УДК 512.64

И. В. Сергиенко, Е. Ф. Галба, В. С. Дейнека
(Ин-т кибернетики НАН Украины, Киев)

РАЗЛОЖЕНИЕ ВЗВЕШЕННЫХ ПСЕВДООБРАТНЫХ МАТРИЦ В МАТРИЧНЫЕ СТЕПЕННЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

On the basis of the Euler identity, we obtain expansions of weighted pseudoinverse matrices with positive definite weights into infinite matrix power products of two types: with positive and negative exponents. We establish estimates of closeness of weighted pseudoinverse matrices and matrices obtained on the basis of fixed number of co-factors of matrix power products and terms of matrix power series. We compare the rates of convergence of expansions of weighted pseudoinverse matrices into matrix power series and matrix power products to weighted pseudoinverse matrices. We consider the problems of constructing and comparing iteration processess of the computation of weighted pseudoinverse matrices on the basis of obtained expansions of these matrices.

На основі тотожності Ейлера одержано розвинення зважених псевдообернених матриць з додатно означеними вагами у нескінченні матричні степеневі добутки двох типів: з додатними і від'ємними показниками степенів. Встановлено оцінки близькості зважених псевдообернених матриць та матриць, отриманих на основі фіксованого числа співмножників матричних степеневих добутків та членів матричних степеневих рядів. Наведено порівняння швидкостей збіжності до зважених псевдообернених матриць їх розвинень в матричні степеневі ряди і в матричні степеневі добутки. Розглянуто питання побудови та порівняння ітераційних процесів обчислення зважених псевдообернених матриць на основі одержаних розвинень цих матриць.

1. Введение. Определение взвешенной псевдообратной матрицы с положительно определенными весами впервые было дано Дж. С. Чипманом в 1964 г. [1]. В 1968 г. Р. Д. Милн ввел понятие косой псевдообратной матрицы [2]. В работе [3] показано, что множество взвешенных псевдообратных матриц в смысле Чипмана совпадает с множеством косых псевдообратных матриц в смысле Милна. Интерес к взвешенным псевдообратным матрицам в значительной степени обусловлен их многочисленными приложениями. В частности, взвешенные псевдообратные матрицы использовались при решении задач математической статистики, управления, задач наименьших квадратов с ограничениями, задач идентификации, нелинейного программирования. Так, в работе [1] взвешенные псевдообратные матрицы используются для построения линейных наблюдателей состояний в системах. Матрицы-веса учитывают вклад коэффициентов регрессии в задачи наблюдения. В работе [4] аппарат взвешенного псевдообращения используется в оптимальном управлении дискретно-аргументными системами. Отмечено, что использование взвешенных псевдообратных матриц в теории управления расширяет возможности математической модели проблемы. В работе [5] взвешенные псевдообратные матрицы используются для решения задач нелинейного программирования. Решения ряда задач наименьших квадратов с ограничениями, а также задач вычисления L- и Lg-псевдорешений представляются с помощью взвешенных псевдообратных матриц [6]. К этим задачам приходят при математическом моделировании процессов в различных предметных областях. Например, Lg-псевдорешение используется при математическом моделировании тепловых процессов в ограниченных средах [7].

Анализ работ, посвященных псевдообращению, показывает, что вопросам исследования свойств взвешенных псевдообратных матриц, а также вычисления этих матриц уделено значительно меньше внимания, чем исследованию и вычислению псевдообратных матриц Мура – Пенроуза [8, 9]. Поэтому исследование свойств взвешенных псевдообратных матриц с целью дальнейшего развития теории взвешенной псевдоинверсии и создания теоретических основ разработки методов вычисления взвешенных псевдообратных матриц представляет значительный интерес. Поскольку взвешенная псевдообратная матрица с положительно определенными весами [1 – 3] является обобщением псевдообратной матрицы Мура – Пенроуза, ее исследование представляет также интерес с точки зрения обобщения свойств псевдообращения по Муру – Пенроузу.

Настоящая работа посвящена развитию теории взвешенной псевдоинверсии в направлении получения и обоснования различных представлений взвешенных псевдообратных матриц, а именно, получению и исследованию разложений этих матриц в бесконечные матричные степенные произведения. В работе [10] получены разложения в матричные степенные ряды взвешенных псевдообратных матриц с положительно определенными весами, для исследования которых используется представление этих матриц в терминах коэффициентов характеристических многочленов симметризуемых матриц [11]. В настоящей работе предлагаются и исследуются разложения взвешенных псевдообратных матриц в более быстросходящиеся бесконечные матричные степенные произведения, основанные на тождестве Эйлера для числовых бесконечных степенных произведений. В качестве математического аппарата исследования используется взвешенное сингулярное разложение матриц [12]. Показано, что с использованием взвешенного сингулярного разложения матриц можно обосновать сходимость матричных степенных рядов, предложенных в [10], к взвешенной псевдообратной матрице. На основании взвешенного сингулярного разложения матриц получены оценки близости взвешенных псевдообратных матриц и матриц, полученных на основе фиксированного числа членов рядов, предложенных в работе [10], и фиксированного числа сомножителей в бесконечных матричных степенных произведениях, полученных в настоящей работе.

2. Определения и вспомогательные факты. Отметим, что в дальнейшем везде предполагается вещественность используемых скаляров, векторов, матриц и пространств. Введем необходимые для дальнейшего изложения обозначения, определения и укажем вспомогательные факты. Пусть $\mathbb{R}^{m\times n}$ — множество действительных матриц размера $m \times n$. Обозначим через $\mathbb{R}^n$ n-мерное векторное пространство над полем действительных чисел, где векторы являются матрицами размера $n \times 1$. Пусть H — симметричная положительно определенная матрица. Через $\mathbb{R}^n(H)$ обозначим евклидово пространство со скалярным произведением $(u, v)_H = (Hu, v)_E$ и нормой $\|u\|_H = (u, u)_H^{1/2}$, где $(u, v)_E = u^T v$.

