УДК 517.986

З. А. Каблучко (Геттинген. ун-т, Германия),
Д. П. Проскурин (Киев. нац. ун-т им. Т. Шевченко),
Ю. С. Самойленко (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ПРО C^*-АЛГЕБРЫ, ПОРОЖДЕННЫЕ ДЕФОРМАЦИЯМИ CCR

We consider C^*-algebras generated by deformations of classical commutation relations (CCR). These algebras are generalizations of commutation relations for generalized quons and twisted CCR. We show that the Fock representation is a universal bounded representation. We discuss the relation of the considered deformations with extensions of many-dimensional noncommutative tori.

Розглядаються C^*-алгебри, породжені деформаціями класичних комутаційних співвідношень, які є узагальненнями комутаційних співвідношень для узагальнених куонів та скручених комутаційних співвідношень. Показано, що фоківське зображення є універсальним обмеженим зображенням. Обговорюється зв'язок поданих деформацій із розширеннями багатовимірних некомутативних торів.

Введение. В данной работе изучаются C^*-алгебры, связанные с широким классом деформированных коммутационных соотношений, исследуется структура, а также устойчивость классов изоморфизмов этих алгебр в зависимости от параметров деформации. Особое внимание уделяется фоковскому представлению; одним из основных результатов является точность фоковского представления. Иными словами, для представленного ниже класса C^*-алгебр фоковское представление является универсальным представлением Гельфанда – Наймарка. Некоторые результаты данной работы были анонсированы (без доказательств) на международной конференции „Symmetry-2001", проходившей в Киеве летом 2001 года.

Предметом исследования в настоящей работе является семейство C^*-алгебр $\mathcal{A}_{\bar{k},\Theta}$, порожденных набором частичных изометрий s_i, $i=1,\ldots,d$, удовлетворяющих коммутационным соотношениям

$$\begin{gathered} s_i^* s_i = 1 - \sum_{j<i:\, k_j \geq i} s_j s_j^*, \quad i = 1, \ldots, d, \\ s_i^* s_j = 0, \quad s_j s_i = 0, \quad i<j, \quad k_i \geq j, \\ s_i^* s_j = \lambda_{ij} s_j s_i^*, \quad s_j s_i = \lambda_{ij} s_i s_j, \quad i<j, \quad k_i<j, \end{gathered} \tag{1}$$

где

$$\lambda_{ij} = e^{2\pi\theta_{ij}}, \quad \theta_{ij} = -\theta_{ji} \in \mathbb{R}, \quad i \neq j,$$

и вектор $\bar{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_{d-1}) \in \mathbb{N}^{d-1}$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $d \geq k_i \geq i$;

2) если $j<i$ и $i \leq k_j$, то $k_i \leq k_j$.

Как будет показано ниже, эти C^*-алгебры являются универсальными обертывающими C^*-алгебрами для класса деформаций CCR, обобщающих скрученные CCR В. Пуша и С. Л. Вороновича и коммутационные соотношения для обобщенных куонов (подробнее см. [1 – 5]). А именно, рассмотрим $*$-алгебру, порожденную образующими $\{a_i, a_i^*, i=1,\ldots,d\}$ и определяющими соотношениями вида (GCCR)

$$a_i^* a_i = 1 + \alpha_i a_i a_i^* - \sum_{j<i;\, k_j \ge i} (1-\alpha_j) a_j a_j^*, \quad 0 < \alpha_i < 1,$$

$$a_i^* a_j = \lambda_{ij} \alpha_i^{1/2} a_j a_i^*, \quad a_j a_i = \lambda_{ij} \alpha_i^{1/2} a_i a_j, \quad i < j, \quad k_i \ge j, \tag{2}$$

$$a_i^* a_j = \lambda_{ij} a_j a_i^*, \quad a_j a_i = \lambda_{ij} a_i a_j, \quad i < j, \quad k_i < j.$$

***Пример* 1.** Если $\bar{k} = (d, \ldots, d)$, $\alpha_i = \mu^2$, $i = 1, \ldots, d$, и $\lambda_{ij} = 1$, $i \ne j$, то мы получим скрученные коммутационные соотношения (TCCR), которые были введены и изучены В. Пушем и С. Л. Вороновичем (см. [5]):

$$a_i^* a_i = 1 + \mu^2 a_i a_i^* - \left(1 - \mu^2\right) \sum_{j<i} a_j a_j^*,$$

$$a_i^* a_j = \mu a_j a_i^*, \quad a_j a_i = \mu a_i a_j, \quad i < j, \quad 0 \le \mu < 1.$$

Отметим, что эта $*$-алгебра также является примером алгебры функций на квантовом матричном шаре [6].

***Пример* 2.** Если положить $\bar{k} = (1, 2, \ldots, d-1)$, то получим соотношения

$$a_i^* a_i = 1 + \alpha_i a_i a_i^*, \quad a_i^* a_j = \lambda_{ij} a_j a_i^*, \quad a_j a_i = \lambda_{ij} a_j a_i, \quad i < j,$$

т. е. коммутационные соотношения для обобщенных куонов, предложенные В. Марчинеком [3], которые в свою очередь являются частным случаем q_{ij}-CCR, построенных и изучавшихся М. Божейко и Р. Шпайхером с точки зрения некоммутативной теории вероятностей (см. [1, 2] и приведенную в них библиографию).

Напомним определение универсальной обертывающей C^*-алгебры $\mathcal{A}$ для $*$-алгебры A.

Определение 1. *Пусть дана $*$-алгебра A. Обертывающей C^*-алгеброй называется C^*-алгебра $\mathcal{A}$, имеющая следующее универсальное свойство: существует гомоморфизм*

$$\phi : A \to \mathcal{A}$$

такой, что для любого гомоморфизма $\pi : A \to \mathcal{B}$, где $\mathcal{B}$ — некоторая C^*-алгебра, найдется единственный гомоморфизм $\psi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, для которого выполнено равенство

$$\pi = \psi\phi.$$

Напомним также, что необходимыми и достаточными условиями для существования обертывающей C^*-алгебры являются непустота и равномерная ограниченность множества ограниченных представлений соответствующей $*$-алгебры.

