УДК 517.98

Л. А. Власенко, А. Л. Пивень, А. Г. Руткас (Харьков. нац. ун-т)

ПРИЗНАКИ КОРРЕКТНОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА

In Banach spaces, the differential equation $\sum_{j=0}^{n} A_j u^{(j)}(t) = 0$ with closed linear operators A_j is investigated (in general, the operator A_n of the higher derivative is degenerate). Correctness conditions are obtained that characterize the continuous dependence of solutions and their derivatives on initial data. Abstract results are applied to partial differential equations.

У банахових просторах досліджується диференціальне рівняння $\sum_{j=0}^{n} A_j u^{(j)}(t) = 0$ із замкненими лінійними операторами A_j (взагалі кажучи, оператор A_n при старшій похідній є виродженим). Одержано умови коректності, що характеризують неперервну залежність розв'язків та їх похідних від початкових даних. Абстрактні результати застосовуються до рівнянь з частинними похідними.

1. Постановка задачи и обзор. В комплексных банаховых пространствах X, Y рассматривается задача Коши

$$\sum_{j=0}^{n} A_j u^{(j)}(t) = 0, \quad t > 0, \tag{1}$$

$$u^{(j)}(0) = u_j, \quad j = 0, \ldots, n-1, \tag{2}$$

где A_j — линейные замкнутые операторы, действующие из X в Y с областями определения $D(A_j) \subset X$. Оператор A_n может быть вырожденным и в этом случае уравнение (1) называется *вырожденным* [1–4]. С точки зрения метода мы продолжаем исследования, начатые в [1–4], и получаем признаки *непрерывной зависимости решения $u(t)$ и производных $u'(t), \ldots, u^{(p-1)}(t)$ от всех начальных данных* (2) или по терминологии [5] — *признаки p-кратной корректности задачи* (1), (2). Здесь натуральное число $p\,(\leq n)$ не обязательно совпадает с порядком n уравнения (1). Такая постановка естественна для некоторых классов начально-краевых задач математической физики. Например, при описании колебаний $u(x,t)$ свободной струны абстрактная форма $u''(t) + A_0 u(t) = 0$ волнового уравнения в пространстве $L_2(\mathbf{R})$ есть уравнение (1) с $n = 2$, $A_2 = I$, $A_1 = 0$. Его решение $u(t)$ — смещение струны $u(x,t)$ — непрерывно (в L_2-норме) зависит от начального смещения $u_0 = u(x,0)$ и начальной скорости $u_1 = u_t(x,0)$, а производная $u'(t)$ — скорость смещения $u_t(x,t)$ — не зависит [6, 7]. Для любых натуральных чисел n, r, $n > r$, нетрудно привести пример такой задачи (1), (2), что ее решение $u(t)$ и производные $u'(t), \ldots, u^{(r-1)}(t)$ непрерывно зависят от начальных данных, а производная $u^{(r)}(t)$ не имеет этого свойства.

После необходимых определений в этом пункте обсуждаются связи p-кратной корректности с другими постановками корректности задачи Коши (1), (2). В пп. 2, 3 приведены также уточнения и аргументация некоторых предложений, анонсированных без доказательства в [5].

Решение (1), (2) (см. [4]) есть функция $u(t) \in C^n((0,\infty),X) \bigcap C^{n-1}([0,\infty), X)$, которая удовлетворяет уравнению (1), условиям (2) и $A_j u(t) \in C^j((0,\infty), Y) \bigcap C^{j-1}([0,\ \infty), Y)$, $j = 1,\ldots,n$. *Начальное многообразие D задачи Коши* (1), (2) (n-кратное) есть множество всех векторов $\{u_j\}_{j=0}^{n-1} \in X^n = X \times \ldots \ldots \times X$, состоящее из наборов начальных данных, для которых задача Коши (1), (2) *разрешима*. По аналогии с [8] назовем задачу (1), (2) *детерминированной*, если при $u_j = 0$, $j = 0,\ldots,n-1$, она имеет только тривиальное решение $u(t) \equiv 0$.

Определение. *Детерминированная задача Коши* (1), (2) *называется p-кратно корректной* ($p \in \{1,\ldots,n\}$), *если значения любого ее решения $u(t)$ и производных $u'(t),\ldots,u^{(p-1)}(t)$ в каждой фиксированной точке $t = t_0 > 0$ непрерывно зависят от всех начальных данных* $\{u_k\}_{k=0}^{n-1}$ (2).

Исходя из гладкости решений и теоремы Лагранжа о конечных приращениях легко получить, что непрерывная зависимость одной лишь производной $u^{(p-1)}(t)$ от начальных данных (2) влечет непрерывную зависимость решения $u(t)$ и его производных $u'(t),\ldots,u^{(p-2)}(t)$ от всех начальных данных (2).

Следовательно, задача Коши (1), (2) *p-кратно корректна* ($p \in \{1,\ldots,n\}$), если и только если для любого ее решения $u(t)$ выполнена оценка

$$\|u^{(p-1)}(t)\| \leq K(t) \sum_{j=0}^{n-1} \|u_j\|, \quad t \geq 0, \tag{3}$$

с некоторой неотрицательной функцией $K(t) : [0,\infty) \to [0,\infty)$.

Задачу (1), (2) назовем *p-кратно равномерно корректной*, если выполнено (3) *с локально ограниченной функцией* $K(t)$ на $[0,\infty)$, и соответственно *p-кратно экспоненциально корректной*, если $K(t) = Ce^{\omega t}$ ($C \geq 0, \omega \geq 0$). Из формулы Ньютона – Лейбница следует, что оценка (3) с указанной функцией $K(t)$ гарантирует аналогичную оценку для решения $u(t)$ и его производных до порядка $p-2$ включительно.

При $p = n$ одновременно с термином *n-кратная корректность* говорим *полнократная корректность.* Если задача корректна при некотором натуральном $p < n$, но некорректна при $p = n$, будем называть ее *частично корректной.*

Понятие p-кратной корректности задачи Коши (1), (2), в том числе равномерной и экспоненциальной, *не предполагает плотности начального многоообразия D* в пространстве X^n или *плотности начальных данных u_j в X.* Часто требование плотности начальных данных включается в корректную постановку задачи Коши [6, 7, 9 – 11]. Отказ от плотности также встречается (см. [8]), причем в последнее время — для уравнений с неплотно определенными операторами A_j при изучении интегрированных полугрупп [12]. Однако в данной ситуации, когда *оператор A_n может иметь нетривиальный аннулятор, требование плотности начальных данных u_j в X хотя бы для одного j в принципе неестественно* даже в случае ограниченных всюду определенных операторов A_j [1 – 4]. Это ясно уже для уравнения первого порядка

$$A_1 u'(t) + A_0 u(t) = 0, \qquad t > 0; \quad u(0) = u_0. \tag{4}$$

Если $X = Y = \mathbf{C}^m$, то за счет вырождения матрицы A_1 начальное многообразие $D = \{u_0\}$ может иметь любую размерность от 0 до m.

По существу для уравнений порядка $n \geq 2$ *однократная корректность* обсуждалась в [7], в частности однократная равномерная и экспоненциальная — в [6, 7, 9–11], *полнократная корректность* — в [7], в частности полнократная равномерная — в [6, 7, 10].