Приведем определение взвешенных псевдообратных матриц с положительно определенными весами [1, 3]. Пусть $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $X \in \mathbb{R}^{n\times m}$, а $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ и $C \in$ $\in \mathbb{R}^{n\times n}$ — симметричные положительно определенные матрицы. Тогда взвешенная псевдообратная матрица для матрицы A определяется как единственная матрица $X = A_{BC}^{+}$, удовлетворяющая четырем условиям

$$AXA = A, \quad XAX = X, \quad (BAX)^T = BAX, \quad (CXA)^T = CXA. \tag{1}$$

При $B = C = E$, где E — единичная матрица, система матричных уравнений (1) определяет псевдообратную матрицу Мура – Пенроуза [8, 9] к матрице A, которую обозначим A_{EE}^{+}.

Определим норму прямоугольной матрицы [10]. Пусть $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $H \in \mathbb{R}^{m\times m}$ и $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — симметричные положительно определенные матрицы, $x \in \mathbb{R}^n$. Тогда

$$\|A\|_{HV} = \sup_{x\neq 0} \frac{\|AVx\|_H}{\|x\|_{E_n}} = \sup_{x\neq 0} \frac{\left\|H^{1/2}AVx\right\|_{E_m}}{\|x\|_{E_n}}, \tag{2}$$

где нижний индекс при единичной матрице указывает на ее порядок.

В [10] показано, что функция $\|\cdot\|_{HV}$, определенная формулой (2), является аддитивной матричной нормой, которая равна

$$\|A\|_{HV} = [\lambda_{\max}(VA^T HAV)]^{1/2}, \tag{3}$$

где $\lambda_{\max}(L)$ — максимальное собственное значение матрицы L.

Пусть $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{p\times n}$, а $H \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $M \in \mathbb{R}^{p\times p}$ — симметричные положительно определенные матрицы. Тогда для нормы произведения двух прямоугольных матриц имеем оценку [10]

$$\|AB\|_{HV} \le \|A\|_{HM^{-1}} \|B\|_{M^2V}. \tag{4}$$

Определение 1 [13]. *Вещественная матрица U называется симметризуемой, если существует такая симметричная положительно определенная матрица H, что выполняется равенство $U^T H = HU$.*

Матрицу H будем называть матрицей симметризации.

Матрица U есть частный случай H-симметричных матриц [14, 15], где H предполагается симметричной невырожденной знаконеопределенной матрицей.

Очевидно, что третье и четвертое условия в определении взвешенной псевдообратной матрицы с положительно определенными весами (1) означают, что матрицы AX и XA — симметризуемые с матрицами симметризации B и C соответственно. В отличие от взвешенной псевдообратной матрицы для псевдообратной матрицы Мура – Пенроуза третье и четвертое условия будут соответственно означать, что матрицы AX и XA — симметричные. Поэтому симметризуемые матрицы имеют такое же важное значение при исследовании взвешенных псевдообратных матриц, как и симметричные матрицы при исследовании псевдообратных матриц Мура – Пенроуза.

Определение 2 [10]. *Квадратную вещественную матрицу Q будем называть H-взвешенной ортогональной (ортогональной с весом H), если ее столбцы ортонормальные в смысле скалярного произведения $(\ ,\ )_H$, т.е. если выполняется условие*

$$Q^T H Q = E, \tag{5}$$

где H — симметричная положительно определенная матрица.

Отметим, что в работах [14, 15], в отличие от введенной условием (5) ортогональной с весом H матрицы, вводятся и исследуются H-ортогональные матрицы Q, удовлетворяющие условию $Q^T H Q = H$. Тогда H-ортогональная матрица, введенная этим условием, где H — симметричная положительно определенная матрица, сохраняет евклидову длину при умножении, т. е. для любого вектора $x \in \mathbb{R}^n$ евклидова длина вектора $y = Qx$ в норме $\|\cdot\|_H$ равна евклидовой длине x в этой же норме.

Из определения H-взвешенной ортогональной матрицы формулой (5) следует, что для любого вектора $x \in \mathbb{R}^n$ евклидова длина вектора $y = Qx$ в норме $\|\cdot\|_H$ равна евклидовой длине вектора x в норме $\|\cdot\|_E$, т.е. $\|Qx\|_H = \|x\|_E$. В настоящей работе для теоретических исследований используется H-взвешенная ортогональная матрица, определенная условием (5).

Как указано выше, при исследовании взвешенных псевдообратных матриц будет использован аппарат взвешенного сингулярного разложения матриц, построенный в работе [12]. А именно, в цитируемой работе показано, что для матрицы $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ существуют две взвешенные ортогональные матрицы $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$ и $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ с весами B и C соответственно, такие, что

$$U^T BAV = D = \begin{cases} \left\| \operatorname{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_r, 0, \ldots, 0) O_m^{n-m} \right\|, & \text{если} \quad m \le n, \\ \left\| \begin{matrix} \operatorname{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_r, 0, \ldots, 0) \\ O_{m-n}^n \end{matrix} \right\|, & \text{если} \quad m \ge n, \end{cases} \tag{6}$$

и

$$A = UDV^T C, \tag{7}$$

где $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ и $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — произвольные симметричные положительно определенные матрицы, столбцы матриц U и V — ортонормированные собственные векторы в $\mathbb{R}^m(B)$ и $\mathbb{R}^n(C)$ симметризуемых матриц $AC^{-1}A^T B$ и $C^{-1}A^T BA$ соответственно, а d_i — квадратные корни из собственных значений матриц $AC^{-1}A^T B$, если $m \le n$, и $C^{-1}A^T BA$, если $m \ge n$, $O_k^l \in \mathbb{R}^{k\times l}$ — нулевая матрица, r — ранг матрицы A.

В цитируемой работе показано, что взвешенная псевдообратная матрица к матрице A определяется формулой

$$A_{BC}^+ = VD_{EE}^+ U^T B, \tag{8}$$

где $D_{EE}^+ \in \mathbb{R}^{n\times m}$ — псевдообратная матрица Мура – Пенроуза к матрице D, а матрица D определена формулой (6). Тогда D_{EE}^+ — «диагональная» матрица, т. е. такая, что из $d_{ij}^+ \ne 0 \Rightarrow i = j$ с ненулевыми элементами $d_{ii}^+ = d_i^+$, $i = 1, \ldots, r$, где $d_i^+ = d_i^{-1}$, а d_i определены в (6).

В дальнейшем через $\operatorname{diag}(\lambda_i)$ будем обозначать диагональную матрицу с диагональными элементами λ_i. При этом в случае произвольной матрицы $L \in \mathbb{R}^{m\times n}$ диагональной матрицей будем считать такую матрицу с элементами l_{ij}, что из $l_{ij} \ne 0 \Rightarrow i = j$.