Обозначим через $\mathcal{A}_{\bar{k},\bar{\alpha},\Theta}$ обертывающую C^*-алгебру для GCCR. Существование следует из описания ограниченных представлений GCCR [4]. Мы утверждаем, что $\mathcal{A}_{\bar{k},\bar{\alpha},\Theta} \simeq \mathcal{A}_{\bar{k},\{0\},\Theta} := \mathcal{A}_{\bar{k},\Theta}$ при любых $\{\alpha_i,\ 0 < \alpha_i < 1\}$. Для приведенных выше примеров получим следующие результаты:

C^*-алгебра $\mathcal{B}_\mu$, порожденная TCCR, изоморфна

$$\mathcal{B}_0 = C^* \left\langle s_i \,\middle|\, s_i^* s_j = \sigma_{ij} \left(1 - \sum_{j<i} s_j s_j \right),\ s_i s_j = 0,\ i > j \right\rangle;$$

для C^*-алгебры, порожденной обобщенными куонами, имеем изоморфизм $\mathcal{A}_{\bar{\alpha},\Theta} \simeq \mathcal{A}_{0,\Theta}$, где

$$\mathcal{A}_{0,\Theta} = C^*\left\langle s_i \,\middle|\, s_i^* s_i = 1,\ s_i^* s_j = \lambda_{ij} s_j s_i^*,\ s_j s_i = \lambda_{ij} s_i s_j,\ i < j \right\rangle.$$

Легко видеть, что эта C^*-алгебра является расширением многомерного некоммутативного тора A_Θ [7].

Ниже мы приведем схему доказательства изоморфизма $\mathcal{A}_{\bar{k},\bar{\alpha},\Theta} \simeq \mathcal{A}_{\bar{k},\Theta}$. Для этого напомним некоторые свойства C^*-алгебры, порожденной одномерными q-CCR. А именно, нам потребуется следующее утверждение [8].

Утверждение 1. *Пусть B — унитальная C^*-алгебра, порожденная образующими a, a^* и определяющим соотношением*

$$a^* a = 1 + q a a^*, \quad -1 < q < 1.$$

Рассмотрим полярное разложение $a^* = S^* C$. Тогда $S \in B$, $B = C^*(S, S^*)$ и

$$a = \left(\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} S^n S^{*n} \right)^{\frac{1}{2}} S.$$

Сформулируем теперь основной результат этого пункта.

Теорема 1. *C^*-алгебра $\mathcal{A}_{\bar{k},\bar{\alpha},\Theta}$ изоморфна $\mathcal{A}_{\bar{k},\Theta}$ при любых значениях параметров α_i, $0 < \alpha_i < 1$, $i = 1, \ldots, d$.*

Доказательство. Рассмотрим полярные разложения образующих

$$a_i^* = s_i^* c_i, \quad i = 1, \ldots, d.$$

Ниже мы будем использовать обозначение $k(i) := k_i$ для любых $i = 1, \ldots, d-1$. Рассмотрим множество чисел

$$\mathcal{S} = \left\{ 1,\ l_1 = k(1) + 1,\ l_2 = k(l_1) + 1, \ldots,\ l_{n+1} = k(l_n) + 1 \right\},$$

где n — наибольшее натуральное число, для которого $k(l_n) + 1 \le d$. Поскольку соотношения для образующих a_i, $i \in \mathcal{S}$, имеют вид

$$a_i^* a_i = 1 + \alpha_i a_i a_i^*,$$

можно заменить эти образующие изометриями s_i. Далее, для a_i при $1 < i \le k_1$ построим семейство частичных изометрий

$$\hat{s}_1 = s_1, \qquad \hat{s}_2 = \left(1 - s_1 s_1^*\right) s_2, \qquad \hat{s}_i = \left(1 - \sum_{j < i \le k_j} \hat{s}_j \hat{s}_j^*\right) s_i.$$

Аналогично построим частичные изометрии $\hat{s}_i$, $i = j+1, \ldots, k_j$, для всех $j \in \mathcal{S}$. Можно показать, что семейство $\{\hat{s}_i,\ i = 1, \ldots, d\}$ порождает $C^*(a_i, i = 1, \ldots, d) = \mathcal{A}_{\bar{k},\bar{\alpha},\Theta}$ и удовлетворяет коммутационным соотношениям (1). Более того, по любому семейству частичных изометрий $\{T_i,\ i = 1, \ldots, d\}$, удовлетворяющих (1), можно построить семейство $\mathbf{A} = \{\hat{a}_i,\ i = 1, \ldots, d\} \subset C^*\{T_i, i = 1, \ldots, d\}$, удовлетворяющее (2), такое, что $\hat{s}_i(\mathbf{A}) = T_i$, $i = 1, \ldots, d$. Из изложенного следует, что $\mathcal{A}_{\bar{k},\bar{\alpha},\Theta}$ изоморфна $\mathcal{A}_{\bar{k},\Theta}$.

Напомним, что фоковским представлением GCCR называется единственное неприводимое представление, определенное циклическим вектором Ω и условиями $a_i^*\Omega = 0$, $i = 1, \dots, d$. Поскольку $a_i^*\Omega = 0$, если и только если $\hat{s}_i^*\Omega = 0$, $i = 1, \dots, d$, фоковское представление $\mathcal{A}_{\bar{k},\bar{\alpha},\Theta}$ совпадает с фоковским представлением $\mathcal{A}_{\bar{k},\Theta}$ (подробнее см. [7, 9]).

1. Неприводимые представления $\mathcal{A}_{\bar{k},\Theta}$. В этом пункте мы дадим описание неприводимых $*$-представлений $\mathcal{A}_{\bar{k},\Theta}$. Описание представлений GCCR приведено в работе [4]. Для удобства читателя ниже изложены основные идеи построения этого описания.

