F}(\mathfrak{E}, C)$:

$$\tilde{A}(\langle \Delta, \Theta \rangle) = \bigcup_{i=1}^{n} \tilde{A}(\langle \Delta_i, \Theta_i \rangle). \tag{21}$$

Докажем, что выполнимость условий (11) влечет справедливость формулы

$$P(\Delta, \Theta) = \sum_{i=1}^{n} P(\Delta_i, \Theta_i). \tag{22}$$

По разложению (21) построим набор $\Delta'' \in \mathbb{S}$, для которого выполняется $\Delta'' * \Delta = \Delta''$ и $\Delta'' * \Delta_i = \Delta''$, $i = 1, \ldots, n$. Для этого последовательно применим операцию совместного измельчения $\Delta * \Delta_1 \equiv \Delta_1'$, $\Delta_{i-1}' * \Delta_i \equiv \Delta_i'$, $i = 1, \dots, n$, $\Delta_n' \equiv \Delta''$. Указанные выше свойства набора Δ'' выполняются по построению. Посредством набора Δ'' каждому из событий $\tilde{A}(\langle \Delta_i, \Theta_i \rangle)$, $i = 1, \dots, n$, однозначно сопоставляется множество $\mathbb{T}_i = \{\Theta' : \Theta_i \succcurlyeq \Theta'\}$ функций, определенных на Δ''. Для этих функций имеет место отношение $\Theta \succcurlyeq \Theta'$. По набору Δ'' для каждой функции Θ', принадлежащей одному из множеств $\mathbb{T}_i$, $i = 1, \dots, n$, найдем событие $\tilde{A}(\langle \Delta'', \Theta' \rangle)$. Тогда каждое из событий $\tilde{A}(\langle \Delta_i, \Theta_i \rangle)$, $i = 1, \dots, n$, на основании леммы 4 представляется дизъюнктивным разложением

$$\tilde{A}(\langle \Delta_i, \Theta_i \rangle) = \bigcup_{\Theta' \in \mathbb{T}_i} \tilde{A}(\langle \Delta'', \Theta' \rangle), \tag{23}$$

причем $\mathbb{T}_i \cap \mathbb{T}_j = \varnothing$ при $i \neq j$, так как $\tilde{A}(\langle \Delta_i, \Theta_i \rangle) \cap \tilde{A}(\langle \Delta_j, \Theta_j \rangle) = \varnothing$ при $i \neq j$.

Пусть $N = \mathrm{Card}(\Delta'')$. Рассмотрим вероятностное пространство двузначных случайных функций с множеством реализаций $\Omega_N = \{\tilde{\Theta} \in \{0,1\}^N\}$ с распределением вероятностей

$$\Pr\{\tilde{\Theta} = \Theta\} = \Pr\{\tilde{A}(\langle \Delta'', \Theta \rangle)\} = P(\Delta'', \Theta),$$

т. е. $\Theta = \langle \theta_1, \dots, \theta_N \rangle$ и $\theta_i = \Theta(\delta_i)$, $\Delta'' = \langle \delta_1, \dots, \delta_N \rangle$. Таким образом, это вероятностное пространство изоморфно вероятностному пространству с алгеброй случайных событий $\mathcal{A}_{\Delta''} = \{\tilde{A}(\langle \Delta'', \Theta \rangle);\ \Theta \in \{0,1\}^N\}$ и распределением вероятностей для них $\{P(\Delta'', \Theta);\ \Theta \in \{0,1\}^N\}$.