В [13] введено понятие *корректности класса m задачи Коши–Дюамелля* для невырожденного уравнения (1) с $A_n = I$ и специальной системой начальных данных, где $u_0 = u_1 = \ldots = u_{n-2} = 0$, а u_{n-1} пробегает плотное в X множество. На самом деле из корректности класса $m(< n)$ в смысле [13] вытекает p-кратная экспоненциальная корректность задачи Коши–Дюамелля при $p = n - m$.

***Замечание* 1.** Предположим, операторы $A_1, \ldots, A_n : X \to Y$ ограничены и $\widehat{A}\dfrac{d\widehat{u}}{dt} + \widehat{B}\widehat{u}(t) = 0$ — уравнение, полученное из (1) обычным понижением порядка, $\widehat{u}(t_0) \in X^n$. Тогда p-кратная экспоненциальная корректность задачи (1), (2) эквивалентна тому, что нормы $(n-p)$-кратных интегралов от решений уравнения $\widehat{A}\dfrac{d\widehat{u}}{dt} + \widehat{B}\widehat{u}(t) = 0$ оцениваются сверху через $Ce^{\omega t}(\|u_0\| + \ldots + \|u_{n-1}\|)$ на полуоси $t \geq 0$. В терминологии [12] указанное уравнение первого порядка порождает $(n-p)$ *раз интегрированную экспоненциально ограниченную полугруппу*, которая определена на *подпространстве решений* этого уравнения [1, 2].

2. Предварительные результаты. В [7] приведен пример частично равномерно корректной задачи Коши для уравнения второго порядка, которая не является экспоненциально корректной даже частично. Аналогично строятся примеры уравнений любого высокого порядка n, в которых из p-кратной равномерной корректности не следует p-кратная экспоненциальная корректность, если $p < n$. Однако при $p = n$ справедливо следующее утверждение.

Утверждение. *Для того чтобы задача Коши* (1), (2) *была полнократно экспоненциально корректной, необходимо и достаточно, чтобы она была полнократно равномерно корректной.*

Доказательство. В силу полнократной корректности задачи (1), (2) на линеале D определен эволюционный оператор $U(t)$: $\widehat{u} = \{u_j\}_{j=0}^{n-1} \to \{u^{(j)}(t)\}_{j=0}^{n-1}$, $t \geq 0$, который при каждом t продолжается по непрерывности до ограниченного оператора $\overline{U}(t)$ на замыкание $\overline{D}$ по норме пространства X^n. Из полнократной равномерной корректности следует, что семейство $\overline{U}(t)$ образует C_0-полугруппу ограниченных в $\overline{D}$ операторов. Согласно [1, 8, 9] получаем, что для некоторых постоянных $C, \omega \geq 0$ справедлива оценка $\|\overline{U}(t)\| \leq Ce^{\omega t}$.

Утверждение доказано.

С уравнением (1) связывается характеристический многочлен — операторный пучок $L(\lambda)$ и его резольвента $R(\lambda)$:

$$L(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} \lambda^j A_j, \quad R(\lambda) = L^{-1}(\lambda). \tag{5}$$

Оператор $L(\lambda)$ определен на $D_L = \bigcap\limits_{j=0}^{n} D(A_j) \subset X$ при всех $\lambda \in \mathbf{C}$, а резольвента $R(\lambda)$ голоморфна как оператор-функция со значениями из $[Y, X]$ на множестве ϱ *регулярных точек пучка* $L(\lambda)$, в которых существует ограниченный обратный оператор $L^{-1}(\lambda)$ [4]. Через $[Y, X]$ обозначается пространство линейных ограниченных операторов, отображающих Y в X.

В комплексной плоскости рассмотрим угол

$$G = G(a,\theta) = \Big\{\lambda = a + re^{i\varphi}, \quad |\varphi| \le \pi - \theta, \quad r \ge 0\Big\}, \qquad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \tag{6}$$

ограниченный парой лучей. Граничный контур Γ ориентирован так, что при его обходе область G остается слева. Через Ψ обозначается подкласс всех решений $u(t)$ уравнения (1) *повышенной гладкости*: $u(t) \in C^{n-1}([0,\infty), X)$, $A_j u(t) \in C^{n-1}([0,\infty), Y)$, $j = 0, \ldots, n-1$. Отметим, что при $n = 1, A_1 = I$ решения, не входящие в класс Ψ, называются в монографии [9] *ослабленными*.

В дальнейшем без оговорок используется следующее замечание.

***Замечание* 2.** Корректность любого вида в классе всех решений (т. е. надлежащая непрерывная зависимость от начальных данных) эквивалентна соответствующей корректности в подклассе решений Ψ повышенной гладкости. Каждая оценка типа (3) для решений класса Ψ при $t \ge t_0$ обеспечивает такую же оценку в классе всех решений при тех же значениях t.

Действительно, на каждом компакте $[0, T]$ любое решение $u(t)$ уравнения (1) аппроксимируется решениями из Ψ в норме пространства $C^{n-1}([0,T], X)$ [4]. Поэтому из корректности в подклассе решений Ψ вытекает корректность в классе всех решений.

Лемма 1. *Пусть угол $G(a,\theta)$ состоит из регулярных точек пучка $L(\lambda)$ и при некоторых $C > 0, \sigma \ge 0$ справедливы оценки*

$$\|R(\lambda)A_j x\| \le Ce^{\sigma|\lambda|}\|x\|, \qquad \lambda \in G, \quad x \in D_L, \quad j = 0, \ldots, n-1. \tag{7}$$

Если $u(t)$ — решение задачи Коши (1), (2), *то при $t > \dfrac{\sigma}{\cos\theta}$ оно является бесконечно дифференцируемым и вместе с производными допускает интегральное представление через начальные данные:*

$$u^{(m)}(t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} e^{\lambda t} R(\lambda) \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=k+1}^{n} \lambda^{m+j-1-k} A_j u_k \, d\lambda, \tag{8}$$

$$t > \frac{\sigma}{\cos\theta}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

Доказательство. Согласно [4] решение $u(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{gathered}\int\limits_t^\tau u(s)e^{-\lambda s}ds = e^{-\lambda t}\varepsilon(\lambda,t) - e^{-\lambda\tau}\varepsilon(\lambda,\tau), \\ \varepsilon(\lambda,t) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{j-1} \lambda^{j-k-1} R(\lambda) A_j u^{(k)}(t)\end{gathered} \tag{9}$$

при $0 \le t \le \tau$, $\lambda \in \varrho$. Функция $\varepsilon(\lambda, t)$ голоморфна по λ и вследствие (7) имеет место оценка

$$\|\varepsilon(\lambda, \tau)\| \le Ce^{\sigma|\lambda|} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{j-1} |\lambda|^{j-k-1} \left\|u^{(k)}(\tau)\right\|, \qquad \lambda \in G(a, \theta), \quad \tau \ge 0, \tag{10}$$

справедливая в классе решений Ψ, а значит и для всех решений (см. доказательство замечания 2).