В дальнейшем будем использовать некоторые дополнительные обозначения. А именно, зафиксируем подмножество $\Phi \subset \{1, \dots, d\}$ вида

$$\Phi = \left\{ i_1, \dots, i_l \,\middle|\, i_{j+1} > k_{i_j},\ j = 1, \dots, l-1 \right\}.$$

Обозначим $\Sigma = \bigcup_{j \in \Phi} [j+1, k_j]$, где $[j+1, k_j] := \varnothing$, если $j + 1 > k_j$, и построим семейство операторов

$$S_i = 0, \quad i \in \Sigma,$$

$$S_i = \bigotimes_{j<i,\, j \notin \Sigma} U_{ji} \otimes S \bigotimes_{j>i,\, j \notin \Sigma} 1, \quad i \notin \Phi, \tag{3}$$

$$S_i = \bigotimes_{j<i,\, j \notin \Sigma} U_{ji} \otimes \bigotimes_{j>i,\, j \notin \Sigma} U_{ji} \otimes \hat{U}_i, \quad i \in \Phi.$$

Здесь S — односторонний сдвиг в $l_2(\mathbb{N})$,

$$U_{ji} = \left(1 - SS^*\right), \quad j < i \le k_j, \qquad U_{ji} e_n = \lambda_{ji}^{n-1} e_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad j < i, \quad k_j < i,$$

а набор унитарных операторов $\left\{ \hat{U}_i,\ i \in \Phi \right\}$ является неприводимым и удовлетворяет соотношениям

$$\hat{U}_i \hat{U}_j = \lambda_{ij} \hat{U}_j \hat{U}_i, \quad i \ne j.$$

Утверждение 2. *Для любого неприводимого представления π рассматриваемой C^*-алгебры $\mathcal{A}_{\bar{k},\Theta}$ найдутся подмножество Φ и набор унитарных операторов, введенные выше, такие, что $\pi(s_i) = S_i$, где $\{S_i\}$ определяются формулами* (3).

Доказательство. Для удобства обозначим $\pi(s_i) = S_i$. Предположим, что S_1 является чистой изометрией, т. е. $\ker S_1^* \ne \{0\}$. Обозначим через $\mathcal{H}$ пространство представления и $\mathcal{K} := \ker S_1^*$. Известно, что $S_1^n \mathcal{K} \perp S_1^m \mathcal{K}$, $n \ne m$, и, очевидно,

$$S_1 \colon S_1^n \mathcal{K} \to S_1^{n+1} \mathcal{K}, \quad n \ge 0,$$

$$S_1^* \colon S_1^n \mathcal{K} \to S_1^{n-1} \mathcal{K}, \quad n > 0.$$

Кроме того, из соотношений (1) следует, что

$$S_i, \quad S_i^* \colon S_1^n \mathcal{K} \to S_1^n \mathcal{K}, \quad i > 1, \quad n \ge 0.$$

В частности, для $i \le k_1$ имеем S_i, $S_i^* \colon S_1^n \mathcal{K} \to \{0\}$, $n \ge 1$. Тогда в силу неприводимости получим

$$\mathcal{H} = \otimes_{n \ge 0} S_1^n \mathcal{K} = l_2(\mathbb{Z}_+) \otimes \mathcal{K}.$$

Обозначим через $S_i^{(n)}$, $i \geq k_1$, $n \geq 0$, ограничение S_i на подпространство $S_1^n \mathcal{K}$. Отождествим $S_1^n \mathcal{K}$ с $e_n \otimes \mathcal{K}$, $n \geq 0$, тогда действие S_1 примет вид

$$S_1 = S \otimes 1, \quad Se_n = e_{n+1}, \quad n \geq 0.$$

Поскольку $S_i \colon e_n \otimes \mathcal{K} \to e_n \otimes \mathcal{K}$, можно предположить, что $S_i^{(n)} \colon \mathcal{K} \to \mathcal{K}$, $n \geq 0$. Тогда для любого $x \in \mathcal{K}$ получим

$$S_i S_1 e_n \otimes x = S_i e_{n+1} \otimes x = e_{n+1} \otimes S_i^{(n+1)} x,$$

$$S_1 S_i e_n \otimes x = S_1 e_n \otimes S_i^{(n)} x = e_{n+1} \otimes S_i^{(n)} x, \quad i > k_1.$$

Таким образом, из (1) следует $S_i^{(n+1)} = e^{2\pi\theta_{1i}} \otimes S_i^{(n)}$ и

$$S_i^{(n)} = e^{2\pi i \theta_{1i} n} S_i^{(0)}, \quad i > k_1.$$

Положим $S_i^{(0)} := \hat{S}_i$, $i > k_1$. Тогда

$$S_i = d\left(e^{2\pi i \theta_{1i}}\right) \otimes \hat{S}_i,$$

где $d(\lambda)$ обозначает оператор на $l_2(\mathbb{Z}_+)$, определенный по правилу

$$d(\lambda) e_n = \lambda^n e_n, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

При $1 < i \leq k_1$ имеем

$$S_i x = 0, \quad x \in S_1^n \mathcal{K}, \quad n \geq 1.$$

Следовательно, $S_i = \left(1 - SS^*\right) \otimes \hat{S}_i$, $i \leq k_1$. Очевидно, что $\hat{S}_i$, $i \geq 2$, являются частичными изометриями и удовлетворяют соотношениям (1), соответствующим $\vec{k} = \left(k_2, \ldots, k_{d-1}\right)$. Кроме того, семейство операторов $\{S_i,\ i = 1, \ldots, d\}$ неприводимо, если и только если $\left\{\hat{S}_i,\ i = 2, \ldots, d\right\}$ неприводимо.

Пусть теперь $\ker S_1^* = \{0\}$, т. е. $S_1 = U_1$ является унитарным оператором. Тогда из $S_i U_1 = 0$, $1 < i \leq k_1$, следует $S_i = 0$, $1 < i \leq k_1$. Положим далее $i = k_1 + 1$ и предположим, что $\ker S_i^* \neq \{0\}$. Тогда, применяя рассуждения из предыдущего абзаца, получаем

$$S_1 = d(\lambda_{i1}) \otimes U_1, \quad S_j = 0, \quad 1 < j \leq k_1,$$

$$S_i = S \otimes 1, \quad S_l = \left(1 - SS^*\right) \otimes \hat{S}_l, \quad i < l \leq k_i,$$

$$S_l = d(\lambda_{il}) \otimes \hat{S}_l, \quad k_i < l \leq d.$$

В противном случае $S_i = U_i$ — унитарный оператор, $S_l = 0$, $i < l \leq k_i$, и так далее.

