УДК 517.982.26

Н. В. Зорий (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ТЕОРИЯ ПОТЕНЦИАЛА ОТНОСИТЕЛЬНО СОГЛАСОВАННЫХ ЯДЕР: ТЕОРЕМА О ПОЛНОТЕ, ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ПОТЕНЦИАЛОВ

The concept of consistent kernels introduced by Fuglede in 1960 has obtained significant applications in extremal problems of the theory of potentials on classes of positive measures. In the work, this concept is shown to be also efficient in the investigation of extremal problems on fairly general classes of signed measures. In particular, for an arbitrary consistent kernel in a locally compact space, we establish a theorem on the strong completeness of rather general subspaces of the space $\mathcal{E}$ of all measures with finite energy. (Note that, according to the well-known counterexample by Cartan, the entire space $\mathcal{E}$ is strongly incomplete even in the classical case of the Newton kernel in $\mathbb{R}^n$.) Using this theorem, we obtain new results on the Gauss variational problem: in the noncompact case, we give a description of vague and (or) strong limits points of minimizing sequences of measures and obtain sufficient conditions for the solvability.

Концепція узгоджених ядер, уведена Фугледе у 1960 р., отримала широке застосування в екстремальних задачах теорії потенціалу на класах додатних мір. У роботі показано ефективність цієї концепції у дослідженні екстремальних задач на досить загальних класах знакозмінних мір. Так, для довільного узгодженого ядра у локально компактному просторі доведено теорему про сильну повноту вельми загальних підпросторів простору $\mathcal{E}$ всіх мір зі скінченною енергією. (Зазначимо, що відповідно до відомого контрприкладу Картана весь простір $\mathcal{E}$ є сильно неповним навіть у класичному випадку ядра Ньютона в $\mathbb{R}^n$.) З допомогою згаданої теореми отримано нові результати у дослідженні варіаційної задачі Гаусса: у некомпактному випадку наведено опис широких та (або) сильних граничних мір мінімізуючих послідовностей, знайдено достатні умови розв'язності.

Введение. В начале 60-х годов прошлого столетия в работах[1] Б. Фугледе [1, 2] были заложены основы теории потенциала в локально компактном (отделимом) пространстве $\mathbf{X}$ относительно *согласованных* ядер. Естественность рассмотрения согласованных ядер состоит в том, что при их достаточной общности в соответствующей теории удается сохранить ряд фундаментальных положений *классической* теории потенциала, относящихся к экстремальным задачам на классах *положительных* мер.

В настоящей работе показана эффективность применения концепции согласованных ядер к экстремальным задачам на классах *знакопеременных* мер: доказана теорема о сильной полноте весьма общих пространств мер, с ее помощью получены новые результаты в исследовании вариационной задачи Гаусса (ср. с [3 – 7]).

Пусть $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\mathbf{X})$ — линейное пространство всех вещественнозначных мер Радона ν на $\mathbf{X}$, снабженное топологией *широкой* сходимости [8]; в дальнейшем вещественнозначную меру Радона будем называть просто *мерой*. Используемые в работе понятия и результаты из теории мер и интегрирования содержатся в [8, 9] (см. также краткие обзоры в [1, 10]).

Обозначим через $S(\cdot)$ носитель меры или функции. Если $\mathbf{Y}$ — топологическое пространство, то пусть $\Phi(\mathbf{Y})$ обозначает класс всех полунепрерывных снизу функций ψ на $\mathbf{Y}$ таких, что $\psi \geq 0$ или $S(\psi)$ компактно.

1. Предварительные сведения. *Ядро* κ на $\mathbf{X}$ определяется как полунепрерывная снизу функция $\kappa : \mathbf{X}\times\mathbf{X} \to (-\infty, \infty]$. Следуя [1], предполагаем, что либо пространство $\mathbf{X}$ компактно, либо ядро κ неотрицательно.

Всюду в настоящей работе будем считать ядро κ *положительно определен-*

[1] Автор выражает глубокую признательность Б. Фугледе, который в личной переписке любезно ее информировал о работе [2].

ным. Это, напомним, означает, что κ симметрично (т. е. $\kappa(x,y)=\kappa(y,x)$ для всех x, y) и *энергия*

$$\kappa(\nu,\nu) := \int \kappa(x,y)\,d(\nu\otimes\nu)(x,y), \quad \nu\in\mathfrak{M},$$

неотрицательна, если только определена. Тогда множество $\mathcal{E} := \{\nu\in\mathfrak{M}: \kappa(\nu,\nu)<\infty\}$ образует предгильбертово пространство со скалярным произведением

$$\kappa(\nu_1,\nu_2) := \int \kappa(x,y)\,d(\nu_1\otimes\nu_2)(x,y)$$

и полунормой $\|\nu\| := \sqrt{\kappa(\nu,\nu)}$ (см., например, [1]). (Положительно определенное) ядро κ называется *строго положительно определенным*, если полунорма $\|\cdot\|$ удовлетворяет аксиомам нормы. Топология на $\mathcal{E}$, задаваемая полунормой $\|\cdot\|$, называется *сильной*.

Наряду с сильной топологией часто используется так называемая *$\mathcal{E}$-слабая* топология на $\mathcal{E}$, задаваемая системой полунорм

$$\mu \to |\kappa(\mu,\nu)|, \quad \nu\in\mathcal{E}.$$

Из неравенства Коши – Буняковского $|\kappa(\mu,\nu)|\le\|\mu\|\,\|\nu\|$, $\mu,\nu\in\mathcal{E}$, очевидно следует, что сильная топология на $\mathcal{E}$ сильнее $\mathcal{E}$-слабой.

2. Согласованные ядра. Пусть $\mathcal{E}^+$ — выпуклый конус всех мер $\nu\ge 0$ из $\mathcal{E}$. Чтобы сильная и широкая топологии на $\mathcal{E}^+$ (индуцированные соответственно из $\mathcal{E}$ и $\mathfrak{M}$) могли использоваться одновременно, Фугледе из всей совокупности (положительно определенных) ядер на $\mathbf{X}$ выделил ядра, удовлетворяющие следующему условию *согласованности* [1]:

(*C*) *Каждая сильно фундаментальная направленность в $\mathcal{E}^+$ сильно сходится к каждой своей широкой предельной точке.*

Отметим, что класс согласованных ядер достаточно широк. В частности, в соответствии с результатами Картана [11] и Дени [12, 13] согласованными являются ядро Ньютона $|x-y|^{2-n}$ и ядра Грина g_D в $\mathbb{R}^n$, $n\ge 3$ (здесь $D\subset\mathbb{R}^n$ — открытое множество, а g_D — его обобщенная функция Грина), а также ядра Рисса $|x-y|^{\alpha-n}$ произвольного порядка $\alpha\in(0,n)$ в $\mathbb{R}^n$, $n\ge 2$.

С другой стороны, концепция согласованных ядер весьма эффективна при исследовании экстремальных задач на классах неотрицательных мер. В частности, теория емкостей множеств относительно произвольного согласованного ядра в $\mathbf{X}$ (см. [1]) сохраняет все основные утверждения соответствующих теорий для классических ядер в $\mathbb{R}^n$ (ср. с [14]).