Используя схему доказательства теоремы 2 из [4], с помощью принципа Фрагмена–Линделефа и соотношений (9), (10) получаем, что при каждом $\tau > \dfrac{\sigma}{\cos\theta}$ вектор-функция $\varepsilon(\lambda, \tau)$ стремится к нулю при $|\lambda| \to \infty$ равномерно относительно $\arg(\lambda - a)$ в угле $G(a, \theta)$. По лемме Жордана

$$\int\limits_{\operatorname{Re}\lambda = a} e^{\lambda(t-\tau)} \varepsilon(\lambda, \tau) d\lambda = 0, \qquad \tau > \frac{\sigma}{\cos\theta}, \quad 0 \le t < \tau, \tag{11}$$

где интеграл понимается в смысле главного значения. Из (9), (11) и формулы обращения преобразования Лапласа срезки функции $u(t)$ имеем

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\operatorname{Re}\lambda = a} \left(e^{\lambda t} \varepsilon(\lambda, 0) - e^{\lambda(t-\tau)} \varepsilon(\lambda, \tau) \right) d\lambda, \quad \tau > \frac{\sigma}{\cos\theta}, \; 0 < t < \tau, \tag{12}$$

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\operatorname{Re}\lambda = a} e^{\lambda t} \varepsilon(\lambda, 0) d\lambda, \quad t > 0. \tag{13}$$

Интеграл $\int_0^t u(s) e^{-\lambda s} ds$ и вместе с ним функция $e^{\lambda\tau}\varepsilon(\lambda, 0)$ $\left(\tau > \dfrac{\sigma}{\cos\theta}\right)$ стремятся к нулю при $\operatorname{Im}\lambda \to \infty$ на прямой $\operatorname{Re}\lambda = a$ (достаточно (9) умножить на $e^{\lambda\tau}$ и положить $t = 0$). Применим в углах $\Lambda^{\pm} = \Big\{\lambda = a + re^{i\varphi},\, r \ge 0,\, \theta - \pi \le \pm\varphi \le \le -\dfrac{\pi}{2}\Big\}$ принцип Фрагмена–Линделефа к вектор-функции $e^{\lambda t}\varepsilon(\lambda, 0)$ при $t > \dfrac{\sigma}{\cos\theta}$. Получим $\lim\limits_{b \to \pm\infty} \max\limits_{\lambda \in \gamma_b} \|e^{\lambda t}\varepsilon(\lambda, 0)\| = 0$, где $\gamma_b = \{\lambda \in G : \operatorname{Re}\lambda \le a, \operatorname{Im}\lambda = b\}$. Теперь из оценки

$$\left\| \int\limits_{\gamma_b} e^{\lambda t} \varepsilon(\lambda, 0) d\lambda \right\| \le \max_{\lambda \in \gamma_b} \|e^{\lambda s}\varepsilon(\lambda, 0)\| \int\limits_{-\infty}^{a} e^{(t-s)x} dx, \qquad b \in \mathbf{R}, \quad \frac{\sigma}{\cos\theta} < s < t,$$

следует, что при каждом $t > \dfrac{\sigma}{\cos\theta}$ интегралы $\dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int\limits_{\gamma_b} e^{\lambda t}\varepsilon(\lambda, 0) d\lambda$ стремятся к нулю при $b \to \pm\infty$. В области, ограниченной прямыми $\operatorname{Im}\lambda = \pm b$, $\operatorname{Re}\lambda = a$ и контуром Γ, применим теорему Коши к вектор-функции $e^{\lambda t}\varepsilon(\lambda, 0)$ $\left(t > \dfrac{\sigma}{\cos\theta}\right)$ и перейдем к пределу при $b \to +\infty$. С учетом (13) для $u(t)$ получим представление (8) при $m = 0$ и после дифференцирования — для любых натуральных m.

Лемма 1 доказана.

3. Оценки решений и признаки корректности. В настоящем пункте с помощью представления (8) мы получим оценки роста решений и их производных относительно начальных данных, а из оценок выведем признаки корректности.

Теорема 1. *Пусть в угле* $G(a,\theta)$ (6) *резольвента* $R(\lambda)$ (5) *характеристического пучка* $L(\lambda)$ *определена и удовлетворяет оценкам* (7). *Тогда существует постоянная* $C_0 > 0$, *не зависящая от начальных данных, такая, что решение* $u(t)$ *задачи* (1), (2) *и его производные имеют следующие оценки роста относительно начальных данных* u_j:

$$\|u^{(m)}(t)\| \leq C_0 e^{at}\left(1 + \frac{1}{(t\cos\theta - \sigma)^{m+n}}\right)\sum_{j=0}^{n-1}\|u_j\|, \tag{14}$$

$$t > \frac{\sigma}{\cos\theta}, \quad m = 0,\ldots,n-1.$$

Доказательство. С учетом оценок (7) и представления (8) для решения $u(t) \in$ $\in \Psi$ находим

$$\|u^{(m)}(t)\| \leq \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma} e^{t\,\mathrm{Re}\lambda}\left\|\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=k+1}^{n}\lambda^{m+j-1-k}R(\lambda)A_j u_k\right\||d\lambda| \leq$$

$$\leq \frac{Ce^{a(\sigma+t)}}{\pi}\int\limits_0^\infty e^{-(t\cos\theta-\sigma)r}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=k+1}^{n}(a+r)^{m+j-k-1}\|u_k\|dr.$$

Учитывая равенства $\int_0^\infty r^s e^{-(t\cos\theta-\sigma)r}dr = \dfrac{s!}{(t\cos\theta-\sigma)^{s+1}}$, $s = 0,1,\ldots,m+j-$ $-1-k$, $0 \leq k < j \leq n$, получаем неравенства (14).

Теорема 2. *Предположим, что для любого* $\varepsilon > 0$ *в угле* $G(a,\theta)$ (6) *справедливы следующие оценки для резольвенты* $R(\lambda)$ (5):

$$\|R(\lambda)A_j x\| \leq M(\varepsilon)e^{\varepsilon|\lambda|}\|x\|, \qquad x \in D_L, \quad j = 0,\ldots,n-1. \tag{15}$$

Тогда задача Коши (1), (2) *полнократно корректна.*

Доказательство. Для произвольного $t > 0$ выберем $t_0 = t/2$ и положим $\sigma = \varepsilon = t_0\cos\theta$. Согласно теореме 1 с помощью (14) при $m = n-1$ получаем оценку вида (3) в точке t для $p = n$.

Теорема доказана.

Если существует $A_n^{-1} \in [Y,X]$, операторы $A_n^{-1}A_j$, $j = 0,1,\ldots,n-1$, определены и ограничены на D_L, причем $\overline{D_L} = X$ или хотя бы $\overline{D_L} \supset D(A_n)$, то задача Коши (1), (2) полнократно равномерно корректна, а резольвента $R(\lambda)$ продолжается до оператор-функции, голоморфной в окрестности бесконечно удаленной точки. Однако голоморфность резольвенты $R(\lambda)$ при $|\lambda| \geq K$ не обеспечивает равномерной корректности задачи (1), (2) (см., например, теорему 9.6 в [8] для уравнения $u' = Au$). Дополнительным ограничением, обеспечивающим равномерную корректность, является требование нулевой степени роста функций $R(\lambda)A_j|_{D_L}$. Именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Предположим, что резольвента $R(\lambda)$ определена и удовлетворяет оценкам (15) на множестве $|\lambda| \geq K$ при каждом $\varepsilon > 0$. Тогда задача Коши (1), (2) полнократно экспоненциально корректна.*

Доказательство. Пусть решение $u(t) \in \Psi$. Применяя в угле $G = G\left(K\sqrt{2}, \dfrac{\pi}{4}\right)$ лемму 1, получаем представление производных решения (8), которое справедливо при всех $t > 0$. Обозначим через γ_r дугу окружности $|\lambda| = r$, $r > K$, лежащую вне угла G. Из оценок (15) следует

$$\lim_{r\to\infty} \int\limits_{\gamma_r} e^{\lambda t} R(\lambda) \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=k+1}^{n} \lambda^{m+j-1-k} A_j u_k d\lambda = 0, \quad t > 0, \;\; m = 0, 1, 2, \ldots .$$

Поэтому соотношение (8) на основании теоремы Коши принимает вид

$$u^{(m)}(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\lambda|=K} e^{\lambda t} R(\lambda) \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=k+1}^{n} \lambda^{m+j-1-k} A_j u_k d\lambda, \quad t > 0, \;\; m = 0, 1, 2, \ldots .$$

Оценивая последний интеграл по норме пространства X с учетом (15), получаем, что при некоторых постоянных $C > 0$, $\omega \leq K$ справедлива оценка

$$\|u^{(m)}(t)\| \leq C e^{\omega t} \sum_{k=0}^{n-1} \|u_k\|, \qquad t > 0, \quad m = 0, \ldots, n-1.$$

Теорема 3 доказана.