Определение 3 [12]. *Значения квадратных корней из собственных значений симметризуемых матриц $AC^{-1}A^T B$ и $C^{-1}A^T BA$ называются взвешенными сингулярными числами матрицы A.*

Поскольку указанные выше матрицы получены в результате перестановки матриц-сомножителей, то согласно [16] ненулевые собственные значения этих матриц совпадают.

3. Разложения с положительными показателями степеней. Сначала используем аппарат взвешенного сингулярного разложения матриц для обоснования сходимости матричного степенного ряда с положительными показателями степеней, предложенного в работе [10], и для оценки близости взвешенной псевдообратной матрицы и суммы фиксированного числа членов этого ряда.

Теорема 1. *Для $A \ne 0 \in \mathbb{R}^{m\times n}$, симметричных положительно определенных матриц B и C таких, что $C^{-1}A^T BA$ определено, и для действительного числа σ такого, что*

$$0 < \sigma < \frac{2}{d_{\max}^2}, \tag{9}$$

где $d_{\max}$ — максимальный элемент матрицы D, определенной в (6), ряд $\sigma \sum_{k=0}^{i} (E - \sigma C^{-1}A^T BA)^k C^{-1}A^T B$ при $i \to \infty$ сходится и

$$\sigma \sum_{k=0}^{\infty} (E - \sigma C^{-1} A^T B A)^k C^{-1} A^T B = A_{BC}^{+}, \tag{10}$$

$$\left\| A_{BC}^{+} - A_{BC,j}^{+} \right\|_{CB^{-1/2}} \le \max_{d_i \ne 0} \frac{\left| 1 - \sigma d_i^2 \right|^j}{d_i}, \tag{11}$$

где $A_{BC,j}^{+} = \sigma \sum_{k=0}^{j-1} (E - \sigma C^{-1} A^T B A)^k C^{-1} A^T B$, d_i *— диагональные элементы матрицы* D, *определенной формулой* (6).

Доказательство. Используя (7), получаем

$$(E - \sigma C^{-1} A^T B A)^k C^{-1} A^T B = (E - \sigma C^{-1} C V D^T U^T B U D V^T C)^k C^{-1} C V D^T U^T B,$$

откуда в силу взвешенной ортогональности матрицы V с весом C для любого $k = 1, 2, \ldots$ имеем

$$(E - \sigma C^{-1} A^T B A)^k C^{-1} A^T B = V (E - \sigma D^T D)^k D^T U^T B \tag{12}$$

и, следовательно,

$$\sigma \sum_{k=0}^{\infty} (E - \sigma C^{-1} A^T B A)^k C^{-1} A^T B = \sigma \sum_{k=0}^{\infty} V (E - \sigma D^T D)^k D^T U^T B. \tag{13}$$

В силу (9) числа $\left| 1 - \sigma d_i^2 \right| < 1$ при $d_i^2 > 0$, так что

$$\sum_{k=0}^{\infty} (1 - \sigma d_i^2)^k d_i = \sigma^{-1} d_i^{+}. \tag{14}$$

Поскольку

$$(E - \sigma D^T D)^k D^T = \operatorname{diag} \{ (1 - \sigma d_i^2)^k d_i \}, \tag{15}$$

учитывая (14), из (13) получаем

$$\sigma \sum_{k=0}^{\infty} (E - \sigma C^{-1} A^T B A)^k C^{-1} A^T B = V D_{EE}^{+} U^T B = A_{BC}^{+},$$

т. е. разложение (10) взвешенной псевдообратной матрицы в матричный степенной ряд.

Перейдем к доказательству оценки (11). Поскольку

$$A_{BC}^{+} - A_{BC,j}^{+} = \sigma \sum_{k=j}^{\infty} (E - \sigma C^{-1} A^T B A)^k C^{-1} A^T B,$$

используя формулу взвешенного сингулярного разложения взвешенной псевдообратной матрицы к матрице A (8), по аналогии с доказательством равенства (13) имеем

$$A_{BC}^{+} - A_{BC,j}^{+} = \sigma V \sum_{k=j}^{\infty} (E - \sigma D^T D)^k D^T U^T B. \tag{16}$$

Положим в (4) $M = E_n$, тогда в силу этого соотношения из (16) находим

$$\left\| A_{BC}^{+} - A_{BC,j}^{+} \right\|_{CB^{-1/2}} \le \sigma \| V \|_{CE_n} \left\| \sum_{k=j}^{\infty} (E_n - \sigma D^T D)^k D^T U^T B \right\|_{E_n B^{-1/2}}.$$

Опять используем (4), полагая $M = E_m$, для оценки второй нормы в правой части последнего неравенства:

$$\left\| A^+_{BC} - A^+_{BC,j} \right\|_{CB^{-1/2}} \le \sigma \| V \|_{CE_n} \left\| \sum_{k=j}^{\infty} (E_n - \sigma D^T D)^k D^T \right\|_{E_n E_m} \left\| U^T B \right\|_{E_m B^{-1/2}}.$$

Учитывая то обстоятельство, что U и V — взвешенные ортогональные матрицы с весами B и C соответственно и собственные значения матрицы-произведения двух квадратных матриц при их перестановке не изменяются [16], в силу определения величины матричной нормы согласно формуле (3) из последнего соотношения имеем

$$\left\| A^+_{BC} - A^+_{BC,j} \right\|_{CB^{-1/2}} \le \sigma \left\| \sum_{k=j}^{\infty} (E_n - \sigma D^T D)^k D^T \right\|_{E_n E_m}. \tag{17}$$

Поскольку сумма

$$\sum_{k=j}^{\infty} (1 - \sigma d_i^2)^k d_i = \frac{(1 - \sigma d_i^2)^j}{\sigma d_i}$$

при $d_i \neq 0$ и равна нулю при $d_i = 0$, учитывая (15), из неравенства (17) получаем оценку (11), что и завершает доказательство теоремы 1.