Согласно (23), события $\tilde{A}(\langle \Delta_i, \Theta_i \rangle)$ принадлежат алгебре $\mathcal{A}_{\Delta''}$, и этим событиям при описанном изоморфизме соответствуют множества случайных функций $\{\Theta : \max\{\theta_j;\ \theta_j = \Theta(\delta_j),\ \delta_j \subset \delta\} = \Theta_i(\delta),\ \delta \in \Delta_i\}$. Поэтому достаточно доказать, что из условий (11) следует выполнимость формулы (22) на изоморфном вероятностном пространстве. Но в рассматриваемом случае пространства Ω_N случайных функций равенство (11) представляет собой условие согласованости для их s-мерных, $s = 1, 2, \dots, N$, $s = \mathrm{Card}(\Delta')$, распределений вероятностей на булевом полукольце $\{\tilde{A}(\langle \Delta', \Theta' \rangle);\ \Delta' = P(\Delta''),\ \Theta' = P_{(\Delta'', \Delta)}(\Theta),\ \tilde{A}(\langle \Delta'', \Theta \rangle) \in \mathcal{A}_{\Delta''}\}$. Как известно, набор таких s-мерных распределений вероятностей, удовлетворяющих условиям согласованности, однозначно определяет аддитивную меру (в данном случае — функцию $P(\cdot,\cdot)$) на алгебре событий, изоморфной $\mathcal{A}_{\Delta''}$. Следовательно, (22) действительно имеет место.

Теорема 5 доказана.

Понятно, что для выполнимости всех соотношений (11) достаточно убедиться в их выполнимости только в случае, когда Δ получается из Δ' вычеркиванием одной компоненты, а для выполнимости всех соотношений (13) — только в случае, когда $\langle \Delta, \Theta \rangle$, $\langle \Delta', \Theta' \rangle$ являются смежными парами.

Теперь перейдем к доказательству основного результата данной работы. Для любого компактного интервала Λ обозначим через $\mathfrak{E}_\Lambda = \{\tilde{X} : \tilde{X} \subset \Lambda\}$ пространство элементарных событий.

Теорема 6. *Положительная функция* $P_\Lambda(\cdot,\cdot)$, *заданная на* c-*системе случайных событий* $\mathbb{F}(\mathfrak{E}, C)$ *и удовлетворяющая условиям* (11) – (13), *однознач-*

но определяет посредством продолжения по σ*-аддитивности распределение вероятностей на минимальной* σ*-алгебре* $\mathcal{A}_\infty(\mathbb{F}(\mathfrak{E}, C))$.

Для доказательства теоремы достаточно установить σ-аддитивность функции $P(\cdot,\cdot)$ на системе $\mathbb{F}(\mathfrak{E}, C)$. При наличии этого свойства доказываемое утверждение следует из теорем 2 и 5.

Введем для любого семейства $\mathfrak{A} \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ подмножеств $X \subset \mathbb{R}$ множество

$$N(\mathfrak{A}) = \bigcap_{X\in\mathfrak{A}} \complement X = \complement\left(\bigcup_{X\in\mathfrak{A}} X\right).$$

В частности, при $\mathfrak{A} = \tilde{A}(\langle \Delta, \Theta\rangle)$ для любых $\Delta \in \mathbb{S}$, $\Theta \in C(\Delta)$ имеем $N\big(\tilde{A}(\langle \Delta, \Theta\rangle)\big) = N(\Delta, \Theta)$. Кроме того, $N(\mathfrak{E}) = \complement\bigcup_{X\subset\mathfrak{E}} X = \varnothing$ и $N(\varnothing) = \complement\varnothing = \mathbb{R}$.

Оператор $N(\cdot)$ имеет свойство

$$N(\mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{A}_2) = N(\mathfrak{A}_1) \cap N(\mathfrak{A}_2) \tag{24}$$

и для теоретико-множественного предела $\lim_{n\to\infty} \mathfrak{A}_n = \mathfrak{A}$ монотонной последовательности семейств $\{\mathfrak{A};\ n = 1, 2, \ldots\}$

$$\lim_{n\to\infty} N(\mathfrak{A}_n) = N(\mathfrak{A}). \tag{25}$$

Последнее следует из того, что при монотонном расширении последовательности $\{\mathfrak{A}_n\}$ монотонно расширяется последовательность $\left\{\bigcup_{X\in\mathfrak{A}_n} X;\ n = 1, 2, \ldots\right\}$, а при ее монотонном сужении монотонно сужается последовательность $\left\{\bigcap_{X\in\mathfrak{A}_n} X;\ n = 1, 2, \ldots\right\}$.