Покажем, что при определенных не очень ограничительных условиях концепция согласованных ядер является хорошим аппаратом и при исследовании экстремальных задач на классах знакопеременных мер.

3. Теорема о полноте. Пусть $\mathfrak{M}^+(Q)$ (где Q — множество в $\mathbf{X}$) обозначает класс всех неотрицательных мер, сосредоточенных на Q. Обозначим $\mathcal{E}^+(Q) := \mathcal{E}\cap\mathfrak{M}^+(Q)$.

Пусть E^+ и E^- — непустые непересекающиеся замкнутые множества в $\mathbf{X}$, а (E^+,E^-) — их упорядоченная пара (часто называемая *конденсатором*). Через $\mathcal{E}(E^+,E^-)$ обозначим выпуклый конус всех мер $\nu=\nu^+-\nu^-$ таких, что их положительная и отрицательная вариации удовлетворяют условию

$$\nu^+\in\mathcal{E}^+(E^+), \quad \nu^-\in\mathcal{E}^+(E^-).$$

Далее, для каждого $b \in [0, \infty)$ обозначим

$$\mathcal{E}_b(E^+, E^-) := \{\nu \in \mathcal{E}(E^+, E^-) : |\nu|(\mathbf{X}) \le b\},$$

где $|\nu| := \nu^+ + \nu^-$. Тогда $\mathcal{E}(E^+, E^-)$ и $\mathcal{E}_b(E^+, E^-)$ — полуметрические пространства с (индуцированной из $\mathcal{E}$) полуметрикой $\rho(\nu_1, \nu_2) := \| \nu_1 - \nu_2 \|$.

Теорема 1. *Пусть ядро* κ *согласованно и ограничено сверху на* $E^+ \times E^-$:

$$\sup_{x \in E^+,\ y \in E^-} \kappa(x, y) < \infty. \tag{1}$$

Тогда полуметрическое пространство $\mathcal{E}_b(E^+, E^-)$ *полно, причем каждая сильная направленность Коши в* $\mathcal{E}_b(E^+, E^-)$ *сильно сходится к каждой своей широкой предельной точке. Если, кроме того, ядро* κ *строго положительно определено*[2], *то из сильной сходимости в* $\mathcal{E}_b(E^+, E^-)$ *вытекает широкая сходимость к тому же пределу.*

Напомним, что согласно известному контрпримеру Картана [11] все предгильбертово пространство $\mathcal{E}$ *не полно* в сильной топологии даже в классическом случае ядра Ньютона.

Доказательство. Согласно [2], ядро согласованно тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет следующему условию [1]:

(CW) *Каждая сильно ограниченная и широко сходящаяся направленность в* $\mathcal{E}^+$ $\mathcal{E}$*-слабо сходится к своему широкому пределу.*

Зафиксируем сильную направленность Коши $(\mu_s)_{s \in S}$ в $\mathcal{E}_b(E^+, E^-)$. Множество $\mathcal{E}_b(E^+, E^-)$ широко ограничено, и поэтому [8] (гл. III, § 2, п. 7) оно широко относительно компактно. Следовательно, широкое предельное множество направленности $(\mu_s)_{s \in S}$ не пусто; пусть μ_0 — его произвольный фиксированный элемент. Покажем, что

$$\mu_0 \in \mathcal{E}_b(E^+, E^-), \tag{2}$$

причем

$$\mu_s \to \mu_0 \quad \text{сильно.} \tag{3}$$

Пусть $(\mu_t)_{t \in T}$ — поднаправленность $(\mu_s)_{s \in S}$ такая, что

$$\mu_t \to \mu_0 \quad \text{широко.} \tag{4}$$

В силу теоремы 6.1 из [15] тогда (и, очевидно, только тогда) выполняется[3]

$$\mu_t^+ \to \mu_0^+, \qquad \mu_t^- \to \mu_0^- \quad \text{широко.} \tag{5}$$

Поскольку $(\mu_s)_{s \in S}$ сильно фундаментальна, направленность $(\mu_t)_{t \in T}$ можно считать сильно ограниченной (пусть числом M). Тогда вследствие (1) и соотношений

---

[2] В терминологии работы [1] согласованное и строго положительно определенное ядро называется *совершенным*.

[3] Отметим, что для справедливости импликации (4) $\Rightarrow$ (5) условие равномерной отделимости носителей $S(\mu_t^+)$ и $S(\mu_t^-)$, $t \in T$, существенно. Действительно, отказавшись от этого условия, легко построить широко сходящуюся последовательность знакопеременных мер ν_n, $n \in \mathbb{N}$, такую, что ν_n^+ и ν_n^-, $n \in \mathbb{N}$, вообще не имеют пределов в широкой топологии.

$$|\mu_t|(\mathbf{X}) \le b, \quad t \in T, \tag{6}$$

находим

$$\|\mu_t^+\|^2 + \|\mu_t^-\|^2 \le M_1, \quad t \in T, \tag{7}$$

где

$$M_1 := M + 2b^2 \sup_{x \in E^+,\ y \in E^-} \kappa(x, y) < \infty.$$

Учитывая (см. [1, 8, 9]), что функционалы $\nu(\mathbf{X})$ и $\|\nu\|$ широко полунепрерывны снизу на $\mathfrak{M}^+(\mathbf{X})$, а множества $\mathfrak{M}^+(E^+)$ и $\mathfrak{M}^+(E^-)$ широко замкнуты вследствие замкнутости E^+ и E^-, из соотношений (5) – (7) выводим соотношение (2).

Применяя к $(\mu_t^+)_{t\in T}$ и μ_0^+, а также к $(\mu_t^-)_{t\in T}$ и μ_0^- свойство (CW) (что правомерно в силу соотношений (5) и (7)), вследствие билинейности взаимной энергии получаем, что

$$\mu_t \to \mu_0 \quad \mathscr{E}\text{-слабо.}$$

Используя неравенство Коши – Буняковского, отсюда выводим

$$\|\mu_t - \mu_0\|^2 = \lim_{l \in T} \kappa(\mu_t - \mu_0, \mu_t - \mu_l) \le \|\mu_t - \mu_0\| \liminf_{l\in T} \|\mu_t - \mu_l\|,$$

что в силу сильной фундаментальности направленности $(\mu_t)_{t\in T}$ доказывает ее сильную сходимость к μ_0. А поскольку сильная направленность Коши сильно сходится к каждой своей сильной предельной точке, отсюда вытекает искомое соотношение (3).

Предположим дополнительно, что ядро κ строго положительно определено, а $(\mu_s)_{s\in S} \subset \mathscr{E}_b(E^+, E^-)$ сильно сходится к μ_0. Тогда сильная топология в $\mathscr{E}$ отделима и, согласно доказанному выше, в этих условиях μ_0 — единственная широкая предельная точка направленности $(\mu_s)_{s\in S}$. Вследствие широкой относительной компактности множества $\{\mu_s : s \in S\}$ тогда необходимо выполняется $\mu_s \to \mu_0$ широко [16] (гл. I, § 9, п. 1).