***Следствие* 1.** *Из равенства* (10) *следует справедливость соотношений*

$$A^+_{BC} = \sigma \sum_{k=0}^{\infty} C^{-1}(E - \sigma A^T B A C^{-1})^k A^T B =$$

$$= \sigma \sum_{k=0}^{\infty} C^{-1/2}(E - \sigma C^{-1/2} A^T B A C^{-1/2})^k C^{-1/2} A^T B =$$

$$= \sigma \sum_{k=0}^{\infty} C^{-1} A^T B (E - \sigma A C^{-1} A^T B)^k = \sigma \sum_{k=0}^{\infty} C^{-1} A^T (E - \sigma B A C^{-1} A^T)^k B =$$

$$= \sigma \sum_{k=0}^{\infty} C^{-1} A^T B^{1/2} (E - \sigma B^{1/2} A C^{-1} A^T B^{1/2})^k B^{1/2}.$$

***Замечание* 1.** Как следует из доказательства теоремы 1, сходимость матричного степенного ряда (10) необходимо рассматривать только при наличии обоих сомножителей членов этого ряда $\sigma(E - \sigma C^{-1} A^T B A)^k$ и $C^{-1} A^T B$. Это замечание касается и сходимости других матричных степенных рядов и рассматриваемых ниже матричных степенных произведений.

***Замечание* 2.** В теореме 1, как и в последующих теоремах, исключение нулевых матриц из множества рассматриваемых относится только к оценке близости взвешенных псевдообратных матриц и матриц, полученных на основе фиксированного числа членов матричных степенных рядов и матричных степенных произведений. Очевидно, что формулы, определяющие бесконечные разложения взвешенных псевдообратных матриц, будут справедливы и для нулевых матриц, поскольку взвешенная псевдообратная матрица к нулевой матрице является нулевой.

Поскольку взвешенная псевдоинверсия есть обобщение псевдоинверсии Мура – Пенроуза, разложения (10) и приведенные в следствии 1 являются обобщениями разложений псевдообратной матрицы Мура – Пенроуза

$$A^+_{EE} = \sigma \sum_{k=0}^{\infty} (E - \sigma A^T A)^k A^T = \sigma \sum_{k=0}^{\infty} A^T (E - \sigma A A^T)^k, \tag{18}$$

полученных в работе [17] для квадратных матриц и названных разложениями типа Неймана, что, по-видимому, связано с известным матричным рядом, сходимость которого доказана Нейманом:

$$(E-A)^{-1} = \lim_{k\to\infty}\sum_{i=0}^{k} A^i, \quad A\in\mathbb{R}^{n\times n}, \quad \rho(A) < 1,$$

где $\rho(A)$ — спектральный радиус матрицы A.

В этой же работе на основании тождества Эйлера

$$(1+x)\prod_{k=1}^{\infty}(1+x^{2^k}) = \frac{1}{1-x} \quad \text{для} \quad |x|<1 \tag{19}$$

и произведения конечного числа сомножителей тождества (19)

$$(1+x)\prod_{k=1}^{n-1}(1+x^{2^k}) = \sum_{k=0}^{2^n-1} x^k \quad \text{для} \quad |x|<1, \tag{20}$$

полученного в [18], для квадратных матриц предложено более быстросходящееся разложение псевдообратной матрицы Мура – Пенроуза в бесконечное степенное матричное произведение, чем разложение типа Неймана (18), а именно, показано, что для псевдообратной матрицы Мура – Пенроуза A_{EE}^{+} к квадратной матрице A имеет место разложение

$$A_{EE}^{+} = \sigma\left\{E+(E-\sigma A^TA)\right\}\prod_{k=1}^{\infty}\left\{E+(E-\sigma A^TA)^{2^k}\right\}A^T. \tag{21}$$

***Замечание* 3.** Поскольку взвешенное сингулярное разложение матриц является обобщением обычного сингулярного разложения матриц, в формулах (18), (21) параметр σ определяется также соотношением (9), где $d_{\max}$ — максимальный диагональный элемент матрицы D, определенной в (6) при $B = C = E$.

Покажем, что для взвешенной псевдообратной матрицы на основании (19), (20) можно предложить более быстросходящееся матричное степенное произведение, чем ряд (10).

Обозначим

$$A_{BC,j}^{+} = \sigma\left\{E+(E-\sigma C^{-1}A^TBA)\right\}\prod_{k=1}^{j-1}\left\{E+(E-\sigma C^{-1}A^TBA)^{2^k}\right\}C^{-1}A^TB. \tag{22}$$

Теорема 2. *Для $A \neq 0 \in \mathbb{R}^{m\times n}$, симметричных положительно определенных матриц B и C таких, что $C^{-1}A^TBA$ существует, и для действительного числа σ, определенного в* (9), *матричное степенное произведение* (22) *при $j\to\infty$ сходится и*

$$A_{BC}^{+} = \sigma\left\{E+(E-\sigma C^{-1}A^TBA)\right\}\prod_{k=1}^{\infty}\left\{E+(E-\sigma C^{-1}A^TBA)^{2^k}\right\}C^{-1}A^TB, \tag{23}$$

$$\left\|A_{BC}^{+} - A_{BC,j}^{+}\right\|_{CB^{-1/2}} \le \max_{d_i\neq 0}\frac{(1-\sigma d_i^2)^{2^j}}{d_i}, \tag{24}$$

где d_i — диагональные элементы матрицы D, определенной формулой (6).

Доказательство. Поскольку согласно (7) $C^{-1}A^TB = VD^TU^TB$, на основании равенства (12) имеем

$$\sigma\left\{E+(E-\sigma C^{-1}A^TBA)\right\}\prod_{k=1}^{\infty}\left\{E+(E-\sigma C^{-1}A^TBA)^{2^k}\right\}C^{-1}A^TB =$$

$$= \sigma V\left\{E+(E-\sigma D^TD)\right\}\prod_{k=1}^{\infty}\left\{E+(E-\sigma D^TD)^{2^k}\right\}D^TU^TB. \tag{25}$$

Положим в (19) $x = 1-\sigma d_i^2$. В силу (9) числа $\left|1-\sigma d_i^2\right| < 1$ при $d_i^2 > 0$ и с помощью формулы (19) для $d_i^2 > 0$ получаем

$$(1+x)\prod_{k=1}^{\infty}(1+x^{2^k}) = \sigma^{-1}d_i^{-2}. \tag{26}$$

Нетрудно убедиться, что

$$[E+(E-\sigma D^T D)^{2^k}]D^T = \operatorname{diag}\{[1+(1-\sigma d_i^2)^{2^k}]d_i\}. \tag{27}$$

Тогда, учитывая (26), (27), определение матрицы D_{EE}^{+} и формулу (8), из (25) имеем

$$\sigma\left\{E+(E-\sigma C^{-1}A^T BA)\right\}\prod_{k=1}^{\infty}\left\{E+(E-\sigma C^{-1}A^T BA)^{2^k}\right\}C^{-1}A^T B =$$

$$= VD_{EE}^{+}U^T B = A_{BC}^{+}, \tag{28}$$

т. е. получили разложение (23) взвешенной псевдообратной матрицы в бесконечное матричное степенное произведение.