***Замечание* 3.** В условиях теоремы 3 любое решение задачи Коши (1), (2) допускает продолжение до целой X-значной функции $u(t)$. Более того, имеет место непрерывная зависимость $u(t)$ от начальных данных $\{u_j\}_{j=0}^{n-1}$, равномерная на каждом компакте в $\mathbf{C}$. В случае задачи Коши для уравнения $u^{(n)}(t) = Tu(t)$ целые решения и их непрерывная зависимость от начальных данных в более сильной топологии исследовались в [14].

В [15, 16] рассматривалось явное уравнение (1), где $A_n = I$, $X = Y$, при условиях

$$\|A_j R(\lambda)\| \leq \frac{C}{|\lambda|^j}, \qquad \lambda \in G(a, \theta), \quad j = 0, \ldots, n-1, \quad a > 0. \tag{16}$$

В случае $n > 1$ эти оценки не гарантируют корректность соответствующей задачи Коши.

***Пример* 1.** В пространстве $X = L_2((1, \infty), \mathbf{C}^2)$ рассмотрим задачу Коши

$$u'' + A_1 u'(t) + A_0 u(t) = 0; \qquad u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1 \tag{17}$$

для явного уравнения второго порядка, где коэффициенты A_1, A_0 являются операторами умножения на матрицы-функции $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -x & 0 \end{pmatrix}$ соответственно с областью определения

$$D(A_0) = D(A_1) = \left\{ y(x) = \{y_1(x), y_2(x)\}^{tr} \in X : x y_1(x) \in L_2(1, \infty) \right\}.$$

Резольвента $R(\lambda)$ и операторы $A_j R(\lambda)$ порождаются умножением на следующие матрицы-функции:

$$R(\lambda) \sim \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\lambda(\lambda+x)} & 0 \\ \dfrac{x}{(\lambda^2+\lambda)\lambda(\lambda+x)} & \dfrac{1}{\lambda^2+\lambda} \end{pmatrix}, \quad \lambda \notin (-\infty,-1] \cup \{0\},$$

$$A_1 R(\lambda) \sim \begin{pmatrix} \dfrac{x}{\lambda(\lambda+x)} & 0 \\ \dfrac{x}{(\lambda^2+\lambda)\lambda(\lambda+x)} & \dfrac{1}{\lambda^2+\lambda} \end{pmatrix}, \quad A_0 R(\lambda) \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\dfrac{x}{\lambda(\lambda+x)} & 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что оценки (16) при $j = 0, 1$ выполнены, например, в угле $G\left(1, \dfrac{\pi}{3}\right)$. *Однако рассматриваемая задача Коши не является даже однократно корректной.* Действительно, положим $u_1 = \{0, 0\}^{tr}$, $u_0 = \{f(x), 0\}^{tr}$, где $f(x)$ — произвольная функция из $L_2(1,\infty)$ такая, что $xf(x) \in L_2(1,\infty)$. Тогда задача (17) имеет единственное решение $u(t) = \{v_1(t), v_2(t)\}^{tr}$, где $v_1(t) = f$, $v_2(t) = (t + e^{-t} - 1)xf$. Компонента $v_2(t)$ решения $u(t)$ не имеет свойства непрерывной зависимости от элемента $f \in L_2(1,\infty)$.

Заметим, что в общем случае оценки (16) не эквивалентны оценкам

$$\|R(\lambda)A_j x\| \le \frac{C}{|\lambda|^j}\|x\|, \qquad \lambda \in G(a,\theta), \quad x \in D_L, \quad j = 0,\ldots,n-1, \quad a > 0. \tag{18}$$

Из теоремы 4, приведенной ниже, следует, что оценки (18) обеспечивают однократную экспоненциальную корректность ($p = 1$) и полнократную корректность задачи (1), (2). Однако при $n > 1$ двукратную равномерную корректность (и тем более экспоненциальную) оценки (18) уже не гарантируют, что иллюстрируется следующим примером.

Пример 2. Пусть в уравнении (17) оператор A_1 порождается умножением на функцию $2x$, оператор A_0 — умножением на функцию x^2 в пространстве $L_2(1,\infty)$ с естественными максимальными областями определения $D(A_0) \subset D(A_1)$, плотными в $L_2(1,\infty)$. Тогда для уравнения (17) с указанными операторами A_1, A_0 имеем

$$R(\lambda) \sim (\lambda+x)^{-2}, \qquad \overline{R(\lambda)A_0} \sim x^2(\lambda+x)^{-2},$$

$$\overline{R(\lambda)A_1} \sim 2x(\lambda+x)^{-2}, \quad \lambda \notin (-\infty,-1].$$

Оценки (18) при $n = 2$ выполняются, например, в угле $G\left(1, \dfrac{\pi}{3}\right)$. Для любых начальных данных u_0, $u_1 \in D(A_0)$ единственное решение $u(t)$ задачи Коши (17) и его производная $u'(t)$ имеют вид

$$u(t) = e^{-tx}(tx+1)u_0 + te^{-tx}u_1, \qquad u'(t) = -e^{-tx}tx^2u_0 + (e^{-tx} - txe^{-tx})u_1.$$

В каждой фиксированной точке $t > 0$ значения вектор-функций $u(t)$, $u'(t)$ непрерывно зависят от u_0, u_1 в L_2-норме, так что задача Коши (17) является полнократно корректной. Функция $u(t)$ имеет верхнюю оценку $(1+e^{-1})\left(\|u_0\|+\|u_1\|\right)$ на полуоси $t \geq 0$. Однако для производной $u'(t)$ не существует оценки вида (3) при $n = p = 2$ с локально ограниченной функцией $K(t)$ на $[0,\infty)$. Действительно, $\sup\limits_{x\geq 1} tx^2e^{-tx} = 4t^{-1}e^{-2}$ при $0 < t < 2$ достигается в точке $x_t = \dfrac{2}{t}$, поэтому семейство Q_t операторов умножения на функции $q_t(x) = tx^2e^{-tx}$ в пространстве $L_2(1,\infty)$ не является равномерно ограниченным на любом компакте $[0,T]$, $T > 0$. Следовательно, однократно экспоненциально корректная задача Коши (17) с рассматриваемыми операторами A_0, A_1 не является двукратно равномерно корректной.

Усиливая в (18) степенные ограничения на $R(\lambda)A_j$, получаем следующий *признак кратной экспоненциальной корректности и полнократной корректности задачи* (1), (2).