Для завершения доказательства остается лишь отметить, что с помощью Φ мы задаем те операторы S_i, которые в ходе данного алгоритма определяются с помощью унитарных операторов.

Утверждение 2 доказано.

***Замечание* 1.** Фоковское представление является единственным неприводимым представлением, соответствующим $\Phi = \varnothing$. Представления π_1, π_2, соответствующие $\Phi_1 \neq \Phi_2$ либо неэквивалентным наборам $\left\{\hat{U}_i^{(j)},\ i \in \Phi_j\right\}$, $j = 1, 2$, не эквивалентны.

***Пример* 3.** Фоковское представление C^*-алгебры, порожденной обобщенными куонными соотношениями, имеет вид

$$\pi_F(s_i) = \bigotimes_{k<i} d\left(e^{2\pi i\theta_{ki}}\right) \otimes S \otimes \bigotimes_{k>i} 1, \quad i=1,\ldots,d.$$

***Пример* 4.** Для фоковского представления $\mathcal{B}_0$ получаем

$$\pi_F(s_i) = \bigotimes_{j<i} \left(1 - SS^*\right) \otimes S \otimes \bigotimes_{j>i} 1, \quad i=1,\ldots,d.$$

2. Фоковское представление $\mathcal{A}_{\bar{k},\Theta}$. В этом пункте мы покажем, что если $\{\lambda_{ij}\}$ — корни из единицы либо „иррациональны", то фоковское представление π_F алгебры $\mathcal{A}_{\bar{k},\Theta}$ является точным. Это означает, что $\ker\pi_F = \{0\}$ и $\mathcal{A}_{\bar{k},\Theta} \simeq \simeq \mathcal{F}$, где $\mathcal{F}$ обозначает C^*-алгебру, порожденную операторами фоковского представления. Набор $\left\{\lambda_{ij},\ \lambda_{ij} = e^{2i\pi\theta_{ij}},\ i,j=1,\ldots,d\right\}$ называется иррациональным, если элементы хотя бы одного столбца (строки) матрицы Θ и 1 являются линейно независимыми над $\mathbb{Q}$.

Следующий результат [10] является основным для доказательства точности в рациональном случае, т. е. когда все $\theta_{ij} \in \mathbb{Q}$.

Теорема 2. *Пусть* $\left\{\lambda_{ij} = e^{2\pi\theta_{ij}},\ i,j=1,\ldots,d,\ i\neq j\right\} \subset \mathbb{C}$ *являются корнями из единицы. Рассмотрим семейство изометрий, действующих в* $l_2(\mathbb{Z}_+)^{\otimes d}$:

$$S_i = \bigotimes_{k<i} d\left(e^{2\pi i\theta_{ki}}\right) \otimes S \otimes \bigotimes_{k>i} 1, \quad i=1,\ldots,d.$$

Пусть $\{U_i,\ i=1,\ldots,d\}$ — *произвольное неприводимое семейство унитарных операторов, удовлетворяющих коммутационным соотношениям* $U_iU_j = = \lambda_{ji}U_jU_i$, $i\neq j$. *Тогда существует гомоморфизм*

$$\Delta\colon \mathcal{F} = C^*(S_i,\ i=1,\ldots,d) \to C^*\{U_i,\ i=1,\ldots,d\},$$

определенный равенствами $\Delta(S_i) = U_i$, $i=1,\ldots,d$.

Доказательство. Пусть $\lambda\in\mathbb{C}$, $\lambda^n = 1$, такое, что $e^{2\pi i\theta_{jk}} = \lambda^{n_{jk}} := \lambda_{jk}$, $j\neq k$, для некоторых натуральных n_{jk}. Рассмотрим конечную группу

$$G = \left\langle z,\ u_1,\ldots,u_d \,\middle|\, z^n = u_i^n = e,\ u_ju_k = z^{n_{kj}}u_ku_j,\ zu_i = u_iz \right\rangle.$$

Поскольку π неприводимо и U_i^n коммутирует со всеми U_j, $j=1,\ldots,d$, имеем $U_i^n = \mu_i 1$ для некоторого μ_i, $|\mu_i| = 1$. Тогда операторы $\hat{U}_i = \tilde{\mu}_i^{-1}U_i$, $\tilde{\mu}^n = \mu$, определяют неприводимое представление группы G, которое также будем обозначать через π, такое, что $\pi(z) = \lambda 1$.

Построим теперь специальное конечномерное представление $\tilde{\pi}$ группы G, действующее на пространстве $\left(\mathbb{C}^n\right)^{\otimes d}$ с базисом $e_{i_1}\otimes\ldots\otimes e_{i_d}$, $1\le i_j\le n$:

$$\tilde{\pi}(u_1) = U \otimes \bigotimes_{1<j\le d} 1,$$

$$\tilde{\pi}(u_k) = \bigotimes_{j<k} D(\lambda_{jk}) \otimes U \otimes \bigotimes_{j=k+1}^{d} 1, \quad 1<k\le d,$$

$$\tilde{\pi}(z) = \lambda 1,$$

где $Ue_j = e_{j+1}$, $j < n$, $Ue_n = e_1$ и $D(\lambda_{jk})e_i = \lambda_{jk}^{i-1}e_i$, $i = 1, \ldots, n$. Мы покажем, что $\tilde{\pi}$ содержит π в качестве прямого слагаемого. Для этого найдем характер $\tilde{\pi}$. Легко видеть, что любой $g \in G$ можно однозначно представить в виде

$$g = z^k u_1^{k_1} \ldots u_d^{k_d}, \quad 0 \le k, \quad k_i \le n-1, \quad i = 1, \ldots, d.$$

Тогда

$$\tilde{\pi}(g) e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_d} = \mu(g, \bar{i}) e_{i_1+k_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_d+k_d},$$