Теперь установим справедливость оценки (24). Поскольку

$$A_{BC}^{+} - A_{BC,j}^{+} = \sigma\left\{E+(E-\sigma C^{-1}A^T BA)\right\}\prod_{k=j}^{\infty}\left\{E+(E-\sigma C^{-1}A^T BA)^{2^k}\right\}C^{-1}A^T B,$$

по аналогии с равенством (25) имеем

$$A_{BC}^{+} - A_{BC,j}^{+} = \sigma V\left\{E+(E-\sigma D^T D)\right\}\prod_{k=j}^{\infty}\left\{E+(E-\sigma D^T D)^{2^k}\right\}D^T U^T B. \tag{29}$$

Используем (4), где сначала положим $M = E_n$, а затем для оценки второй нормы в правой части полученного неравенства положим $M = E_m$. Тогда из (29) получим

$$\left\|A_{BC}^{+} - A_{BC,j}^{+}\right\|_{CB^{-1/2}} \le$$

$$\le \sigma\|V\|_{CE_n}\left\|\left\{E_n+(E_n-\sigma D^T D)\right\}\prod_{k=j}^{\infty}\left\{E_n+(E_n-\sigma D^T D)^{2^k}\right\}D^T\right\|_{E_nE_m}\left\|U^T B\right\|_{E_mB^{-1/2}} =$$

$$= \sigma\left\|\left\{E_n+(E_n-\sigma D^T D)\right\}\prod_{k=j}^{\infty}\left\{E_n+(E_n-\sigma D^T D)^{2^k}\right\}D^T\right\|_{E_nE_m}. \tag{30}$$

На основании (26) и тождества (20) для $x = 1-\sigma d_i^2$ при $d_i^2 > 0$ имеем

$$(1+x)\prod_{k=j}^{\infty}(1+x^{2^k}) = \frac{(1-\sigma d_i^2)^{2^j}}{\sigma d_i^2}.$$

Учитывая (27) и последнее равенство, из (30) получаем (24), что и завершает доказательство теоремы 2.

Следствие 2. *Из равенства* (23) *следует справедливость соотношений*

$$A_{BC}^{+} = \sigma C^{-1}\left\{E+(E-\sigma A^T BAC^{-1})\right\}\prod_{k=1}^{\infty}\left\{E+(E-\sigma A^T BAC^{-1})^{2^k}\right\}A^T B =$$

$$= \sigma C^{-1/2}\left\{E+(E-\sigma C^{-1/2}A^T BAC^{-1/2})\right\}\prod_{k=1}^{\infty}\left\{E+(E-\sigma C^{-1/2}A^T BAC^{-1/2})^{2^k}\right\}C^{-1/2}A^T B =$$

$$= \sigma C^{-1}A^T B\left\{E+(E-\sigma AC^{-1}A^T B)\right\}\prod_{k=1}^{\infty}\left\{E+(E-\sigma AC^{-1}A^T B)^{2^k}\right\} =$$

$$= \sigma C^{-1}A^T\left\{E+(E-\sigma BAC^{-1}A^T)\right\}\prod_{k=1}^{\infty}\left\{E+(E-\sigma BAC^{-1}A^T)^{2^k}\right\}B =$$

$$= \sigma C^{-1}A^T B^{1/2}\left\{E+(E-\sigma B^{1/2}AC^{-1}A^T B^{1/2})\right\}\prod_{k=1}^{\infty}\left\{E+(E-\sigma B^{1/2}AC^{-1}A^T B^{1/2})^{2^k}\right\}B^{1/2}.$$

Таким образом, на основе тождества Эйлера получено шесть видов разложений взвешенных псевдообратных матриц с положительно определенными весами в матричные степенные произведения первого типа (с положительными показателями степеней). Четыре из них представляются посредством степеней симметризуемых матриц, а два — степеней симметричных матриц.

Из формул (11), (24) видно, что матричное степенное произведение (23) сходится быстрее, чем ряд (10), к взвешенной псевдообратной матрице, если сравнение проводить по одному и тому же фиксированному числу сомножителей и членов ряда соответственно.

В силу единственности взвешенной псевдообратной матрицы на основании (10), (23) получаем матричное тождество.

***Следствие* 3.** *Для* $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, *симметричных положительно определенных матриц* B *и* C *таких, что* $C^{-1}A^T BA$ *существует, и для действительного числа* σ, *определенного в* (9), *имеет место тождество*

$$\sigma\sum_{k=0}^{\infty}(E-\sigma C^{-1}A^T BA)^k C^{-1}A^T B =$$

$$= \sigma\left\{E+(E-\sigma C^{-1}A^T BA)\right\}\prod_{k=1}^{\infty}\left\{E+(E-\sigma C^{-1}A^T BA)^{2^k}\right\}C^{-1}A^T B.$$

Теперь на основе полученных выше результатов обоснуем матричные тождества, которые являются матричными аналогами числового тождества (20).