Теорема 4. *Пусть угол $G(a,\theta)$, где $a > 0$, состоит из регулярных точек пучка $L(\lambda)$ (5) и при некоторых $C > 0$, $p \in \{1,\ldots,n\}$ в этом угле выполнены оценки*

$$\|R(\lambda)A_jx\| \leq \frac{C}{|\lambda|^{p-1}}\|x\|, \qquad x \in D_L, \quad j = 0,\ldots,n-1. \tag{19}$$

Тогда задача Коши (1), (2) *является p-кратно экспоненциально корректной и полнократно корректной.*

Доказательство. Записывая тождество $R(\lambda)L(\lambda)x = x$, $x \in D_L$, в виде

$$R(\lambda)A_nx = \frac{x}{\lambda^n} - \sum_{j=0}^{n-1}\lambda^{j-n}R(\lambda)A_jx, \qquad \lambda \in G, \quad x \in D_L,$$

при некотором $M > 0$ в угле G получаем оценку

$$\|R(\lambda)A_nx\| \leq \frac{M}{|\lambda|^p}\|x\|, \quad x \in D_L. \tag{20}$$

Поэтому условия теорем 1, 2 выполнены для любых σ, $\varepsilon > 0$. Из теоремы 2 следует полнократная корректность задачи Коши. В силу теоремы 1 существует такая постоянная $K > 0$, что при $t \geq 1$ решение $u(t)$ задачи Коши (1), (2) и его производные связаны с начальными данными неравенствами

$$\|u^{(m)}(t)\| \leq Ke^{at}\sum_{k=0}^{n-1}\|u_k\|, \qquad t \geq 1, \quad m = 0,\ldots,n-1. \tag{21}$$

Рассмотрим сначала случай $n > 1$. Для векторов $u_j \in D_L$, $j = 0,\ldots,n-1$, легко проверяется равенство

$$\sum_{k=0}^{n-2}R(\lambda)\sum_{j=k+1}^{n}\lambda^{j-k-1}A_ju_k = \sum_{k=0}^{n-2}\left(\frac{u_k}{\lambda^{k+1}} - R(\lambda)\sum_{j=0}^{k}\lambda^{j-k-1}A_ju_k\right), \quad \lambda \in G.$$

С помощью этого равенства, теоремы Коши и леммы Жордана представления (8) решения $u(t) \in \Psi$ и его производных до порядка $n-1$ преобразуются к виду

$$u^{(m)}(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} e^{\lambda t}\sum_{k=0}^{n-2} R(\lambda)\sum_{j=0}^{k}\lambda^{m+j-k-1}A_j u_k d\lambda + \sum_{k=m}^{n-2}\frac{t^{k-m}u_k}{(k-m)!} -$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\lambda^m e^{\lambda t}R(\lambda)A_n u_{n-1}d\lambda, \qquad 0 < t \le 1, \quad m = 0,\ldots,n-1. \tag{22}$$

При $m = n-1$ вторая сумма в правой части (22) равна нулю. Для оценки интегральных слагаемых можно воспользоваться стандартным аналитическим приемом из теории параболических полугрупп. Поскольку векторные X-значные функции $\sum\limits_{k=0}^{n-2} R(\lambda)\sum\limits_{j=0}^{k}\lambda^{j-k-1}A_j u_k$ и $R(\lambda)A_n u_{n-1}$ голоморфны и ограничены в угле G, для каждого фиксированного $t \in (0,1)$ в представлении (22) интегрирование по границе $\Gamma = \partial G$ угла G с вершиной $(a,0)$ можно заменить интегрированием по лучам $\Gamma(t)$, полученным параллельным переносом лучей Γ так, чтобы вершина перешла в точку $(at^{-1},0)$ (ср. с [10], гл. 1, п. 5). Последующая замена переменной $z = \lambda t$ приводит к таким представлениям $u^{(m)}(t)$ через интегралы по исходным лучам Γ:

$$u^{(m)}(t) = \sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} t^{-1}e^{z}R(z/t)\sum_{j=0}^{k}(z/t)^{j-k-1+m}A_j u_k dz + \sum_{k=m}^{n-2}\frac{t^{k-m}u_k}{(k-m)!} -$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} t^{-1}e^{z}(z/t)^m R(z/t)A_n u_{n-1}dz, \qquad 0 < t < 1, \quad m = 0,\ldots,n-1. \tag{23}$$

При всех $m = 0,\ldots,n-1$ и $0 < t < 1$ оценим $\|u^{(m)}(t)\|$ с помощью (19), (20), (23):

$$\|u^{(m)}(t)\| \le C\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}\frac{e^{\mathrm{Re}z}}{|z|}\sum_{j=0}^{k}\left(\frac{t}{|z|}\right)^{p-j+k-m-1}|dz|\sum_{j=0}^{n-2}\|u_j\| +$$

$$+\sum_{k=m}^{n-2}\frac{t^{k-m}}{(k-m)!}\|u_k\| + M\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}\frac{t^{p-m-1}}{|z|^{p-m}}e^{Rez}\|u_{n-1}\||dz|.$$

Следовательно, для всех $m < p$ существует положительная постоянная C_0 такая, что

$$\|u^{(m)}(t)\| \le C_0\sum_{k=0}^{n-1}\|u_k\|, \qquad 0 \le t \le 1, \quad m = 0,\ldots,p-1. \tag{24}$$

Из этой оценки и неравенств (21) следует p-кратная экспоненциальная корректность задачи Коши (1), (2).

При $n = p = 1$ соотношение (23), выводимое из (8), принимает вид

$$u(t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} t^{-1}e^{z}R(z/t)A_n u_{n-1}dz, \quad 0 < t < 1.$$

Отсюда получаем оценку (24) при $p = 1$, $m = 0$ и равномерную корректность соответствующей задачи.

Теорема 4 доказана.

***Замечание* 4.** Выше отмечалась неэквивалентность условий (18) и (16), симметричных друг другу. Аналогично, симметричные относительно (19) условия

$$\|A_j R(\lambda)\| \leq \frac{C}{|\lambda|^{p-1}}, \qquad \lambda \in G, \quad j = 0, \ldots, n-1, \tag{25}$$

в которых операторы A_j являются левыми множителями для резольвенты $R(\lambda)$, не могут гарантировать свойств корректности задачи Коши (1), (2), указанных в теореме 4. Действительно, в примере 1 оценки (25) выполнены, однако задача некорректна в любом смысле.