где $\mu(g, \bar{i}) \in \mathbb{C}$ — некоторый коэффициент и сложение в $\mathbb{Z}_n$. Отсюда следует

$$\chi_{\tilde{\pi}}(z^k) = n^d \lambda^k, \quad \chi_{\tilde{\pi}}(g) = 0.$$

Следовательно, для характера χ_π получаем

$$\langle \chi_{\tilde{\pi}}, \chi_\pi \rangle = \frac{1}{n^{d+1}} \sum_{i=0}^{n-1} n^d m = m > 0,$$

где m — размерность представления π. Следовательно, π является прямым слагаемым представления $\tilde{\pi}$ с кратностью m. Очевидно, что существует гомоморфизм ψ из C^*-алгебры $C_{\tilde{\pi}}$, порожденной операторами представления $\tilde{\pi}$ на C^*-алгебру C_π, заданный по правилу $\psi(\tilde{\pi}(u_i)) = \hat{U}_i$. Для завершения доказательства осталось построить гомоморфизм

$$\nu\colon \mathcal{F} \to C_{\tilde{\pi}}$$

такой, что $\nu(\pi_F(s_i)) = \tilde{\mu}_i^{-1} \tilde{\pi}(u_i)$. Рассмотрим унитарный оператор

$$V = d(\tilde{\mu}_1) \otimes d(\tilde{\mu}_2) \otimes \ldots \otimes d(\tilde{\mu}_d).$$

Тогда $V^* \pi_F(s_i) V = \tilde{\mu}_i^{-1} \pi_F(s_i)$, $i = 1, \ldots, d$. Таким образом, достаточно построить

$$\tilde{\nu}\colon \mathcal{F} \to C_{\tilde{\pi}}$$

со свойством $\tilde{\nu}(\pi_F(s_i)) = \tilde{\pi}(u_i)$, $i = 1, \ldots, d$ (тогда $\nu = \tilde{\nu} Ad(V)$).

Напомним, что

$$\pi_F(s_i) = \bigotimes_{k=i}^{i-1} d(\lambda_{ki}) \otimes S \otimes \bigotimes_{k=i+1}^{d} 1, \quad i = 1, \ldots, d.$$

Докажем существование гомоморфизма

$$\varphi_i\colon C^*\big(S, d(\lambda_{ij}),\ j > i\big) := A_i \to C^*\big(U, D(\lambda_{ij}),\ j > i\big) := B_i,$$

заданного по правилу $\varphi_i(S) = U$, $\varphi_i\big(d(\lambda_{ij})\big) = D(\lambda_{ij})$. Для этого рассмотрим разложение в ортогональную сумму подпространств

$$l_2(\mathbb{Z}_+) = \bigotimes_{k=0}^{n-1} \mathcal{H}_k \simeq \mathbb{C}^n \otimes l_2(\mathbb{Z}_+).$$

Здесь $\mathcal{H}_k = \overline{\langle e_{nm+k}, m \in \mathbb{Z}_+ \rangle} \simeq l_2(\mathbb{Z}_+)$. В соответствии с этим разложением

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & S \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

и $d(\lambda_{ij}) = D(\lambda_{ij}) \otimes 1$. Отождествим A_i с C^*-подалгеброй в алгебре $M_n(\mathbb{C}) \otimes \otimes C^*(S) \simeq M_n\big(C^*(S)\big)$ и построим гомоморфизм

$$\eta\colon M_n\big(C^*(S)\big) \to M_n(\mathbb{C}),$$

заданный равенством $\eta(S) = 1$. Пусть φ_i является ограничением этого гомоморфизма на C^*-подалгебру $A_i \subset M_n\big(C^*(S)\big)$. Очевидно,

$$\varphi_i(S) = U, \qquad \varphi_i\big(d(\lambda_{ij})\big) = D(\lambda_{ij}), \quad j > i,$$

и $\varphi_i(A_i) = B_i$. В завершение заметим, что $\mathcal{F}$ и $C_{\tilde{\pi}}$ являются C^*-подалгебрами в алгебрах $\bigotimes_{i=1}^d A_i$ и $\bigotimes_{i=1}^d B_i$ соответственно. Тогда искомый гомоморфизм $\tilde{\nu}\colon \mathcal{F} \to C_{\tilde{\pi}}$ является ограничением гомоморфизма

$$\bigotimes_{i=1}^d \varphi_i \colon \bigotimes_{i=1}^d A_i \to \bigotimes_{i=1}^d B_i.$$

Поскольку все рассматриваемые C^*-алгебры являются ядерными, C^*-нормы и тензорные произведения гомоморфизмов определены однозначно.

Теорема 2 доказана.

Для доказательства точности фоковского представления покажем, что для любого неприводимого представления π алгебры $\mathcal{A}_{\bar{k},\Theta}$ найдется гомоморфизм

$$\phi\colon \mathcal{F} \to C_\pi,$$

где C_π обозначает C^*-алгебру, порожденную $\pi(s_i)$, со свойством $\pi = \phi\pi_F$. Как и ранее, π_F обозначает фоковское представление $\mathcal{A}_{\bar{k},\Theta}$.

Будем опять рассматривать $\vec{k}$ как функцию

$$k\colon \{1, 2, \ldots, d-1\} \to \{1, 2, \ldots, d\}.$$

Рассмотрим $l(x) := k(x) + 1$ и построим множество

$$M = \big\{1, l^i(1), i \in \mathbb{N}\big\} \cap \{1, 2, \ldots, d\},$$

где $l^i(\cdot)$ обозначает i-ю итерацию. В следующем утверждении мы строим требующийся гомоморфизм для представлений, соответствующих $\Phi = M$.