Поскольку

$$E+(E-\sigma D^T D)^{2^k} = \operatorname{diag}\left\{1+(1-\sigma d_i^2)^{2^k}\right\}, \quad \left|1-\sigma d_i^2\right| < 1 \text{ для } d_i^2 > 0$$

и тождество (20) имеет место при $x = 1$, в силу (20) получаем

$$\left\{E+(E-\sigma D^T D)\right\}\prod_{k=1}^{n-1}\left\{E+(E-\sigma D^T D)^{2^k}\right\} = \sum_{k=0}^{2^n-1}(E-\sigma D^T D)^k.$$

Умножим левую и правую части последнего равенства слева на σV, а справа на $D^T U^T B$. Тогда на основании равенств (12) и (25) будем иметь матричное тождество

$$\sigma\left\{E+(E-\sigma C^{-1}A^T BA)\right\}\prod_{k=1}^{n-1}\left\{E+(E-\sigma C^{-1}A^T BA)^{2^k}\right\}C^{-1}A^T B =$$

$$= \sigma\sum_{k=0}^{2^n-1}(E-\sigma C^{-1}A^T BA)^k C^{-1}A^T B, \tag{31}$$

которое в силу первого равенства из (1) и равенства $A^+_{BC}AC^{-1}A^T B = C^{-1}A^T B$, полученного в [10], можно переписать в виде

$$\sigma\left\{A_{BC}^{+}A+(A_{BC}^{+}A-\sigma C^{-1}A^{T}BA)\right\}\prod_{k=1}^{n-1}\left\{A_{BC}^{+}A+(A_{BC}^{+}A-\sigma C^{-1}A^{T}BA)^{2^k}\right\}C^{-1}A^{T}B =$$

$$= \sigma\sum_{k=0}^{2^n-1}(A_{BC}^{+}A-\sigma C^{-1}A^{T}BA)^{k}C^{-1}A^{T}B. \tag{32}$$

В работе [10] установлено, что

$$\left\|A_{BC}^{+}A - \sigma C^{-1}A^{T}BA\right\|_{CC^{-1/2}} = \rho(A_{BC}^{+}A-\sigma C^{-1}A^{T}BA) < 1. \tag{33}$$

Таким образом, получены тождества (31) и (32) при выполнении условия (33), которые являются некоторыми матричными аналогами тождества (20).

***Замечание* 4.** Из матричного тождества (31) следует справедливость еще ряда видоизмененных его вариантов, например,

$$\sigma C^{-1}A^{T}B\left\{E+(E-\sigma AC^{-1}A^{T}B)\right\}\prod_{k=1}^{n-1}\left\{E+(E-\sigma AC^{-1}A^{T}B)^{2^k}\right\} =$$

$$= \sigma C^{-1}A^{T}B\sum_{k=0}^{2^n-1}(E-\sigma AC^{-1}A^{T}B)^{k}. \tag{34}$$

4. Разложения с отрицательными показателями степеней. Сначала используем аппарат взвешенного сингулярного разложения для обоснования сходимости матричного степенного ряда с отрицательными показателями степеней, предложенного в работе [10], и для оценки близости взвешенной псевдообратной матрицы и суммы фиксированного числа членов этого ряда.

Теорема 3. *Для* $A \neq 0 \in \mathbb{R}^{m\times n}$, *симметричных положительно определенных матриц* B *и* C *таких, что* $C^{-1}A^{T}BA$ *определено, справедливы соотношения*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(E+C^{-1}A^{T}BA)^{-k}C^{-1}A^{T}B = A_{BC}^{+}, \tag{35}$$

$$\left\|A_{BC}^{+} - A_{BC,j}^{+}\right\|_{CB^{-1/2}} \leq \frac{(1+d_*^2)^{-(j-1)}}{d_*}, \tag{36}$$

где $A_{BC,j}^{+} = \sum_{k=1}^{j-1}(E+C^{-1}A^{T}BA)^{-k}C^{-1}A^{T}B$, d_* *— минимальный ненулевой диагональный элемент матрицы* D, *определенной в* (6).

Доказательство. Используя (7) и взвешенную ортогональность матриц U и V, получаем

$$(E+C^{-1}A^{T}BA)^{-k}C^{-1}A^{T}B = (E+VD^{T}DV^{T}C)^{-k}VD^{T}U^{T}B.$$

Учитывая формулу представления обратной матрицы для произведения двух невырожденных матриц и взвешенную ортогональность матрицы V с весом C, для любого $k = 1, 2, \ldots$ на основании последнего равенства имеем

$$(E+C^{-1}A^{T}BA)^{-k}C^{-1}A^{T}B = V(E+D^{T}D)^{-k}D^{T}U^{T}B \tag{37}$$

и, следовательно,

$$\sum_{k=1}^{\infty}(E+C^{-1}A^{T}BA)^{-k}C^{-1}A^{T}B = \sum_{k=1}^{\infty}V(E+D^{T}D)^{-k}D^{T}U^{T}B. \tag{38}$$

Поскольку

$$(E+D^T D)^{-k} D^T = \operatorname{diag}\{(1+d_i^2)^{-k} d_i\}, \tag{39}$$

ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(E+D^T D)^{-k} D^T$ сходится и

$$\sum_{k=1}^{\infty}(E+D^T D)^{-k} D^T = D_{EE}^{+}, \tag{40}$$

где D_{EE}^{+} — псевдообратная матрица Мура – Пенроуза к матрице D, которая входит в представление матрицы A_{BC}^{+} согласно формуле (8).

В силу (8) и (40) из (38) получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty}(E+C^{-1}A^T BA)^{-k} C^{-1}A^T B = VD_{EE}^{+}U^T B = A_{BC}^{+},$$

т. е. получили разложение (35) взвешенной псевдообратной матрицы в матричный степенной ряд.

Перейдем к доказательству оценки (36). Поскольку

$$A_{BC}^{+} - A_{BC,j}^{+} = \sum_{k=j}^{\infty}(E+C^{-1}A^T BA)^{-k} C^{-1}A^T B,$$

учитывая (37), имеем

$$A_{BC}^{+} - A_{BC,j}^{+} = \sum_{k=j}^{\infty} V(E+D^T D)^{-k} D^T U^T B. \tag{41}$$

Используем (4), где сначала положим $M = E_n$, а затем для оценки второй нормы в правой части полученного неравенства положим $M = E_m$. Тогда из (41) получим

$$\left\| A_{BC}^{+} - A_{BC,j}^{+} \right\|_{CB^{-1/2}} \le \|V\|_{CE_n} \left\| \sum_{k=j}^{\infty}(E_n+D^T D)^{-k} D^T \right\|_{E_n E_m} \left\|U^T B\right\|_{E_m B^{-1/2}} =$$

$$= \left\| \sum_{k=j}^{\infty}(E_n+D^T D)^{-k} D^T \right\|_{E_n E_m}. \tag{42}$$

Поскольку

$$\sum_{k=j}^{\infty}(1+d_i^2)^{-k} d_i = \frac{(1+d_i^2)^{-(j-1)}}{d_i}$$

при $d_i \ne 0$ и равна нулю при $d_i = 0$, учитывая (39), из неравенства (42) получаем оценку (36), что и завершает доказательство теоремы 3.