Теорема 1 доказана.

***Замечание* 1.** Для ядер Ньютона $|x-y|^{2-n}$ и Грина g_D в $\mathbb{R}^n$, $n \ge 3$, а также ядер Рисса $|x-y|^{\alpha-n}$, $0 < \alpha < n$, в $\mathbb{R}^n$, $n \ge 2$, теорема 1 доказана автором в [17 – 20]. (Условие согласованности для этих ядер выполняется автоматически и может быть опущено.) С помощью аппарата обобщенных функций автору в [20] удалось также показать, что для ядер Ньютона и Рисса теорема 1 останется в силе, если в ее формулировке пространство $\mathscr{E}_b(E^+, E^-)$ заменить на $\mathscr{E}(E^+, E^-)$, а условие (1) опустить без какой-либо компенсации.

4. Вариационная задача Гаусса. Пусть f — вещественнозначная функция с областью определения в $\mathbf{X}$. Для каждого $\nu \in \mathscr{E}$ обозначим

$$\mathcal{F}_f(\nu) := \kappa(\nu, \nu) - 2\int f\, d\nu,$$

если только $\int f\, d\nu$ определен. Задача о минимизации $\mathcal{F}_f(\nu)$, где ν пробегает заданное подмножество из $\mathscr{E}$, называется (*вариационной*) *задачей Гаусса* (см., например, [3, 4]).

Применение теоремы 1 позволяет получить ряд новых результатов в исследовании вариационной задачи Гаусса, рассматриваемой над весьма общими классами знакопеременных мер, ассоциированных с системой множеств в $\mathbf{X}$ (ср. с [3 – 7]). Сформулируем соответствующую постановку задачи.

Пусть $m, p \in \mathbb{N}$, где $m \le p$, фиксированы. Обозначим

$$I := \{1, \dots, p\}, \quad I^+ := \{1, \dots, m\}, \quad I^- := I \setminus I^+.$$

Пусть $\mathcal{A} = (A_i)_{i \in I}$ — упорядоченная совокупность непустых множеств $A_i \subset \mathbf{X}$, $i \in I$, таких, что каждому A_i ставится в соответствие знак

$$\operatorname{sign} A_i := \alpha_i := \begin{cases} +1, & \text{если} \quad i \in I^+, \\ -1, & \text{если} \quad i \in I^-, \end{cases}$$

причем

$$\overline{A_i} \cap \overline{A_j} = \varnothing, \quad \text{если} \quad \operatorname{sign} A_i \ne \operatorname{sign} A_j.$$

Через $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ обозначим множество в $\mathfrak{M}(\mathbf{X})$, состоящее из всех *линейных комбинаций* вида

$$\mu = \sum_{i \in I} \alpha_i \mu^i, \quad \text{где} \quad \mu^i \in \mathfrak{M}^+(A_i), \quad i \in I.$$

Два элемента из $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$, μ_1 и μ_2, будем считать *тождественными* в том и только в том случае, когда они равны покоординатно:

$$\mu_1 \equiv \mu_2 \Leftrightarrow \mu_1^i = \mu_2^i \quad \text{для всех} \quad i \in I.$$

Для данного $\mathcal{A} = (A_i)_{i \in I}$ обозначим

$$A := \bigcup_{i \in I} A_i, \quad A^+ := \bigcup_{i \in I^+} A_i, \quad A^- := \bigcup_{i \in I^-} A_i.$$

Пусть функция g задана, положительна и непрерывна по крайней мере всюду на $\overline{A}$. Зафиксировав вектор $a = (a_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}^p$ с $a_i > 0$, $i \in I$, для данных $\mathcal{A}$, κ, f и g введем в рассмотрение следующие классы мер:

$$\mathcal{E}^+(A_i, a_i, g) := \{\nu \in \mathcal{E}^+(A_i) : \int g\, d\nu = a_i\}, \quad i \in I,$$

$$\mathcal{E}(\mathcal{A}, a, g) := \{\mu \in \mathfrak{M}(\mathcal{A}) : \mu^i \in \mathcal{E}^+(A_i, a_i, g) \ \text{для всех} \ i \in I\},$$

$$\mathcal{E}_f(\mathcal{A}, a, g) := \{\mu \in \mathcal{E}(\mathcal{A}, a, g) : \int f\, d\mu \ \text{определен и} \ne -\infty\}$$

и обозначим[4]

$$\mathcal{F}_f(\mathcal{A}, a, g) := \inf_{\mu \in \mathcal{E}_f(\mathcal{A}, a, g)} \mathcal{F}_f(\mu).$$

Задачу Гаусса о минимизации $\mathcal{F}_f(\mu)$ в классе $\mathcal{E}_f(\mathcal{A}, a, g)$ назовем $\mathcal{F}_f(\mathcal{A}, a, g)$-*задачей*.

Всюду далее, кроме замечания 2, будем считать, что для каждого $i \in I$ существуют функции $f_{i1}, f_{i2} \in \Phi(\overline{A_i})$ такие, что значение f в любой точке $x \in \overline{A_i}$ определено тогда и только тогда, когда определена разность $f_{i1}(x) - f_{i2}(x)$, причем

[4] Как обычно, точные нижнюю и верхнюю грани над пустым множеством полагаем равными соответственно $+\infty$ и $-\infty$.

$$f(x) = f_{i1}(x) - f_{i2}(x). \tag{8}$$

В этих условиях $\mathcal{F}_f(\mathcal{A}, a, g)$-задача не изменится [6, 7], если класс допустимых мер $\mathcal{E}_f(\mathcal{A}, a, g)$ сузить до класса $\mathcal{E}^0_f(\mathcal{A}, a, g)$, состоящего из всех $\mu \in \mathcal{E}_f(\mathcal{A}, a, g)$ таких, что для каждого $i \in I$ носитель $S(\mu^i)$ компактен и содержится в A_i.

В частности, условие (8) и следующее за ним утверждение выполняются, если $f = \kappa(\cdot, \nu) := \int \kappa(\cdot, y)\, d\nu(y)$ — *потенциал* меры $\nu \in \mathfrak{M}$.

Кроме того, всюду далее будем считать выполненным естественное условие

$$-\infty < \mathcal{F}_f(\mathcal{A}, a, g) < \infty. \tag{9}$$

5. Сильные предельные точки минимизирующих направленностей. Говорят, что некоторое утверждение $R(x)$, содержащее переменную точку $x \in \mathbf{X}$, справедливо *приблизительно всюду* (пр. вс.) в Q, если множество всех тех $x \in Q$, для которых $R(x)$ ложно, имеет нулевую внутреннюю емкость (см., например, [1]).