Утверждение 3. *Рассмотрим неприводимое семейство унитарных операторов* $\{U_i, i \in M\}$, *удовлетворяющих соотношениям*

$$U_i U_j = \lambda_{ji} U_j U_i, \quad i, j \in M.$$

Обозначим $\mathcal{U} = C^*\{U_i, i \in M\}$. *Тогда существует гомоморфизм* $\phi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{U}$ *такой, что*

$$\phi(S_i) = U_i, \quad i \in M, \qquad \phi(S_i) = 0, \quad i \notin M, \qquad S_i := \pi_F(s_i).$$

Доказательство. 1. Рассмотрим сначала иррациональный набор коэффициентов λ_{ij}. Построим двусторонний замкнутый идеал $I \subset \mathcal{F}$, порожденный элементами $1 - S_i S_i$, $i \in M$. Для любого $i \notin M$ найдется $j \in M$, $j < i$, такой, что $\left(1 - S_j S_j^*\right) S_i = S_i$. Следовательно, $S_i \in I$, $i \notin M$. Пусть $\pi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}/I$ обозначает канонический гомоморфизм. Тогда $\pi(S_i) = 0$, $i \notin M$, и операторы $\pi(S_i)$, $i \in M$, являются унитарными и удовлетворяют соотношениям

$$\pi(S_i)\pi(S_j) = \lambda_{ji}\pi(S_j)\pi(S_i), \quad \lambda_{ij} = e^{2\pi\theta_{ij}}.$$

Поскольку некоммутативный тор A_Θ является простой C^*-алгеброй, если матрица $\Theta = \left(\theta_{ij}\right)_{i,\, j \in M}$ иррациональна, имеет место изоморфизм $\nu\colon \mathcal{F}/I \to \mathcal{U}$, определенный равенствами $\nu(\pi(S_i)) = U_i$, $i \in M$. Тогда требуемый гомоморфизм ϕ имеет вид $\phi = \nu\pi$.

2. Рассмотрим случай, когда все λ_{ij} — корни из единицы. Тогда, как было показано выше, достаточно доказать утверждение для

$$U_i = \bigotimes_{j<i,\, i \in M} D(\lambda_{ji}) \otimes U \bigotimes_{j>i,\, i \in M} 1, \quad i \in M.$$

Далее, $\mathcal{F} \subset \bigotimes_{i=1}^d A_i$, $\mathcal{U} \subset \bigotimes_{i=1}^d B_i$, и можно рассмотреть гомоморфизмы $\phi_i\colon A_i \to B_i$, определенные равенствами

$$\phi_i(S_i) = U, \quad \phi_i\big(d(\lambda_{ji}) = D(\lambda_{ji})\big), \quad i = 1, \ldots, d.$$

Если ограничим $\psi = \bigotimes_{i=1}^d \phi_i$ на $\mathcal{F}$, то получим, как и в предыдущем случае, $\psi(S_i) = 0$, $i \notin M$, и, с точностью до порядка тензорных множителей,

$$\psi(S_i) = T_i = U_i \otimes \left(\bigotimes_{j<i,\, i \notin M} D(\lambda_{ji}) \otimes \bigotimes_{j>i,\, i \notin M} 1 \right).$$

Положим $V_i = \bigotimes_{j<i,\, i \notin M} D(\lambda_{ji}) \otimes \bigotimes_{j>i,\, i \notin M} 1$, $i \in M$. Тогда $\{V_i\}$ является коммутирующим семейством диагональных унитарных операторов на конечномерном пространстве и $\lambda = 1$ принадлежит совместному спектру V_i-х. Пусть p — ортогональный проектор на подпространство общих собственных векторов семейства $\{V_i\}$, соответствующих $\lambda = 1$. Поскольку $pV_i = V_i p = p$, $i \in M$, имеем гомоморфизм $\nu\colon C^*(T_i) \to C^*(U_i)$,

$$\nu(T_i) = (1 \otimes p) T_i (1 \otimes p) = U_i \otimes p, \quad i \in M.$$

Очевидно, что если мы рассмотрим отождествление $U_i \otimes p \mapsto U_i$, то $\phi = \nu\psi$ — требуемый гомоморфизм.

Утверждение 3 доказано.

Рассмотрим теперь неприводимые представления, соответствующие $\Phi \neq M$.

Утверждение 4. *Пусть π — неприводимое представление $\mathcal{A}_{\bar{k},\Theta}$, соответствующее $\Phi \neq M$, и C_π обозначает C^*-алгебру, порожденную операторами π. Существует гомоморфизм $\phi\colon \mathcal{F} \to C_\pi$, для которого $\pi = \phi\pi_F$.*

Доказательство. Используем индукцию по числу образующих. Предположим, что $1 \notin \Phi$. Тогда

$$\pi(s_1) = S \otimes 1, \quad \pi(s_i) = U_{1i} \otimes \tilde{\pi}(\tilde{s}_i), \quad i \geq 1,$$

и

$$\pi_F(s_1) = S \otimes 1, \quad \pi_F(s_i) = U_{1i} \otimes \tilde{\pi}_F(\tilde{s}_i), \quad i \geq 1,$$

где операторы $\tilde{s}_i$, $i = 2, \ldots, d$, удовлетворяют коммутационным соотношениям (1), соответствующим вектору $\tilde{k} = (k_2, \ldots, k_{d-1})$, $\tilde{\pi}_F$ — фоковское представление и $\tilde{\pi}$ — некоторое неприводимое представление этих соотношений, соответствующее подмножеству $\Phi \setminus \{1\}$. Обозначим C^*-алгебры, порожденные $\tilde{\pi}_F$ и $\tilde{\pi}$, как $\tilde{\mathcal{F}}$ и $C_{\tilde{\pi}}$ соответственно. По предположению индукции имеем гомоморфизм $\tilde{\phi}$

$$\tilde{\phi}\colon \tilde{\mathcal{F}} \to C_{\tilde{\pi}}, \quad \tilde{\pi} = \tilde{\phi}\tilde{\pi}_F.$$

Тогда $\phi\colon \mathcal{F} \to C_\pi$ получается ограничением на $\mathcal{F}$ гомоморфизма

$$\mathrm{id} \otimes \tilde{\phi}\colon C^*(S, U_{1i}, i > 1) \otimes \tilde{\mathcal{F}} \to C^*(S, U_{1i}, i > 1) \otimes C_{\tilde{\pi}}.$$

Очевидным образом рассуждения, приведенные выше, проводятся для всех $i \notin \Phi \bigcup \Sigma$, после чего остается воспользоваться утверждением 3.

Фактически мы доказали основной результат этого пункта.