Одним из методов исследования явных уравнений высокого порядка ($A_n = I$) является выделение лидирующего оператора A_{n-1} и подчинение ему остальных операторов A_j, как, например, это сделано в [11] для получения теорем существования и единственности. Естественно ожидать, что для неявного уравнения (1) лидирующими могут быть два оператора A_n и A_{n-1}, а их совместные свойства эффективно формулировать в терминах следующего линейного пучка операторов $P(\lambda)$ и его резольвенты $S(\lambda)$:

$$P(\lambda) = \lambda A_n + A_{n-1}, \qquad S(\lambda) = P^{-1}(\lambda). \tag{26}$$

Разрешимость задачи (1), (2) при $n = 2$ исследовалась в [17] при степенных ограничениях на резольвенту $S(\lambda)$ в угле $G(a, \theta)$. Для неявного уравнения (1) произвольного порядка n мы приводим достаточные условия кратной корректности с ограничениями на резольвенту $S(\lambda)$ лидирующего пучка $P(\lambda)$ (26). Предположим, $n > 1$, D_L плотно в X, а резольвента $S(\lambda)$ (26) лидирующего пучка определена в некотором угле $G(a, \theta)$, $a > 0$, и удовлетворяет там степенным оценкам

$$\| \overline{S(\lambda) A_j} \| \leq C|\lambda|^{n-p}, \quad j = 0, \ldots, n-1. \tag{27}$$

Пусть в меньшем, вообще говоря, угле $G_0 = G(a_0, \theta_0) \subset G(a, \theta)$ существует и равномерно ограничена оператор-функция

$$\gamma(\lambda) = \left(I + \sum_{j=0}^{n-2} \lambda^{j-n+1} \overline{S(\lambda) A_j} \right)^{-1}, \qquad \|\gamma(\lambda)\| \leq C, \quad \lambda \in G_0. \tag{28}$$

Рассмотрим пучок $\widehat{L}(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} \lambda^j B_j$ ограниченных в X операторов $B_j = \overline{S(\lambda_0) A_j}$, $\lambda_0 \in G$. Тогда угол G состоит из регулярных точек лидирующего пучка $\widehat{P}(\lambda) = \lambda B_n + B_{n-1}$ и справедливы тождества

$$\widehat{P}^{-1}(\lambda) B_k = \overline{S(\lambda) A_k}, \qquad \gamma(\lambda) = \left(I + \sum_{j=0}^{n-2} \lambda^{j-n+1} \widehat{P}^{-1}(\lambda) B_j \right)^{-1},$$

$$\lambda \in G_0, \quad k = 0, \ldots, n.$$

Поскольку пучки $\widehat{P}(\lambda)$ и $\widehat{L}(\lambda)$ связаны соотношениями

$$\widehat{L}(\lambda) = \lambda^{n-1}\widehat{P}(\lambda)\left(I + \sum_{j=0}^{n-2}\lambda^{j-n+1}\widehat{P}^{-1}(\lambda)B_j\right), \quad \lambda \in G,$$

в угле G_0 резольвента $\widehat{L}^{-1}(\lambda)$ существует и удовлетворяет оценке (19). Согласно теореме 4 задача Коши

$$\sum_{j=0}^{n} B_j u^{(j)}(t) = 0,\ t > 0, \qquad u^{(j)}(0) = u_j, \quad j = 0, \dots, n-1, \tag{29}$$

является p-кратно экспоненциально корректной и полнократно корректной. Задача (1), (2) также p-кратно экспоненциально корректна и полнократно корректна, поскольку каждое ее решение является одновременно решением задачи (29).

***Замечание* 5.** Для существования и равномерной ограниченности функции $\gamma(\lambda)$ (28) достаточно, чтобы нелидирующие операторы A_j были подчинены резольвенте $S(\lambda)$ пучка лидирующих операторов A_n, A_{n-1} следующим образом:

$$\|\,\overline{S(\lambda)A_j}\,\| \le C|\lambda|^{q_j}, \qquad \lambda \in G, \quad j = 0, \dots, n-2, \tag{30}$$

с некоторыми постоянными $q_j < n - j - 1$.

Из замечания 5 и предшествующих рассуждений вытекает такое следствие.

***Следствие* 1.** *Пусть $n > 1$, линеал D_L плотен в X, число p принадлежит множеству $\{1, \dots, n\}$ и в некотором угле $G(a, \theta)$, $a > 0$, резольвента $S(\lambda)$* (26) *пучка лидирующих операторов удовлетворяет оценкам* (27), (30) *с постоянными $q_j < n - j - 1$. Тогда задача Коши* (1), (2) *полнократно корректна и p-кратно экспоненциально корректна.*

Используя теорему 4 и формулы (12), (13), можно получить признаки p-кратной экспоненциальной корректности при степенных ограничениях на резольвенты $R(\lambda)A_j$ или $S(\lambda)A_j$ в правой полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda \ge \alpha$. Точные формулировки приведены в [5] (теорема 4, следствие 2).

4. Условия на операторы в случае гильбертового пространства. Можно указать достаточные условия на операторы A_j в (1), обеспечивающие резольвентные ограничения (19) или (27), (30). Приведем два типа таких условий на A_j в случае гильбертового пространства $X = Y = H$ и замкнутых операторов A_j с плотными в H областями определения $D(A_j)$.

Теорема 5. *Предположим, что $n > 1$, A_n — неотрицательный ограниченный оператор, $A_{n-1} = F + B$, где F — самосопряженный оператор, B — симметрический либо кососимметрический оператор. Пусть линеал $\bigcap_{j=0}^{n-1} D(A_j)$ плотен в H, $D(F) \subset \bigcap_{j=0}^{n-2} D(A_j^*) \cap D(B)$, при некотором $b \ge 0$ оператор $F + bA_n$ положительно определен (с положительной нижней гранью) и*

$$q = \|B(F + bA_n)^{-1}\| < 1. \tag{31}$$

Тогда задача Коши (1), (2) *является полнократно корректной и* $(n-1)$*-кратно экспоненциально корректной. Если, к тому же, и* A_n *положительно определен, то задача полнократно экспоненциально корректна.*

Доказательство. Из вложений $D(F) \subset D(B) \subset D(B^*)$ и альтернативных включений $B \subset B^*$, $B \subset -B^*$ следует существование ограниченных обратных отображений для операторов

$$F + B + bA_n = (I + B(F + bA_n)^{-1})(F + bA_n),$$

$$F + B^* + bA_n \subset (F + B + bA_n)^*.$$

Отсюда $(F+B+bA_n)^* = F+B^*+bA_n$. Поскольку A_n ограничен, то $(F+B)^* = F + B^*$.

Если B — симметрический оператор, то с помощью теоремы 4.12 из [18] (гл. 5) и условия (31) получаем

$$|(Bx, x)| \le q((F + bA_n)x, x), \quad x \in D(F). \tag{32}$$

Ясно, что оценка (32) справедлива и в случае кососимметричности B. В силу (32) при всех $u \in D(F)$, $\lambda \in G = G\left(b, \frac{\pi}{3}\right) = \left\{\lambda : \operatorname{Re}\lambda - b \ge -\frac{1}{\sqrt{3}}|\operatorname{Im}\lambda|\right\}$ имеем

$$|((\lambda A_n + A_{n-1})u, u)| \ge c_0[|\lambda|(A_n u, u) + ((F + bA_n)u, u)], \quad c_0 > 0.$$

Аналогично, используя равенство $(F + B)^* = F + B^*$, получаем оценку

$$\left|((\lambda A_n + A_{n-1})^* u, u)\right| = \left|\left(\left(\overline{\lambda} A_n + B^* + F\right) u, u\right)\right| \ge$$

$$\ge c_0' \left[|\overline{\lambda}|(A_n u, u) + ((F + bA_n)u, u)\right], \qquad \lambda \in G, \quad u \in D(F),$$

где $c_0' > 0$. Таким образом, угол G состоит из регулярных точек пучка $P(\lambda)$ (26). Все дальнейшие рассуждения будем проводить в угле $G_\delta = G\left(b + \delta, \frac{\pi}{3}\right)$, $\delta > 0$. Для всех $\lambda \in G_\delta$ определен и ограничен оператор $Q(\lambda) = (\lambda A_n + B^* + F)^{-1}$. Оператор A_n ограничен, поэтому

$$\|A_n P^{-1}(\lambda)\| + \|A_n Q(\lambda)\| \le c_1 |\lambda|^{-1/2}, \quad \lambda \in G_\delta. \tag{33}$$