Направленность $(\mu_s)_{s \in S} \subset \mathcal{E}^0_f(\mathcal{A}, a, g)$ называется *минимизирующей* в $\mathcal{F}_f(\mathcal{A}, a, g)$-задаче, если

$$\lim_{s \in S} \mathcal{F}_f(\mu_s) = \mathcal{F}_f(\mathcal{A}, a, g); \tag{10}$$

совокупность всех таких $(\mu_s)_{s \in S}$ обозначим через $\mathbb{M}^0 = \mathbb{M}^0(\mathcal{A}, a, g, f)$. Легко видеть [7], что для всех $(\mu_s)_{s \in S}$ и $(\nu_t)_{t \in T}$ из $\mathbb{M}^0(\mathcal{A}, a, g, f)$ выполняется

$$\lim_{(s,t) \in S \times T} \|\mu_s - \nu_t\| = 0 \tag{11}$$

(где $S \times T$ — направленное произведение направленных множеств S и T), и поэтому направленности из $\mathbb{M}^0$ сильно фундаментальны. Будем считать, что все минимизирующие направленности из $\mathbb{M}^0$ сильно ограничены, так как при необходимости всегда можно перейти к поднаправленности.

Пусть $\mathcal{M}^0 = \mathcal{M}^0(\mathcal{A}, a, g, f)$ — совокупность всех сильных предельных точек всех направленностей из $\mathbb{M}^0(\mathcal{A}, a, g, f)$. Учитывая (11), для произвольных $(\mu_s)_{s \in S} \in \mathbb{M}^0(\mathcal{A}, a, g, f)$ и $\chi \in \mathcal{M}^0(\mathcal{A}, a, g, f)$ получаем, что

$$\mu_s \to \chi \quad \text{сильно}. \tag{12}$$

Следовательно, $\|\chi_1 - \chi_2\| = 0$ для всех $\chi_1, \chi_2 \in \mathcal{M}^0(\mathcal{A}, a, g, f)$, и поэтому [1] (лемма 3.2.1)

$$\kappa(x, \chi_1) = \kappa(x, \chi_2) \quad \text{пр. вс. в} \quad \mathbf{X}.$$

Всюду далее в настоящем пункте будем предполагать, что $\int f\, d\mu$ определен для всех $\nu \in \mathcal{E}^+$ с компактным носителем $S(\nu) \subset A$.

Теорема 2 содержит описание потенциалов $\kappa(\cdot, \chi)$ мер $\chi \in \mathcal{M}^0$. Отметим, что в принятых в теореме 2 условиях класс $\mathcal{M}^0$ не пуст (см. ее доказательство).

Теорема 2. *Пусть ядро* κ *согласованно и либо*

$$m = p \quad (\textit{т. е.}\ I^- = \varnothing),$$

либо выполняется совокупность следующих условий:

$$g_{\min} := \inf_{x \in A} g(x) > 0, \tag{13}$$

$$\sup_{x \in A^+,\ y \in A^-} \kappa(x, y) < \infty. \tag{14}$$

Тогда существует и единствен вектор (конечных) чисел η_i, $i \in I$, *таких, что для всех* $\chi \in \mathcal{M}^0(\mathcal{A}, a, g, f)$ *выполняется*

$$\alpha_i a_i [\kappa(x, \chi) - f(x)] \ge \alpha_i \eta_i g(x) \quad \text{пр. вс. в} \quad A_i, \quad i \in I, \tag{15}$$

$$2 \sum_{i \in I} \alpha_i \eta_i = \| \chi \|^2 + \mathcal{F}_f(\mathcal{A}, a, g). \tag{16}$$

Справедливо представление

$$\eta_i = \lim_{s \in S} [\kappa(\mu_s^i, \mu_s) - \int f \, d\mu_s^i], \quad i \in I, \tag{17}$$

где $(\mu_s)_{s \in S}$ — *произвольная фиксированная направленность из* $\mathbb{M}^0(\mathcal{A}, a, g, f)$.

Доказательство. Зафиксируем $(\mu_t)_{t \in T} \in \mathbb{M}^0(\mathcal{A}, a, g, f)$ так, чтобы для каждого $i \in I$ существовал (конечный или бесконечный) предел

$$\eta_i := \lim_{t \in T} [\kappa(\mu_t^i, \mu_t) - \int f \, d\mu_t^i]. \tag{18}$$

Покажем, что числа η_i, $i \in I$, определенные равенством (18), искомые.

Отметим, что в принятых условиях выполняется

$$\sup_{t \in T} \| \mu_t^i \| < \infty, \quad i \in I. \tag{19}$$

Действительно, в случае

$$m = p, \quad \kappa \ge 0 \tag{20}$$

соотношение (19) непосредственно вытекает из сильной ограниченности $(\mu_t)_{t \in T}$. В противоположном к (20) случае либо имеет место совокупность условий (13) и (14), либо $m = p$ и пространство $\mathbf{X}$ компактно (и поэтому снова выполняются соотношения (13) и (14)). Учитывая равенства $\int g \, d\mu_t^i = a_i$, $i \in I$, в силу (13) находим

$$\sup_{t \in T} \mu_t^i(\mathbf{X}) \le a_i g_{\min}^{-1} < \infty, \quad i \in I. \tag{21}$$

Вследствие (14) и (21) взаимные энергии $\kappa(\mu_t^+, \mu_t^-)$, $t \in T$, а поэтому и энергии $\| \mu_t^+ \|^2$, $\| \mu_t^- \|^2$, $t \in T$, ограничены сверху равномерно по t. Повторно используя оценку (21) и учитывая ограниченность снизу κ на $\mathbf{X} \times \mathbf{X}$, отсюда выводим (19).

Заметим также, что направленности $(\mu_t^i)_{t \in T}$, $i \in I$, широко ограничены. Действительно, для этого достаточно для каждого компактного множества K доказать неравенство

$$\sup_{t \in T} \mu_t^i(K) < \infty,$$

а это очевидно вследствие непрерывности и положительности функции g и соотношений

$$a_i = \int g\, d\mu_t^i \geq [\min_{x \in K} g(x)]\mu_t^i(K), \quad t \in T.$$

Следовательно, $(\mu_t^i)_{t \in T}$, $i \in I$, широко относительно компактны, а поэтому существует широкая предельная точка ζ направленности $(\mu_t)_{t \in T}$. Покажем, что

$$\mu_t \to \zeta \quad \text{сильно} \tag{22}$$

и, значит, $\zeta \in \mathcal{M}^0$. Очевидно, можно предположить, что $m \neq p$, так как в обратном случае соотношение (22) непосредственно следует из условия (C). Тогда выполняются условия (13), (14), а поэтому и оценка (21); следовательно, κ ограничено сверху на $\overline{A^+} \times \overline{A^-}$ и существует b такое, что

$$(\mu_t)_{t \in T} \subset \mathcal{E}_b(\overline{A^+}, \overline{A^-}).$$

Применяя теорему 1, получаем (22).