Заметим, наконец, что для любого семейства $\mathfrak{A}$ имеет место тождество

$$\mathfrak{A} = \{X\colon X \cap N(\mathfrak{A}) = \varnothing\}. \tag{26}$$

Пусть $\tilde{A}(\langle \Delta, \Theta\rangle) \in \mathbb{F}(\mathfrak{E}, C)$ и для некоторого дизъюнктивного набора событий $\left\{\tilde{A}\big(\langle \Delta_j, \Theta_j\rangle\big);\ j = 1, 2, \ldots\right\}$ выполняется

$$\tilde{A}(\langle \Delta, \Theta\rangle) = \bigcup_{j=1}^{\infty} \tilde{A}\big(\langle \Delta_j, \Theta_j\rangle\big). \tag{27}$$

Покажем, что имеет место равенство

$$P(\Delta, \Theta) = \sum_{j=1}^{\infty} P(\Delta_j, \Theta_j).$$

Для этого введем случайные события

$$\tilde{B}_n = \tilde{A}(\langle \Delta, \Theta\rangle) \setminus \bigcup_{j=1}^{n} \tilde{A}\big(\langle \Delta_j, \Theta_j\rangle\big).$$

Эти события образуют сужающуюся последовательность $\tilde{B}_{n+1} \subset \tilde{B}_n$ такую, что $\lim_{n\to\infty} \tilde{B}_n = \varnothing$. События $\tilde{B}_n$, по построению, принадлежат $\mathcal{A}(\mathbb{F}(\mathfrak{E}, C))$. Поэтому, учитывая дизъюнктивность набора событий $\left\{\tilde{A}\big(\langle \Delta_j, \Theta_j\rangle\big); j = 1, 2, \ldots\right\}$, имеем

$$P(\Delta, \Theta) = \sum_{j=1}^{\infty} P(\Delta_j, \Theta_j) + \Pr\left\{ \tilde{B}_n \right\}.$$

Таким образом, достаточно доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left\{ \tilde{B}_n \right\} = 0. \tag{28}$$

Положим $\mathfrak{A}_n = \tilde{B}_n$. Тогда из формул (24) и (25) следует

$$\lim_{n\to\infty} N\left(\tilde{B}_n\right) = N\left(\lim_{n\to\infty} \tilde{B}_n\right) = N(\varnothing) = \mathbb{R}. \tag{29}$$

Пусть $\Theta \not\equiv 0$. Тогда в дизъюнктивном наборе $\left\{ \tilde{A}\left(\left\langle \Delta_j, \Theta_j \right\rangle\right) \right\}$ все функции Θ_j также не равны тождественно нулю, так как событие $\tilde{A}\left(\left\langle \Delta_j, \Theta_j \right\rangle\right)$ с такой функцией Θ_j обязательно содержит реализацию $\tilde{X} = \varnothing$, которой нет в $\left\{ \tilde{A}(\langle \Delta, \Theta \rangle) \right\}$.

Полагая в (26) $\mathfrak{A} = \tilde{B}_n$ и учитывая, что $\tilde{B}_n$ при $\Theta_j \not\equiv 0$ не содержит реализации $\tilde{X} = \varnothing$, имеем $\tilde{B}_n = \left\{ \tilde{X} \cap N\left(\tilde{B}_n\right) = \varnothing,\ \tilde{X} \neq \varnothing \right\}$. Тогда, используя (29), для предела $\lim_{n\to\infty} \Pr\left\{ \tilde{B}_n \right\}$ получаем оценку

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left\{ \tilde{B}_n \right\} = \lim_{n\to\infty} \Pr\left\{ \tilde{X} \cap N\left(\tilde{B}_n\right) = \varnothing,\ \tilde{X} \neq \varnothing \right\} =$$

$$= \Pr\left\{ \tilde{X} \cap \lim_{n\to\infty} N\left(\tilde{B}_n\right) = \varnothing,\ \tilde{X} \neq \varnothing \right\} = \Pr\left\{ \tilde{X} \cap \mathbb{R} = \varnothing,\ \tilde{X} \neq \varnothing \right\} = 0.$$

Рассмотрим случай $\Theta \equiv 0$. В разложении (27) только одно из событий $\tilde{A}\left(\left\langle \Delta_j, \Theta_j \right\rangle\right)$ имеет функцию Θ_j, тождественно равную нулю, так как каждое такое событие содержит реализацию $\tilde{X} = \varnothing$ и разложение (27) — дизъюнктивно. Следовательно, при достаточно больших n все функции Θ_j, описывающие события $\tilde{A}\left(\left\langle \Delta_j, \Theta_j \right\rangle\right)$, которые входят в $\tilde{B}_n$, не равны тождественно нулю и поэтому справедлива приведенная выше оценка для предела вероятности событий $\tilde{B}_n$ при $n \to \infty$. Поэтому (28) имеет место при любом событии $\tilde{A}(\langle \Delta, \Theta \rangle)$.