***Следствие* 4.** *Из равенства* (35) *следует справедливость соотношений*

$$A_{BC}^{+} = \sum_{k=1}^{\infty} C^{-1}(E+A^T BAC^{-1})^{-k} A^T B = \sum_{k=1}^{\infty} C^{-1/2}(E+C^{-1/2}A^T BAC^{-1/2})^{-k} C^{-1/2}A^T B.$$

Разложение (35) взвешенной псевдообратной матрицы обобщает соответствующее разложение псевдообратной матрицы Мура – Пенроуза, отмеченное в работе [17] для квадратных матриц, где эта матрица представлена в виде

$$A_{EE}^{+} = \sum_{k=1}^{\infty}(E+A^T A)^{-k} A^T.$$

Теперь покажем, что на основании (19), (20) можно представить более быстросходящееся разложение взвешенной псевдообратной матрицы в матричное степенное произведение, чем матричный ряд (35). Но для этого будем использовать другие тождества, которые получаются из (19), (20) умножением обеих частей равенств слева на x, т. е. тождества

$$x(1+x)\prod_{k=1}^{\infty}(1+x^{2^k}) = \frac{x}{1-x} \quad \text{для} \quad |x|<1, \tag{43}$$

$$x(1+x)\prod_{k=1}^{n-1}(1+x^{2^k}) = x\sum_{k=0}^{2^n-1}x^k \quad \text{для} \quad |x|<1. \tag{44}$$

Обозначим

$$A^+_{BC,j} = (E+C^{-1}A^TBA)^{-1}\left\{E+(E+C^{-1}A^TBA)^{-1}\right\} \times$$
$$\times \prod_{k=1}^{j-1}\left\{E+(E+C^{-1}A^TBA)^{-(2^k)}\right\}C^{-1}A^TB. \tag{45}$$

Теорема 4. *Для* $A \neq 0 \in \mathbb{R}^{m\times n}$, *симметричных положительно определенных матриц* B *и* C *таких, что* $C^{-1}A^TBA$ *существует, матричное степенное произведение* (45) *при* $j\to\infty$ *сходится, причем*

$$(E+C^{-1}A^TBA)^{-1}\left\{E+(E+C^{-1}A^TBA)^{-1}\right\} \times$$
$$\times \prod_{k=1}^{\infty}\left\{E+(E+C^{-1}A^TBA)^{-(2^k)}\right\}C^{-1}A^TB = A^+_{BC}, \tag{46}$$

$$\left\| A^+_{BC} - A^+_{BC,j}\right\|_{CB^{-1/2}} \le \frac{(1+d_*^2)^{-(2^j)}}{d_*}, \tag{47}$$

где матрица $A^+_{BC,j}$ *определена формулой* (45), *а* d_* — *минимальный ненулевой диагональный элемент матрицы* D, *определенной в* (6).

Доказательство. На основании (37) имеем

$$(E+C^{-1}A^TBA)^{-1}\left\{E+(E+C^{-1}A^TBA)^{-1}\right\}\prod_{k=1}^{\infty}\left\{E+(E+C^{-1}A^TBA)^{-(2^k)}\right\}C^{-1}A^TB =$$
$$= V(E+D^TD)^{-1}\left\{E+(E+D^TD)^{-1}\right\}\prod_{k=1}^{\infty}\left\{E+(E+D^TD)^{-(2^k)}\right\}D^TU^TB. \tag{48}$$

Положим в (43) $x = (1+d_i^2)^{-1}$. В силу того, что для $d_i^2>0$ числа $(1+d_i^2)^{-1} < 1$, используя тождество (43), находим

$$x(1+x)\prod_{k=1}^{\infty}(1+x^{2^k}) = d_i^{-2}, \qquad d_i^2>0. \tag{49}$$

Поскольку

$$\{E+[(E+D^TD)^{-1}]^{2^k}\}D^T = \operatorname{diag}\{[1+((1+d_i^2)^{-1})^{2^k}]d_i\}, \tag{50}$$

учитывая (49), определение матрицы D^+_{EE} и формулу (8), из (48) получаем

$$(E+C^{-1}A^TBA)^{-1}\left\{E+(E+C^{-1}A^TBA)^{-1}\right\}\prod_{k=1}^{\infty}\left\{E+(E+C^{-1}A^TBA)^{-(2^k)}\right\}C^{-1}A^TB =$$
$$= VD^+_{EE}U^TB = A^+_{BC},$$

т. е. получили разложение (46) взвешенной псевдообратной матрицы в матричное степенное произведение.

Теперь установим справедливость оценки (47). Поскольку

$$A_{BC}^{+} - A_{BC,j}^{+} = (E+C^{-1}A^TBA)^{-1}\left\{E+(E+C^{-1}A^TBA)^{-1}\right\} \times$$
$$\times \prod_{k=j}^{\infty}\left\{E+(E+C^{-1}A^TBA)^{-(2^k)}\right\}C^{-1}A^TB,$$

по аналогии с формулой (48) будем иметь

$$A_{BC}^{+} - A_{BC,j}^{+} = V(E+D^TD)^{-1}\left\{E+(E+D^TD)^{-1}\right\} \times$$
$$\times \prod_{k=j}^{\infty}\left\{E+(E+D^TD)^{-(2^k)}\right\}D^TU^TB. \tag{51}$$

Используем (4), где сначала положим $M = E_n$, а затем для оценки второй нормы в правой части полученного неравенства положим $M = E_m$. Тогда из (51) получим

$$\left\|A_{BC}^{+} - A_{BC,j}^{+}\right\|_{CB^{-1/2}} \le \|V\|_{CE_n} \times$$
$$\times \left\|(E_n+D^TD)^{-1}\left\{E_n+(E_n+D^TD)^{-1}\right\}\prod_{k=j}^{\infty}\left\{E_n+(E_n+D^TD)^{-(2^k)}\right\}D^T\right\|_{E_nE_m} \times$$
$$\times \left\|U^TB\right\|_{E_mB^{-1/2}} =$$
$$= \left\|(E_n+D^TD)^{-1}\left\{E_n+(E_n+D^TD)^{-1}\right\}\prod_{k=j}^{\infty}\left\{E_n+(E_n+D^TD)^{-(2^k)}\right\}D^T\right\|_{E_nE_m}. \tag{52}$$

На основании (49) и тождества (44), где полагаем $x = (1+d_i^2)^{-1}$, для любых $d_i^2 > 0$ имеем

$$x(1+x)\prod_{k=j}^{\infty}(1+x^{2^k}) = \frac{(1+d_i^2)^{-(2^j)}}{d_i^2}. \tag{53}$$

Учитывая (3), (50), (53), из (52) получаем (47), что и завершает доказательство теоремы 4.