Зафиксируем $\chi \in \mathcal{M}^0$ и предположим, рассуждая от противного, что для некоторого $j \in I$ существует множество $E_j \subset A_j$ с внутренней емкостью $C(E_j) > 0$ такое, что

$$\alpha_j a_j [\kappa(x, \chi) - f(x)] < \alpha_j \eta_j g(x) \quad \text{для всех} \quad x \in E_j. \tag{23}$$

Выберем $\nu \in \mathcal{E}^+$ с компактным носителем $S(\nu) \subset E_j$ так, чтобы выполнялось

$$\int g\, d\nu = a_j.$$

Тогда вследствие принятых предположений $\int f\, d\nu$ определен и конечен. Интегрируя неравенство (23) относительно меры ν, находим

$$\alpha_j [\kappa(\chi, \nu) - \int f\, d\nu - \eta_j] < 0. \tag{24}$$

Зафиксировав произвольное $\tau \in (0, 1]$, обозначим

$$\tilde{\mu}_t := \mu_t - \alpha_j \tau(\mu_t^j - \nu), \quad t \in T.$$

Очевидно, $\tilde{\mu}_t \in \mathcal{E}_f^0(\mathcal{A}, a, g)$ для всех $t \in T$, и поэтому

$$\mathcal{F}_f(\mathcal{A}, a, g) \leq \mathcal{F}_f(\tilde{\mu}_t) = \mathcal{F}_f(\mu_t) + \tau^2 \|\mu_t^j - \nu\|^2 -$$
$$- 2\alpha_j \tau [\kappa(\mu_t, \mu_t^j) - \int f\, d\mu_t^j] + 2\alpha_j \tau [\kappa(\mu_t, \nu) - \int f\, d\nu]. \tag{25}$$

В силу соотношения (19) коэффициент при τ^2 в (25) ограничен сверху равномерно по t (пусть числом M_0). Переходя в (25) к пределу по $t \in T$, вследствие (10), (18), сильной (а поэтому и $\mathcal{E}$-слабой) сходимости $(\mu_t)_{t \in T}$ к χ находим неравенство

$$0 \leq M_0 \tau^2 + 2\alpha_j \tau [\kappa(\chi, \nu) - \int f\, d\nu - \eta_j],$$

которое в силу произвольности $\tau \in (0, 1]$ и конечности M_0 противоречит (24).

Полученное противоречие доказывает, что для каждого $\chi \in \mathcal{M}^0$ и для чисел η_i, $i \in I$, определенных равенством (18), выполняется соотношение (15).

Согласно [7] (лемма 5), из условия (9) необходимо следует, что для каждого $i \in I$ $\alpha_i f(x) \neq -\infty$ на подмножестве из A_i ненулевой внутренней емкости. А поскольку $\kappa(x, \chi)$ конечно пр. вс. в $\mathbf{X}$ как потенциал меры с конечной энергией [1], вследствие (15) имеем

$$\alpha_i \eta_i < \infty, \quad i \in I.$$

Следовательно, сумма $\sum_{i \in I} \alpha_i \eta_i$ определена и в силу (10), (12) и (18) удовлетворяет соотношению

$$2 \sum_{i \in I} \alpha_i \eta_i = \lim_{t \in T} [\|\mu_t\|^2 + \mathcal{F}_f(\mu_t)] = \|\chi\|^2 + \mathcal{F}_f(\mathcal{A}, a, g).$$

Это доказывает тождество (16), а также конечность чисел η_i, $i \in I$.

Докажем утверждение единственности. Если η_i', $i \in I$, удовлетворяют (15) и (16), то тогда для каждого $i \in I$

$$\alpha_i a_i [\kappa(x, \chi) - f(x)] \geq \max \{\alpha_i \eta_i, \alpha_i \eta_i'\} g(x) \quad \text{пр. вс. в} \quad A_i. \tag{26}$$

А так как мера μ_t^i имеет конечную энергию, компактный носитель и сосредоточена на A_i, неравенство в (26) выполняется μ_t^i-почти всюду в $\mathbf{X}$. Интегрируя его относительно μ_t^i, а затем суммируя по $i \in I$, получаем

$$\kappa(\mu_t, \chi) - \int f \, d\mu_t \geq \sum_{i \in I} \max \{\alpha_i \eta_i, \alpha_i \eta_i'\}, \quad t \in T.$$

Учитывая соотношения (10), (12) и (16), отсюда находим

$$\|\chi\|^2 + \mathcal{F}_f(\mathcal{A}, a, g) = 2 \lim_{t \in T} [\|\mu_t\|^2 - \int f \, d\mu_t] = 2 \lim_{t \in T} [\kappa(\mu_t, \chi) - \int f \, d\mu_t] \geq$$

$$\geq 2 \sum_{i \in I} \max \{\alpha_i \eta_i, \alpha_i \eta_i'\} \geq 2 \sum_{i \in I} \alpha_i \eta_i = \|\chi\|^2 + \mathcal{F}_f(\mathcal{A}, a, g),$$

и поэтому

$$\sum_{i \in I} \max \{\alpha_i \eta_i, \alpha_i \eta_i'\} = \sum_{i \in I} \alpha_i \eta_i,$$

что возможно только в случае, когда

$$\max \{\alpha_i \eta_i, \alpha_i \eta_i'\} = \alpha_i \eta_i, \quad i \in I. \tag{27}$$

Меняя в проведенных выше рассуждениях η_i и η_i' местами, получаем

$$\max \{\alpha_i \eta_i, \alpha_i \eta_i'\} = \alpha_i \eta_i', \quad i \in I,$$

что вместе с (27) доказывает искомые тождества $\eta_i = \eta_i'$, $i \in I$.

Чтобы доказать соотношение (17), зафиксируем $(\mu_s)_{s \in S} \in \mathbb{M}^0$. Из проведенных выше рассуждений и доказанного утверждения единственности выводим, что все предельные точки направленности $\kappa(\mu_s^i, \mu_s) - \int f \, d\mu_s^i$, $s \in S$ ($i \in I$ фиксировано) равны числу η_i, определенному равенством (18). Следовательно, существует предел

$$\lim_{s \in S} [\kappa(\mu_s^i, \mu_s) - \int f \, d\mu_s^i];$$

он равен η_i и поэтому от выбора $(\mu_s)_{s \in S} \in \mathbb{M}^0$ не зависит.

Теорема 2 доказана.

Следуя [9] (п. 4.7.3), множество в $\mathbf{X}$ будем называть ν-σ-*конечным* (где $\nu \in \mathfrak{M}$ — заданная мера), если оно содержится в счетном объединении ν-интегрируемых множеств.

***Замечание* 2.** Предположим, что A_i, $i \in I$, μ^i-σ-конечны для всех $\mu \in \mathcal{E}(\mathcal{A}, a, g)$. Тогда теорема 2 останется в силе, если в качестве f рассмотреть произвольную универсально измеримую функцию, заданную пр. вс. в $\overline{A}$ (ср. с (8)). Более того, в этом случае теорему 2 можно даже усилить, заменив во всех ее утверждениях и соответствующих определениях класс $\mathcal{E}^0_f(\mathcal{A}, a, g)$ на $\mathcal{E}_f(\mathcal{A}, a, g)$. Упомянутое условие μ^i-σ-конечности множеств A_i, $i \in I$, необходимо выполняется, если либо каждое A_i, $i \in I$, содержится в счетном объединении компактных множеств, либо $g_{\min} > 0$.

Всюду далее $\eta = (\eta_i)_{i\in I}$ — вектор, однозначно определенный теоремой 2. Покажем, что утверждения теоремы 2 являются характеристическими для мер из $\mathcal{M}^0$.