Теорема 3. *Фоковское представление* $\mathcal{A}_{\bar{k},\Theta}$ *является точным.*

Доказательство. Заметим лишь, что из утверждений 3, 4 следует, что ядро фоковского представления $\ker pi_F$ содержится в ядре любого неприводимого представления C^*-алгебры $\mathcal{A}_{\bar{k},\Theta}$. Значит, $\mathrm{Ker}\,\pi_F = \{0\}$.

Например, для C^*-алгебры $\mathcal{B}_0$, порожденной TCCR, имеем следующую точную реализацию:

$$s_i = \bigotimes_{j<i} (1 - SS^*) \otimes S \otimes \bigotimes_{j>i} 1, \quad i = 1, \ldots, d.$$

3. Структура $\mathcal{A}_{\bar{k},\Theta}$. В этом пункте мы покажем, что если $k_1 \neq d$ и матрица Θ иррациональна, то C^*-алгебра $\mathcal{A}_{\bar{k},\Theta}$ является расширением многомерного иррационального некоммутативного тора с помощью единственного максимального двустороннего идеала I, и в этом случае существует единственное состояние типа следа $\tilde{\tau}$, для которого $I = \{b \mid \tilde{\tau}(b^*b) = 0\}$.

Утверждение 5. *Пусть* $\mathcal{A}_{\bar{k},\Theta}$ *обозначает* C^**-алгебру, порожденную частичными изометриями* s_i, $i = 1, \ldots, d$, *удовлетворяющими соотношениям* (1) *с иррациональными коэффициентами* λ_{ij}.

Тогда $\mathcal{A}_{\bar{k},\Theta}$ *содержит единственный максимальный двусторонний замкнутый идеал* I *такой, что* $\mathcal{A}_{\bar{k},\Theta}/I \simeq A_\Theta$, *где* A_Θ *— некоммутативный тор, соответствующий* $\Theta = (\theta_{ij})_{i,j \in M}$. *Пусть* $\Psi\colon \mathcal{A}_{\bar{k},\Theta}/I \to A_\Theta$ *— канонический гомоморфизм и* τ *— канонический след на* A_Θ. *Тогда* $\tilde{\tau} = \tau\Psi$ *является единственным состоянием типа следа на* $\mathcal{A}_{\bar{k},\Theta}$ *и* $I = \{b \in \mathcal{A} \mid \tilde{\tau}(b^*b) = 0\}$.

Доказательство. Положим $p_i := 1 - s_i s_i^*$, $i \in M$. Легко проверить, что

$$p_i s_j = s_j p_i, \quad i > k_j, \quad j > k_i, \qquad p_i s_i = 0, \qquad p_i s_j = s_j.$$

Нетрудно видеть, что $p_i p_j = p_j p_i$, $i, j \in M$. Обозначим через J линейную оболочку элементов вида

$$s_1^{i_1}\ldots s_d^{i_d}\prod_{i\in M}p_1^{\varepsilon_i}\left(s_d^*\right)^{j_d}\ldots\left(s_i^*\right)^{j_1},$$

где $i_k, j_k\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}$, $\varepsilon_k=0,1$, $\sum_{i\in M}\varepsilon_i^2\neq 0$. Легко проверить, что J выдерживает умножение на s_i, s_i^*, $i=1,\ldots,d$, слева и справа и инвариантно относительно инволюции. Следовательно, $I=\overline{J}$ — замкнутый двусторонний идеал в $\mathcal{A}$. Напомним, что $s_i\in I$, $i\notin M$.

Пусть $\Psi\colon\mathcal{A}\to\mathcal{A}/I$ — канонический гомоморфизм. Тогда $\Psi(s_i):=U_i$, $i\in M$, являются унитарными операторами и $U_kU_j=e^{2\pi i\theta_{jk}}U_jU_k$, $\Psi(s_i)=0$, $i\notin M$, т. е. $\mathcal{A}/I\simeq A_\Theta$. Поскольку C^*-алгебра A_Θ проста, I — максимальный двусторонний идеал.

Докажем единственность I. Предположим, что $\mathcal{L}$ — идеал в $\mathcal{A}$. Поскольку $\Psi\colon\mathcal{A}\to A_\Theta$ — сюръекция, $\Psi(\mathcal{L})$ является идеалом в A_Θ. Следовательно, либо $\Psi(\mathcal{L})=0$ (т. е. $\mathcal{L}\subset I$), либо $\Psi(\mathcal{L})=A_\Theta$.

В последнем случае $1+m\in\mathcal{L}$ для некоторого $m\in I$. Далее, так как $I=\overline{J}$, для любого $\varepsilon>0$ существует элемент

$$m_\varepsilon = \sum_{\overline{i},\overline{j},\overline{\varepsilon}}\alpha_{\overline{i},\overline{j},\overline{\varepsilon}}s_1^{i_1}\ldots s_d^{i_d}\prod_{i\in M}p_i^{\varepsilon_i}\left(s_d^*\right)^{j_d}\ldots\left(s_1^*\right)^{j_1}\in J,$$

где $\overline{i}=(i_1,\ldots,i_d)$, $\overline{j}=(j_1,\ldots,j_d)$, $1\le i_k$, $j_k\le N$, для некоторого натурального N (зависящего от ε) и

$$\overline{\varepsilon} = \left(\overrightarrow{\varepsilon_i, i\in M}\right),\quad \varepsilon_i=0,1,\qquad \sum_{i\in M}\varepsilon_i^2\neq 0,$$

такой, что $\|m-m_\varepsilon\|<\varepsilon$. Обозначим $r_\varepsilon:=m-m_\varepsilon$.

Покажем, что

$$\prod_{i\in M}\left(s_i^{N+1}\right)^* m_\varepsilon = 0.$$

Действительно, это равенство следует из соотношений $s_i^*p_i=0$, $i\in M$, $s_i^*s_j = \lambda_{ij}s_js_i^*$ или $s_i^*s_j=0$.

Положим $T=\prod_{i\in M}s_i^{N+1}$, очевидно, $T^*T=E$, так как $s_i^*s_i = 1$, $i\in M$. Тогда

$$T^*(1+m)T = T^*(1+m_\varepsilon+r_\varepsilon)T = 1+T^*r_\varepsilon T.$$

Из оценки $\left\|T^*r_\varepsilon T\right\|<\varepsilon$ и замкнутости $\mathcal{L}$ получим $1\in\mathcal{L}$.