Теорема 6 доказана.

5. Заключение. В настоящей работе мы представили общую схему построения распределения вероятностей на пространстве $\left\{ \tilde{X} : \tilde{X} \subset \mathbb{R} \right\}$ случайных множеств. Тем не менее, очень важные общие вопросы теории случайных множеств остались неосвещенными. Среди таких вопросов мы прежде всего упомянем следующие.

Необходимо показать, каким образом известные конструкции вероятностных пространств случайных множеств, встречающиеся в приложениях, в частности с целой фрактальной размерностью, вкладываются в разработанную нами схему.

Кроме того, следует заметить, что предложенная схема не описывает совершенно произвольные случайные множества в $\mathbb{R}$. На ее основе, например, невозможно ввести распределение вероятностей для случайных множеств с реализациями, с вероятностью единица всюду плотными в $\mathbb{R}$. Поэтому желательно найти необходимые и достаточные условия на распределение вероятностей, которые бы гарантировали возможность его задания посредством функции $P(\cdot, \cdot)$

на $\mathbb{F}(\mathfrak{E}, C)$. С другой стороны, схема являетея „слишком" общей. В нее укладываются конструкции случайных множеств, имеющих довольно патологические, с точки зрения приложений, свойства. Поэтому, и это самое главное, с точки зрения приложений данной схемы к конструированию стохастических фракталов нужно указать возможно наиболее слабые достаточные условия на распределение вероятностей случайных множеств, обеспечивающие переход от задания его на системе $\mathbb{F}(\mathfrak{E}, C)$ к заданию на измельчении $\mathbb{R}$ с произвольным фиксированным значением параметра дробления [10].

1. *Матерон Ж.* Случайные множества и интегральная геометрия. – М.: Мир, 1978. – 318 с.
2. *Большаков И. А., Ракошиц В. С.* Прикладная теория случайных потоков. – М.: Сов. радио, 1978. – 248 с.
3. *Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н.* Введение в теорию массового обслуживания. – М.: Наука, 1987. – 340 с.
4. *Майер Дж., Гепперт-Майер М.* Статистическая механика. – М.: Изд-во иностр. лит., 1952. – 750 с.
5. *Амбарцумян Р. В., Мекке Й., Штоян Д.* Введение в стохастическую геометрию. – М.: Наука, 1989. – 400 с.
6. *Займан Дж.* Модели беспорядка. Теоретическая физика однородно неупорядоченных систем. – М.: Мир, 1982. – 592 с.
7. *Гросберг А. Ю., Хохлов А. Р.* Статистическая физика макромолекул. – М.: Наука, 1989. – 342 с.
8. *Колмогоров А. Н.* К статистической теории кристаллизации металлов // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1937. – № 3. – С. 355–358.
9. *Беленький В. З.* Геометрико-вероятностные модели кристаллизации. – М.: Наука, 1980. – 150 с.
10. *Вирченко Ю. П., Шпилинская О. Л.* Точечные случайные поля с марковскими измельчениями и геометрия фрактально неупорядоченных сред // Теорет. и мат. физика. – 2000. – **124**, № 3. – С. 490–505.
11. *Федер Е.* Фракталы. – М.: Мир, 1991. – 260 с.
12. *Колмогоров А. Н.* Спираль Винера и некоторые другие интересные кривые в гильбертовом пространстве // Докл. АН СССР. – 1940. – **26**, № 2. – С. 115–118.
13. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов: В 2 т. – М.: Наука, 1971. – Т. 1. – 664 с.
14. *Вирченко Ю. П., Шпилинская О. Л.* Стохастические фракталы с марковскими измельчениями // Теорет. и мат. физика. – 2001. – **128**, № 2. – С. 178–192.
15. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1972. – 542 с.

Получено 16.05.2003