Предложение 1. *Пусть мера $\omega \in \mathcal{E}$ и вектор $\tau = (\tau_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}^p$ удовлетворяют соотношениям*

$$2\sum_{i\in I}\alpha_i\tau_i = \|\omega\|^2 + \mathcal{F}_f(\mathcal{A}, a, g), \tag{28}$$

$$\alpha_i a_i[\kappa(x,\omega) - f(x)] \geq \alpha_i\tau_i g(x) \quad \textit{пр. вс. в} \quad A_i, \quad i \in I. \tag{29}$$

Тогда $\omega \in \mathcal{M}^0(\mathcal{A}, a, g, f)$ *и* $\tau = \eta$.

Доказательство. Зафиксируем $(\mu_s)_{s\in S} \in \mathbb{M}^0(\mathcal{A}, a, g, f)$ и $\chi \in \mathcal{M}^0(\mathcal{A}, a, g, f)$. Интегрируя соотношение (29) относительно μ_s^i, а затем суммируя по $i \in I$, в результате элементарных преобразований получаем

$$\|\omega\|^2 - \|\mu_s - \omega\|^2 + \mathcal{F}_f(\mu_s) \geq 2\sum_{i\in I}\alpha_i\tau_i.$$

Подставляя в правую часть полученного неравенства равенство (28) и переходя к пределу по $s \in S$, вследствие (10) и (12) имеем $\|\chi - \omega\| \leq 0$. Следовательно, $\omega \in \mathcal{M}^0(\mathcal{A}, a, g, f)$. Наконец, соотношение $\tau = \eta$ вытекает из доказанного на основании утверждения единственности из теоремы 2.

Предложение 1 доказано.

6. $\mathcal{A}$-широкая топология. Для данного $\mathcal{A} = (A_i)_{i\in I}$ обозначим $\overline{\mathcal{A}} := (\overline{A_i})_{i\in I}$.

Наряду с широкой топологией, индуцированной из $\mathfrak{M}(\mathbf{X})$, для мер из класса $\mathfrak{M}(\overline{\mathcal{A}})$ удобно использовать так называемую $\mathcal{A}$-широкую топологию, введенную в [15]. Напомним, что направленность $(\mu_s)_{s\in S} \subset \mathfrak{M}(\overline{\mathcal{A}})$ называется сходящейся к $\mu \in \mathfrak{M}(\overline{\mathcal{A}})$ *$\mathcal{A}$-широко*, если

$$\mu_s^i \to \mu^i \quad \text{широко для всех} \quad i \in I.$$

Очевидно, из $\mathcal{A}$-широкой сходимости в $\mathfrak{M}(\overline{\mathcal{A}})$ вытекает широкая сходимость к тому же пределу; обратное утверждение справедливо тогда и только тогда, когда множества $\overline{A_i}$, $i \in I$, попарно не пересекаются [15].

7. Сильные и $\mathcal{A}$-широкие предельные меры минимизирующих направленностей. Пусть $\{\mathcal{K}\} = \{\mathcal{K}\}_{\mathcal{A}}$ — множество всех $\mathcal{K} = (K_i)_{i\in I}$ таких, что K_i, $i \in I$, компактны и $K_i \subset A_i$. Вследствие условия (9) и соотношения [7]

$$\mathcal{F}_f(\mathcal{A}, a, g) = \lim_{\mathcal{K} \in \{\mathcal{K}\}} \mathcal{F}_f(\mathcal{K}, a, g) \tag{30}$$

можно считать величину $\mathcal{F}_f(\mathcal{K}, a, g)$ конечной для всех $\mathcal{K} \in \{\mathcal{K}\}$.

Всюду далее будем предполагать, что $I^- = \varnothing$, а f полунепрерывна сверху на $\overline{A}$. Тогда для каждого $\mathcal{K} \in \{\mathcal{K}\}_{\mathcal{A}}$ существуют [3] (теоремы 2.6 и 2.30) *минимизирующие* в $\mathcal{F}_f(\mathcal{K}, a, g)$-задаче меры $\lambda = \lambda_{\mathcal{K}}$:

$$\lambda \in \mathcal{E}_f(\mathcal{K}, a, g), \qquad \mathcal{F}_f(\lambda) = \mathcal{F}_f(\mathcal{K}, a, g);$$

совокупность всех таких $\lambda_{\mathcal{K}}$ обозначим через $\mathcal{W}(\mathcal{K}, a, g, f)$.

Покажем, что теорему 2 можно существенно уточнить, если ограничиться рассмотрением тех мер $\chi \in \mathcal{M}^0(\mathcal{A}, a, g, f)$, которые являются $\mathcal{A}$-широкими предельными точками направленностей $(\lambda_{\mathcal{K}})_{\mathcal{K} \in \{\mathcal{K}\}}$, $\lambda_{\mathcal{K}} \in \mathcal{W}(\mathcal{K}, a, g, f)$.

Теорема 3. *Пусть $I^- = \varnothing$, f полунепрерывна сверху на $\overline{A}$, а κ согласованно. Тогда для каждой меры $\gamma \in \mathfrak{M}(\overline{\mathcal{A}})$, являющейся одновременно сильной и $\mathcal{A}$-широкой предельной точкой направленности $(\lambda_{\mathcal{K}})_{\mathcal{K} \in \{\mathcal{K}\}}$, $\lambda_{\mathcal{K}} \in \mathcal{W}(\mathcal{K}, a, g, f)$, и всех $i \in I$ справедливы соотношения*

$$a_i[\kappa(x, \gamma) - f(x)] \geq \eta_i g(x) \quad \textit{пр. вс. в} \quad A_i, \tag{31}$$

$$a_i[\kappa(x, \gamma) - f(x)] \leq \eta_i g(x) \quad \textit{для всех} \quad x \in S(\gamma^i), \tag{32}$$

$$a_i[\kappa(x, \gamma) - f(x)] = \eta_i g(x) \quad \textit{пр. вс. в} \quad A_i \cap S(\gamma^i), \tag{33}$$

причем

$$\eta_i = \lim_{\mathcal{K} \in \{\mathcal{K}\}} \left[\kappa(\lambda^i_{\mathcal{K}}, \lambda_{\mathcal{K}}) - \int f \, d\lambda^i_{\mathcal{K}}\right]. \tag{34}$$

Доказательство. Зафиксируем направленность $(\lambda_{\mathcal{K}})_{\mathcal{K} \in \{\mathcal{K}\}}$, $\lambda_{\mathcal{K}} \in \mathcal{W}(\mathcal{K}, a, g, f)$. В силу равенства (30) она является минимизирующей в $\mathcal{F}_f(\mathcal{A}, a, g)$-задаче, и поэтому (см. доказательство теоремы 2) существует мера $\gamma \in \mathfrak{M}(\overline{\mathcal{A}})$, являющаяся одновременно ее сильной и $\mathcal{A}$-широкой предельной точкой. Применяя утверждения (15) и (17) теоремы 2 к направленности $(\lambda_{\mathcal{K}})_{\mathcal{K} \in \{\mathcal{K}\}}$ и мере γ, получаем соотношения (31) и (34).