Очевидно, что $\tilde{\tau}=\tau\Psi$ — след на $\mathcal{A}_{\bar{k},\Theta}$, где τ — единственный нормированный след на A_Θ. Пусть $\tilde{\tau}_1$ — произвольный нормированный след на $\mathcal{A}_{\bar{k},\Theta}$. Тогда $\tilde{\tau}_1\left(1-s_is_i^*\right)=0$, т. е. $\tilde{\tau}_1(I)=0$, и можно определить след на A_Θ по правилу $\tau_1(x)=\tilde{\tau}_1(y)$ для некоторого $y\in\mathcal{A}$ такого, что $\Psi(y)=x$. В силу единственности нормированного следа на A_Θ получим $\tau_1=\tau$ и $\tilde{\tau}_1=\tau\Psi$. Пусть $N=\left\{b\,\middle|\,\tilde{\tau}\left(b^*b\right)=0\right\}$. Поскольку N — замкнутый двусторонний идеал, имеем $N\subset I$. Однако $\tilde{\tau}(p_i)=0$, $i\in M$, значит, $I\subset N$.

Утверждение 5 доказано.

В следующем утверждении мы изучаем структуру идеала I в случае $d=2$, $k_1=1$.

Утверждение 6. *Последовательность*

$$0 \to \mathbb{K} \to I \to \mathbb{K} \otimes (C(T) \oplus C(T)) \to 0$$

является точной.

Доказательство. Рассмотрим фоковскую реализацию, т. е. будем считать, что

$$S_1 = S \otimes 1, \quad S_2 = d(\lambda) \otimes S, \quad \lambda = \lambda_{12}.$$

Пусть

$$P_{ijkl}^1 = S_1^i\left(1 - S_1S_1^*\right)S_1^{*j}S_2^kS_2^{*l}: \; P_{ijkl}^2 = S_2^i\left(1 - S_2S_2^*\right)S_2^{*j}S_1^kS_1^{*l}$$

и I_1, I_2 — идеалы, порожденные множествами $\left\{P_{ijkl}^1\right\}$ и $\left\{P_{ijkl}^2\right\}$ соответственно. Тогда, поскольку

$$P_{ijkl}^1 = S^i\left(1 - SS^*\right)S^{*j}d(\lambda)^{k-l} \otimes S^kS^{*l},$$

получим $I_1 \simeq \mathbb{K} \otimes \mathcal{T}$ ($\mathcal{T}$ обозначает алгебру Теплица). Чтобы доказать изоморфизм $I_2 \simeq \mathbb{K} \otimes \mathcal{T}$, нужно заменить базис в $l_2(\mathbb{Z}_+) \otimes l_2(\mathbb{Z}_+)$ так, чтобы $S_1 = d(\lambda) \otimes S$ и $S_2 = S \otimes 1$.

Далее, так как $P_{i_1j_1k_1l_1}^1 P_{i_2j_2k_2l_2}^2 \in \mathbb{K}\left(l_2(\mathbb{Z}_+) \otimes l_2(\mathbb{Z}_+)\right)$, имеем

$$I_1 \cap I_2 = I_1I_2 = \mathbb{K}\left(l_2(\mathbb{Z}_+) \otimes l_2(\mathbb{Z}_+)\right).$$

Тогда

$$I/\mathbb{K} \simeq I_1/\mathbb{K} \oplus I_2/\mathbb{K} \simeq \mathbb{K} \otimes \mathcal{T}/\mathbb{K} \otimes \mathbb{K} \oplus \mathbb{K} \otimes \mathcal{T}/\mathbb{K} \otimes \mathbb{K}.$$

Поскольку последовательность $0 \to \mathbb{K} \to \mathbb{T} \to C(T) \to 0$ является точной, а алгебра компактных операторов $\mathbb{K}$ ядерна, последовательность $0 \to \mathbb{K} \otimes \mathbb{K} \to$ $\to \mathbb{K} \otimes \mathcal{T} \to \mathbb{K} \otimes C(T) \to 0$ точная и

$$I/\mathbb{K} \simeq \mathbb{K} \otimes (C(T) \oplus C(T)).$$

1. *Bożejko M., Speicher R.* An example of a generalized Brownian motion // Communs Math. Phys. – 1991. – **137**. – P. 519 – 531.
2. *Bożejko M., Speicher R.* Completely positive maps on Coxeter groups, deformed commutation relations, and operator spaces // Math. Ann. – 1994. – **300**. – P. 97 – 120.
3. *Marcinek W.* On commutation relations for quons // Repts Math. Phys. – 1998. – **41**. – P. 155 – 172.
4. *Ostrovsky V. L., Proskurin D. P.* Operator relations, dynamical systems, and representations of a class of Wick algebras // Oper. Theory Adv. Appl. – 2000. – **118**. – P. 335 – 345.
5. *Pusz W., Woronowicz S. L.* Twisted second quantization // Repts Math. Phys. – 1989. – **27**. – P. 251 – 263.
6. *Vaksman L.* Lectures on q-analogues of Cartan domains and associated Harish – Chandra modules, math. QA/0109198.
7. *Proskurin D.* Stability of a special class of q_{ij}-CCR and extensions of higher-dimensional noncommutative tori // Lett. Math. Phys. – 2000. – **52**, № 2. – P. 165 – 175.
8. *Jørgensen P. E. T., Schmitt L. M., Werner R. F.* q-Canonical commutation relations and stability of the Cuntz algebra // Pacif. J. Math. – 1994. – **163**, № 1. – P. 131 – 151.
9. *Proskurin D., Samoilenko Yu.* Stability of the C^*-algebra associated with the twisted CCR // Algebras and Rept. Theory. – 2002. – **5**. – P. 433 – 444.
10. *Kabluchko Z.* On the extensions of the higher-dimensional noncommutative tori // Meth. Func. Anal. And Top. – 2001. – **1**. – P. 28 – 33.

Получено 08.07.2003