Учитывая, что для $u \in D(F)$ справедливо равенство $B^* u = \pm Bu$, имеем

$$\|FQ(\lambda)\| \le 1 + \|(\lambda A_n \pm B)Q(\lambda)\| \le 1 + c_1\sqrt{|\lambda|} + \|BQ(\lambda)\| \le$$

$$\le 1 + c_1\sqrt{|\lambda|} + q\|(F + bA_n)Q(\lambda)\| \le c + c_2\sqrt{|\lambda|} + q\|FQ(\lambda)\|, \quad \lambda \in G_\delta.$$

Отсюда получаем $\|FQ(\lambda)\| \le c_3\sqrt{|\lambda|}$, $\lambda \in G_\delta$. В силу включения $D(F) \subset \bigcap_{j=0}^{n-1} D(A_j^*)$ имеем оценки

$$\|A_j^* Q(\lambda)\| \le c_4\sqrt{|\lambda|}, \qquad \lambda \in G_\delta, \quad j = 0, \ldots, n-1. \tag{34}$$

Теперь заметим, что вследствие (33), (34) в угле G_δ справедливы оценки

$$\|\overline{P^{-1}(\lambda)A_j}\| \le c_5\sqrt{|\lambda|}, \qquad \lambda \in G_\delta, \quad j = 0,\dots,n-1. \tag{35}$$

Применение следствия 1 при $p = n-1$ дает $(n-1)$-кратную экспоненциальную корректность и полнократную корректность рассматриваемой задачи Коши. Если оператор A_n положительно определен, оценки (35) уточняются:

$$\|\overline{P^{-1}(\lambda)A_j}\| \le c_5, \qquad \lambda \in G_\delta, \quad j = 0,\dots,n-1,$$

и в этом случае полнократная экспоненциальная корректность задачи (1), (2) вытекает из следствия 1 при $p = n$.

***Следствие* 2.** *Для полнократной корректности и однократной экспоненциальной корректности задачи Коши для уравнения второго порядка в гильбертовом пространстве H*

$$A_2u''(t) + A_1u'(t) + A_0u(t) = 0, \quad t > 0; \qquad u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1 \tag{36}$$

достаточно, чтобы замкнутые операторы A_j удовлетворяли следующим условиям: $A_1 = \alpha F + B$, $A_0 = F + C$ (либо $A_0 = FK$, $\overline{D(FK)\cap D(F)} = H$), где $F = F^* \ge mI$, α, m — положительные числа, операторы $A_2 \ge 0$ и K ограничены, B — симметрический или кососимметрический оператор, C — симметрический оператор, $D(F) \subset D(B)\cap D(C)$, и для некоторого числа $b \ge 0$ справедлива оценка нормы $\|B(\alpha F + bA_2)^{-1}\| < 1$. Если еще и $A_2 \ge mI > 0$, то задача (36) полнократно равномерно корректна.

В следующей теореме не предполагается ограниченность оператора A_n при старшей производной.

Теорема 6. *Пусть $n > 1$, D_L плотно в H, $A_n = A_n^* \ge 0$, $A_{n-1} = F + B$, где $F = F^*$, B — симметрический либо кососимметрический оператор и для некоторого числа $b \ge 0$ выполнена оценка (31), причем $F + bA_n \ge mI > 0$, $D((F+bA_n)^{1/2}) \subset D(A_n)\cap D(B)\cap\left(\bigcap_{j=0}^{n-2} D(A_j^*)\right)$. Тогда задача Коши (1), (2) полнократно корректна и $(n-1)$-кратно экспоненциально корректна. Если, кроме того, оператор A_n положительно определен и ограничен, то рассматриваемая задача полнократно экспоненциально корректна.*

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 5, при всех $u \in D(F)\cap$ $\cap D(A_n)$ и $\lambda \in G = G\left(b, \dfrac{\pi}{3}\right)$ получаем оценки

$$\Big|((\lambda A_n + F + B)u, u)\Big| \ge c_0\Big[|\lambda|(A_nu,u) + (\widehat{F}u,u)\Big], \tag{37}$$

$$\Big|((\lambda A_n + B^* + F)u, u)\Big| \ge c_0'\Big[|\lambda|(A_nu,u) + (\widehat{F}u,u)\Big], \tag{38}$$

где $\widehat{F} = F + bA_n$, постоянные c_0, $c_0' > 0$ не зависят от выбора $u \in D(F)\cap$ $\cap D(A_n)$ и $\lambda \in G$. По условию теоремы операторы $\widehat{F}^{-1/2}A_n\widehat{F}^{-1/2}$, $\widehat{F}^{-1/2}B\widehat{F}^{-1/2}$ ограничены. Поэтому в силу представления

$$P(\lambda) = \lambda A_n + B + F =$$

$$= \widehat{F}^{1/2}\left((\lambda - b)\widehat{F}^{-1/2}A_n\widehat{F}^{-1/2} + I + \widehat{F}^{-1/2}B\widehat{F}^{-1/2}\right)\widehat{F}^{1/2}$$

и оценок (37), (38) угол $G_\delta = G\left(b+\delta, \dfrac{\pi}{3}\right)$, $\delta > 0$, состоит из регулярных точек пучков $P(\lambda)$, $\lambda A_n + F + B^*$ и при некоторой постоянной $C > 0$ справедливы оценки

$$\|A_j^*(\overline{\lambda}A_n + F + B^*)^{-1}\| \le C, \qquad \lambda \in G_\delta, \quad j = 0, \ldots, n-2, n.$$

Учитывая, что $\left(A_j^*(\overline{\lambda}A_n + F + B^*)^{-1}\right)^* \supset (\lambda A_n + F + B)^{-1}A_j = P^{-1}(\lambda)A_j$, $\lambda \in G_\delta$, $j = 0, \ldots, n-2, n$, получаем неравенства

$$\left\|\overline{P^{-1}(\lambda)A_j}\right\| \le C, \qquad \lambda \in G_\delta, \quad j = 0, \ldots, n-2, n.$$

Поэтому $\left\|\overline{S(\lambda)A_{n-1}}\right\| \le C_1|\lambda|$, и оценки (27) выполнены при $p = n-1$, $\lambda \in G_\delta$. Согласно следствию 1 задача Коши (1), (2) полнократно корректна и $(n-1)$-кратно экспоненциально корректна. Если оператор $A_n \in [H, H]$ положительно определен, то из (38) получаем

$$\|A_n(\overline{\lambda}A_n + F + B^*)^{-1}\| \le \frac{C}{|\lambda|}, \quad \lambda \in G_\delta,$$

так что в (27) $p = n$ и задача Коши (1), (2) полнократно экспоненциально корректна.

Теорема доказана.

5. Дополнения и приложения. 1. В [5] рассмотрена начально-краевая задача для уравнения в частных производных, абстрактная форма которой имеет вид (1), (2) в пространстве $L_2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbf{R}^N$. С помощью теоремы 3.5 из [19] (п. 3.3) доказывается, что оценки (27), (30) выполнены в угле $G\left(1, \dfrac{\pi}{4}\right)$ при $p = n-1$, $n > 1$. Согласно следствию 1 задача является полнократно корректной и $(n-1)$-кратно экспоненциально корректной в L_2-норме.