Зафиксировав $i \in I$ и $x \in S(\gamma^i)$, докажем соотношение (32). Переходя при необходимости к поднаправленности и меняя обозначения, будем считать, что $\lambda^i_{\mathcal{K}} \to \gamma^i$ широко. Тогда найдется сходящаяся к x направленность $(\zeta_{\mathcal{K}})_{\mathcal{K} \in \{\mathcal{K}\}}$ такая, что

$$\zeta_{\mathcal{K}} \in S(\lambda^i_{\mathcal{K}}) \quad \text{для всех} \quad \mathcal{K} \in \{\mathcal{K}\}.$$

В принятых предположениях к мере $\lambda_{\mathcal{K}} \in \mathcal{W}(\mathcal{K}, a, g, f)$ применима теорема 2.29 из [3]; на ее основании получаем

$$a_i[\kappa(y, \lambda_{\mathcal{K}}) - f(y)] \leq \left[\kappa(\lambda^i_{\mathcal{K}}, \lambda_{\mathcal{K}}) - \int f \, d\lambda^i_{\mathcal{K}}\right] g(y) \quad \text{для всех} \quad y \in S(\lambda^i_{\mathcal{K}}). \tag{35}$$

Подставляя $y = \zeta_{\mathcal{K}}$ в неравенство (35), а затем переходя к пределу по $\mathcal{K} \in \{\mathcal{K}\}$, вследствие равенства (34), непрерывности g, полунепрерывности сверху f на $\overline{A}$ и полунепрерывности снизу $\kappa(x, \nu)$ на $\mathbf{X} \times \mathfrak{M}^+(\mathbf{X})$ [1] (лемма 2.2.1) выводим искомое соотношение (32).

Комбинируя соотношения (31) и (32), получаем (33).
Теорема 3 доказана.

Теорема 4. *Пусть* $I^- = \varnothing$, κ *согласованно, а* f *удовлетворяет одному из следующих условий*:

$$f = -\kappa(\cdot, \theta), \quad \text{где} \quad \theta \in \mathcal{E}^+, \tag{36}$$

$$f \in \mathbf{C}_0(\mathbf{X}). \tag{37}$$

Тогда для каждой меры $\gamma \in \mathfrak{M}(\overline{\mathcal{A}})$, *являющейся одновременно сильной и* $\mathcal{A}$-*широкой предельной точкой направленности* $(\lambda_{\mathcal{K}})_{\mathcal{K} \in \{\mathcal{K}\}}$, $\lambda_{\mathcal{K}} \in \mathcal{W}(\mathcal{K}, a, g, f)$, *выполняются соотношения* (31) – (34), *причем*

$$\eta_i = \kappa(\gamma^i, \gamma) - \int f \, d\gamma^i, \quad i \in I. \tag{38}$$

Доказательство. Вследствие теоремы 3 достаточно доказать равенство

$$\lim_{\mathcal{K} \in \{\mathcal{K}\}} \left[\kappa(\lambda^i_{\mathcal{K}}, \lambda_{\mathcal{K}}) - \int f \, d\lambda^i_{\mathcal{K}} \right] = \kappa(\gamma^i, \gamma) - \int f \, d\gamma^i, \quad i \in I. \tag{39}$$

Поскольку в силу (34) предел в левой части искомого равенства существует, можно, не умаляя общности доказательства, считать, что

$$\lambda^i_{\mathcal{K}} \to \gamma^i \quad \text{широко}, \quad i \in I. \tag{40}$$

Напомним, что в принятых предположениях направленности $(\lambda^i_{\mathcal{K}})_{\mathcal{K} \in \{\mathcal{K}\}}$, $i \in I$, сильно ограничены (см. (19)). Поэтому, применяя свойство (CW) (оно выполняется вследствие согласованности ядра [2]), в силу (40) получаем, что

$$\lambda^i_{\mathcal{K}} \to \gamma^i \quad \mathcal{E}\text{-слабо}, \quad i \in I. \tag{41}$$

Очевидно, для каждого $i \in I$ выполняются неравенства

$$\left| \kappa(\lambda^i_{\mathcal{K}}, \lambda_{\mathcal{K}}) - \kappa(\gamma^i, \gamma) \right| \le \left| \kappa(\lambda^i_{\mathcal{K}}, \lambda_{\mathcal{K}} - \gamma) \right| + \left| \kappa(\lambda^i_{\mathcal{K}} - \gamma^i, \gamma) \right| \le$$
$$\le \left\| \lambda^i_{\mathcal{K}} \right\| \left\| \lambda_{\mathcal{K}} - \gamma \right\| + \left| \kappa(\lambda^i_{\mathcal{K}} - \gamma^i, \gamma) \right|.$$

Переходя в них к пределу по $\mathcal{K} \in \{\mathcal{K}\}$ и учитывая при этом сильную ограниченность направленности $(\lambda^i_{\mathcal{K}})_{\mathcal{K} \in \{\mathcal{K}\}}$, сильную сходимость $(\lambda_{\mathcal{K}})_{\mathcal{K} \in \{\mathcal{K}\}}$ к γ и соотношение (41), находим

$$\lim_{\mathcal{K} \in \{\mathcal{K}\}} \kappa(\lambda^i_{\mathcal{K}}, \lambda_{\mathcal{K}}) = \kappa(\gamma^i, \gamma). \tag{42}$$

Следовательно, существуют пределы $\lim\limits_{\mathcal{K} \in \{\mathcal{K}\}} \int f \, d\lambda^i_{\mathcal{K}}$, $i \in I$, причем вследствие (40) и полунепрерывности сверху функции f выполняется

$$\lim_{\mathcal{K} \in \{\mathcal{K}\}} \int f \, d\lambda^i_{\mathcal{K}} \le \int f \, d\gamma^i, \quad i \in I. \tag{43}$$

С другой стороны, из условия (36) или (37) и соответственно $\mathcal{E}$-слабой или широкой сходимости $(\lambda_{\mathcal{K}})_{\mathcal{K} \in \{\mathcal{K}\}}$ к γ имеем

$$\sum_{i \in I} \int f \, d\gamma^i = \int f \, d\gamma = \lim_{\mathcal{K} \in \{\mathcal{K}\}} \int f \, d\lambda_{\mathcal{K}} = \sum_{i \in I} \lim_{\mathcal{K} \in \{\mathcal{K}\}} \int f \, d\lambda^i_{\mathcal{K}},$$

что возможно только в случае, когда во всех неравенствах (43) имеет место знак равенства.

Комбинируя полученное утверждение с равенством (42), выводим соотношение (39), а поэтому и (38).

Теорема 4 доказана.

8. Достаточные условия разрешимости вариационной задачи Гаусса. Применим полученные в п. 7 описания предельных мер минимизирующих направленностей к исследованию проблемы разрешимости $\mathcal{F}_f(\mathcal{A}, a, g)$-задачи (ср. с [3, 5, 7]).

Теорема 5. *Пусть* $I^- = \varnothing$, *множества* A_i, $i \in I$, *замкнуты, ядро* κ *согласованно, а функция* f *удовлетворяет одному из условий* (36), (37). *Если, кроме того,*

$$\inf_{\nu \in \mathcal{E}^+(A_i, a_i, g)} \left[\|\nu\|^2 + \mathcal{F}_f(\nu)\right] > 0 \quad \text{для всех} \quad i \in I, \tag{44}$$

то $\mathcal{F}_f(\mathcal{A}, a, g)$*-задача разрешима.*

Доказательство. В силу теорем 2.6 и 2.30 из [3] можно, не ограничивая общности доказательства, считать пространство $\mathbf{X}$ некомпактным; тогда ядро κ неотрицательно.

Зафиксируем меру $\gamma \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$, являющуюся сильной и $\mathcal{A}$-широкой предельной точкой направленности $(\lambda_{\mathcal{K}})_{\mathcal{K} \in \{\mathcal{K}\}}$, $\lambda_{\mathcal{K}} \in \mathcal{W}(\mathcal{K}, a, g, f)$, и покажем, что в принятых условиях она является решением $\mathcal{F}_f(\mathcal{A}, a, g)$-задачи:

$$\gamma \in \mathcal{W}(\mathcal{A}, a, g, f). \tag{45}$$

Вследствие (16) и (38) выполняется

$$\|\gamma\|^2 + \mathcal{F}_f(\gamma) = \sum_{i \in I} 2\left[\kappa(\gamma^i, \gamma) - \int f\, d\gamma^i\right] = 2\sum_{i \in I} \eta_i = \|\gamma\|^2 + \mathcal{F}_f(\mathcal{A}, a, g),$$

и поэтому доказательство соотношения (45) сводится к доказательству соотношений

$$\int g\, d\gamma^i = a_i, \quad i \in I. \tag{46}$$

Используя соотношение (34) и условие $\kappa \geq 0$, находим

$$2\eta_i = \lim_{\mathcal{K} \in \{\mathcal{K}\}} 2\left[\kappa(\lambda^i_{\mathcal{K}}, \lambda_{\mathcal{K}}) - \int f\, d\lambda^i_{\mathcal{K}}\right] \geq \inf_{\mathcal{K} \in \{\mathcal{K}\}} \left[\left\|\lambda^i_{\mathcal{K}}\right\|^2 + \mathcal{F}_f(\lambda^i_{\mathcal{K}})\right].$$

А так как $\lambda^i_{\mathcal{K}} \in \mathcal{E}^+(A_i, a_i, g)$, отсюда вследствие условия (44) получаем

$$\eta_i > 0, \quad i \in I. \tag{47}$$

Интегрируя неравенство (32) относительно меры γ^i, в силу соотношения (38) находим

$$a_i \eta_i = a_i\left[\kappa(\gamma^i, \gamma) - \int f\, d\gamma^i\right] \leq \eta_i \int g\, d\gamma^i, \quad i \in I. \tag{48}$$

С другой стороны, вследствие широкой полунепрерывности снизу $\int g\, d\nu$ на $\mathfrak{M}^+(\mathbf{X})$ имеем

$$\int g\, d\gamma^i \leq \liminf_{\mathcal{K} \in \{\mathcal{K}\}} \int g\, d\lambda^i_{\mathcal{K}} = a_i, \quad i \in I,$$

что вместе с (47) и (48) доказывает искомые равенства (46).

Теорема 5 доказана.

***Следствие* 1.** *Пусть* $I^- = \varnothing$, *множества* A_i, $i \in I$, *замкнуты, ядро* κ *согласованно, функция* g *ограничена сверху, а* $f = -\kappa(\cdot, \theta)$, *где* $\theta \in \mathcal{E}^+$ *и*

$$\inf_{x \in A} \kappa(x, \theta) > 0. \tag{49}$$

Тогда $\mathcal{F}_f(\mathcal{A}, a, g)$*-задача разрешима для любого вектора* a.

Доказательство. Действительно, в соответствии с теоремой 5 достаточно доказать неравенство (44), а оно очевидно выполняется в силу условия (49) и соотношения

$$\nu(\mathbf{X}) \geq a_i [\sup_{x \in A} g(x)]^{-1} > 0, \quad \nu \in \mathcal{E}^+(A_i, a_i, g), \quad i \in I,$$

которое в свою очередь вытекает из ограниченности сверху функции g.

1. *Fuglede B.* On the theory of potentials in locally compact spaces // Acta Math. – 1960. – **103**, № 3 – 4. – P. 139 – 215.
2. *Fuglede B.* Caractérisation des noyaux consistants en théorie du potentiel // Comptes Rendus. – 1962. – **255**. – P. 241 – 243.
3. *Ohtsuka M.* On potentials in locally compact spaces // J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A 1. – 1961. – **25**, № 2. – P. 135 – 352.
4. *Saff E. B., Totik V.* Logarithmic potentials with external fields. — Berlin: Springer, 1997. – 505 p.
5. *Zorii N.* On the solvability of the Gauss variational problem // Comput. Methods and Funct. Theory. – 2002. – **2**, № 2. – P. 427 – 448.
6. *Зорий Н. В.* Равновесные потенциалы с внешними полями // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 9. – С. 1178 – 1195.
7. *Зорий Н. В.* Задачи равновесия для потенциалов с внешними полями // Там же. – № 10. – С. 1315 – 1339.
8. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Меры, интегрирование мер. – М.: Наука, 1967. – 396 с.
9. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. Теория и приложения. – М.: Мир, 1969. – 1071 с.
10. *Зорий Н. В.* Экстремальные задачи теории емкостей конденсаторов в локально компактных пространствах. I // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 2. – С. 168 – 189.
11. *Cartan H.* Théorie du potentiel newtonien: énergie, capacité, suites de potentiels // Bull. Soc. math. France. – 1945. – **73**. – P. 74 – 106.
12. *Deny J.* Les potentiels d'énergie finie // Acta Math. – 1950. – **82**. – P. 107 – 183.
13. *Deny J.* Sur la définition de l'énergie en théorie du potentiel // Ann. Inst. Fourier. – 1950. – **2**. – P. 83 – 99.
14. *Ландкоф Н. С.* Основы современной теории потенциала. – М.: Наука, 1966. – 515 с.
15. *Зорий Н. В.* Экстремальные задачи теории емкостей конденсаторов в локально компактных пространствах. II // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 4. – С. 466 – 488.
16. *Бурбаки Н.* Общая топология. Основные структуры. – М.: Наука, 1968. – 272 с.
17. *Зорий Н. В.* Экстремальная задача о минимуме энергии для пространственных конденсаторов // Укр. мат. журн. – 1986. – **38**, № 4. – С. 431 – 437.
18. *Зорий Н. В.* Задача о минимуме энергии для пространственных конденсаторов и ядер Рисса // Там же. – 1989. – **41**, № 1. – С. 34 – 41.
19. *Зорий Н. В.* Одна вариационная задача теории гринова потенциала. I; II // Там же. – 1990. – **42**, № 4. – С. 494 – 500; № 11. – С. 1475 – 1480.
20. *Зорий Н. В.* Одна некомпактная вариационная задача теории риссова потенциала. I; II // Там же. – 1995. – **47**, № 10. – С. 1350 – 1360; 1996. – **48**, № 5. – С. 603 – 613.

Получено 24.10.2003