2. Пусть задача (4) корректна, $A_1 \in [X, Y]$, существуют натуральное число m и регулярная точка λ_0 пучка $\lambda A_1 + A_0$ такие, что при любом $x \in X$ вектор $v = [(\lambda_0 A_1 + A_0)^{-1}A_1]^m x$ является начальным для корректной задачи (4). Тогда существует полуплоскость $\operatorname{Re}\lambda > \omega$, в которой оператор $T(\lambda) = (\lambda A_1 + A_0)^{-1}A_1$ определен на всем X, ограничен и удовлетворяет оценке $\|T(\lambda)\| \le C(1 + |\lambda|^m)$. При $m = 1$ и $A_1 = I$ доказательство этого факта приводится в [9] (гл. 1). Для $m > 1$ и $A_1 \in [X, Y]$ необходимая коррекция доказательства получается с помощью результатов работы [2].

3. Теорема 5 остается справедливой, если дополнительно потребовать включение $D(F) \subset \bigcap\limits_{j=0}^{n-2} D(A_j)$ и рассмотреть соответствующие корректности в *энергетическом пространстве положительно определенного оператора* F, что эквивалентно замене пространства X энергетическим пространством оператора F в соответствующих определениях корректности (ср. с [20, с. 83, 84]).

4. Частный случай задач (36) или (17) ($A_2 = I$, $A_1 = \alpha F + B$, $A_0 = F$, $B \subset B^*$) рассматривался в [20]; в частности, там обсуждалась полнократная равномерная

корректность в энергетической норме. Задача из теории упругости, исследовавшаяся в [21], представима в абстрактной форме (36), где $A_2 = I$, $A_1 = \alpha F + B$, $A_0 = FK$, $B^* = B \in [H, H]$.

Из следствия 2 вытекает *полнократная равномерная корректность начально-краевых задач, описывающих малые колебания упругого стержня в* [20, 21] и *вязкоупругого трубопровода в* [22]. Продемонстрируем это на примере начально-краевой задачи для уравнения малых поперечных колебаний вязкоупругого трубопровода, несущего поток идеальной несжимаемой жидкости и находящегося в вязкой среде (см. [22]):

$$\alpha\frac{\partial^5 u(x,t)}{\partial x^4 \partial t} + \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} + \nu^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + 2\beta\nu\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} +$$

$$+k\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0, \qquad t > 0, \quad x \in [0,1],$$

$$u(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = u(1,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0, \tag{39}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x).$$

Эта задача приводится к абстрактному виду (36) в пространстве $H = L_2(0,1)$ при $A_2 = I$ с помощью дифференциальных операторов $A_1 = \alpha F + B$, $A_0 = F + C$, $Fu = u^{(4)} + \alpha^{-1}ku$, $D(F) = \{u \in W_2^4[0,1] : u(0) = u'(0) = u(1) = u'(1) = 0\}$, $Bu = 2\beta\nu u'$, $D(B) = \{u \in W_2^1[0,1] : u(0) = u(1)\}$, $Cu = \nu^2 u'' - \alpha^{-1}ku$, $D(C) = \{u \in W_2^2[0,1] : u(0) = u(1) = 0\}$. Пусть $\alpha > 0$ и ν, k, $\beta \geq 0$. Нетрудно видеть, что $F \geq mI > 0$, $C^* = C, B^* = -B$, $D(F) \subset D(C) \cap D(B)$, а операторы F^{-1}, BF^{-1} являются вполне непрерывными. В силу предложения 1.1 [20] для любого $\varepsilon > 0$ выполнена оценка

$$\|Bu\| \leq \varepsilon\|Fu\| + M(\varepsilon)\|u\|, \quad u \in D(F).$$

Поэтому при достаточно большом $b > 0$ имеет место неравенство $\|B(\alpha F + bI)^{-1}\| < 1$. Согласно следствию 2 задача (39) является полнократно экспоненциально корректной.

1. *Руткас А. Г.* Задача Коши для уравнения $Ax'(t) + Bx(t) = f(t)$ // Дифференц. уравнения. – 1975. – **11**, № 11. – С. 1996–2010.
2. *Руткас А. Г.* О классификации и свойствах решений уравнения $Ax' + Bx = f(t)$ // Там же. – 1989. – **25**, № 7. – С.1150–1155.
3. *Rutkas A., Vlasenko L.* Implicit operator differential equations and applications to electrodynamics // Math. Methods in Appl. Sci. – 2000. – **23**, № 1. – P. 1–15.
4. *Власенко Л. А., Руткас А. Г.* Теоремы единственности и аппроксимации для одного вырожденного операторно-дифференциального уравнения // Мат. заметки. – 1996. – **60**, № 4. – С. 597–600.
5. *Пивень А. Л., Руткас А. Г.* О корректности задачи Коши для операторно-дифференциальных уравнений высокого порядка // Допов. НАН України. – 2003. – № 5. – С. 32–37.
6. *Fattorini H. O.* Extension and behavior at infinity of solutions of certain linear operational differential equations // Pacif. J. Math. – 1970. – **33**, № 3. – P. 583–615.

7. *Fattorini H. O.* Second-order linear differential equations in Banach spaces. – Amsterdam etc., 1985. – 314 p.
8. *Любич Ю. И.* Классическое и локальное преобразование Лапласа в абстрактной задаче Коши // Успехи мат. наук. – 1966. – **21**, № 3. – С. 3–51.
9. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1967. – 464 с.
10. *Голдстейн Дж.* Полугруппы линейных операторов и их приложения. – Киев: Выща шк., 1989. – 348 с.
11. *Neubrander F.* Well-posedness of higher order abstract Cauchy problems // Trans. Amer. Math. Soc. – 1986. – **295**, № 1. – P. 257–290.
12. *Neubrander F.* Integrated semigroups and their applications to the abstract Cauchy problem // Pacif. J. Math. – 1988. – **135**, № 1. – P. 111–155.
13. *Sova M.* On Hadamar's concepts of correctness // Cas. pest. mat. – 1977. – **102**, № 3. – P. 234–269.
14. *Горбачук М. Л.* О корректности задачи Коши для дифференциально - операторных уравнений в классах аналитических вектор-функций // Докл. АН России. – 2000. – **374**, № 1. – С. 7–9.
15. *Obrecht E.* Sul problema di Cauchy per le equazioni paraboliche astratte di ordine n // Rend. Semin. mat. Univ. Padova. – 1975. – **53**. – P. 231–256.
16. *Yamamoto Y.* On coerciveness in Besov spaces for abstract parabolic equations of higher order // Stud. math. – 1999. – **134**, № 1. – P. 79–98.
17. *Colli P., Favini A.* On some degenerate second order equations of mixed type // Funkc. ekvacioj. – 1995. – **38**. – P. 473–489.
18. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. – М.: Мир, 1972. – 740 с.
19. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1965. – 800 с.
20. *Lancaster P., Shkalikov A.* Damped vibrations of beams and related spectral problems // Can. Appl. Math. Quart. – 1994. – **2**, № 1. – P. 45–90.
21. *Adamjan V., Pivovarchik V. I., Tretter C.* On a class of non-selfadjoint quadratic matrix operator pencils arising in elasticity theory // J. Operator Theory. – 2002. –lpha **47**, № 2. – P. 325–341.
22. *Милославский А. И.* К обоснованию спектрального подхода в неконсервативных задачах теории упругой устойчивости // Функцион. анализ и его прил. – 1983. – **17**, вып. 3. – С. 83–84.

Получено 11.08.2003