***Следствие* 5.** *Из равенства* (46) *следует справедливость соотношений*

$$A_{BC}^{+} = C^{-1}(E+A^TBAC^{-1})^{-1}\left\{E+(E+A^TBAC^{-1})^{-1}\right\} \times$$
$$\times \prod_{k=1}^{\infty}\left\{E+(E+A^TBAC^{-1})^{-(2^k)}\right\}A^TB = C^{-1/2}(E+C^{-1/2}A^TBAC^{-1/2})^{-1} \times$$
$$\times \left\{E+(E+C^{-1/2}A^TBAC^{-1/2})^{-1}\right\}\prod_{k=1}^{\infty}\left\{E+(E+C^{-1/2}A^TBAC^{-1/2})^{-(2^k)}\right\}C^{-1/2}A^TB.$$

Из формул (36), (47) видно, что матричное степенное произведение (46) сходится быстрее, чем ряд (35), к взвешенной псевдообратной матрице.

В силу единственности взвешенной псевдообратной матрицы на основании (35), (46) имеем матричное тождество.

***Следствие* 6.** *Для* $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, *симметричных положительно определенных матриц* B *и* C *таких, что* $C^{-1}A^TBA$ *существует, имеет место соотношение*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(E+C^{-1}A^TBA)^{-k}C^{-1}A^TB =$$

$$= (E+C^{-1}A^TBA)^{-1}\left\{E+(E+C^{-1}A^TBA)^{-1}\right\}\prod_{k=1}^{\infty}\left\{E+(E+C^{-1}A^TBA)^{-(2^k)}\right\}C^{-1}A^TB.$$

Теперь получим тождества, которые являются некоторыми матричными аналогами числового тождества (44). Поскольку

$$E+(E+D^TD)^{-1} = \operatorname{diag}\{1+(1+d_i^2)^{-1}\},$$

для $d_i^2>0$ числа $(1+d_i^2)^{-1}<1$ и тождество (44) имеет место при $x=1$, в силу (44) можем записать

$$(E+D^TD)^{-1}\left\{E+(E+D^TD)^{-1}\right\}\prod_{k=1}^{j-1}\left\{E+(E+D^TD)^{-(2^k)}\right\} =$$

$$= (E+D^TD)^{-1}\sum_{k=0}^{2^j-1}(E+D^TD)^{-k}.$$

Умножим левую и правую части последнего равенства слева на V, а справа на D^TU^TB. Тогда на основании равенств (37) и (48) получим матричное тождество

$$(E+C^{-1}A^TBA)^{-1}\left\{E+(E+C^{-1}A^TBA)^{-1}\right\}\prod_{k=1}^{j-1}\left\{E+(E+C^{-1}A^TBA)^{-(2^k)}\right\}C^{-1}A^TB =$$

$$= (E+C^{-1}A^TBA)^{-1}\sum_{k=0}^{2^j-1}(E+C^{-1}A^TBA)^{-k}C^{-1}A^TB. \tag{54}$$

В работе [10] показано, что матрицы A_{BC}^+A и $(E+C^{-1}A^TBA)^{-1}$ коммутируют. Учитывая это обстоятельство, первое равенство из (1), равенство $A_{BC}^+AC^{-1}A^TB = C^{-1}A^TB$, полученное в [10], тождество (54) можно переписать в виде

$$A_{BC}^+A(E+C^{-1}A^TBA)^{-1}\left\{A_{BC}^+A+A_{BC}^+A(E+C^{-1}A^TBA)^{-1}\right\}\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{j-1}\left\{A_{BC}^+A+A_{BC}^+A(E+C^{-1}A^TBA)^{-(2^k)}\right\}C^{-1}A^TB =$$

$$= A_{BC}^+A(E+C^{-1}A^TBA)^{-1}\sum_{k=0}^{2^j-1}A_{BC}^+A(E+C^{-1}A^TBA)^{-k}C^{-1}A^TB. \tag{55}$$

В цитируемой выше работе также установлено, что

$$\left\|A_{BC}^+A(E+C^{-1}A^TBA)^{-1}\right\|_{CC^{-1/2}} = \rho[A_{BC}^+A(E+C^{-1}A^TBA)^{-1}] < 1. \tag{56}$$

Таким образом, получены тождества (54) и (55) при выполнении условия (56), которые являются некоторыми матричными аналогами тождества (44).

Аналогично доказательству теорем 3, 4 доказываются соответственно следующие утверждения.

Теорема 5. *Для $A\neq 0\in\mathbb{R}^{m\times n}$, симметричных положительно определенных матриц B и C таких, что $AC^{-1}A^TB$ определено, справедливы соотношения*

$$\sum_{k=1}^{\infty} C^{-1}A^T B(E+AC^{-1}A^T B)^{-k} = A_{BC}^{+} \tag{57}$$

и

$$\left\| A_{BC}^{+} - A_{BC,j}^{+} \right\|_{CB^{-1/2}} \leq \frac{(1+d_*^2)^{-(j-1)}}{d_*}, \tag{58}$$

где $A_{BC,j}^{+} = \sum_{k=1}^{j-1} C^{-1}A^T B(E+AC^{-1}A^T B)^{-k}$, d_* *— минимальный ненулевой диагональный элемент матрицы* D, *определенной в* (6).

Теорема 6. *Для* $A \neq 0 \in \mathbb{R}^{m\times n}$, *симметричных положительно определенных матриц* B *и* C *таких, что* $AC^{-1}A^T B$ *существует, справедливы соотношения*

$$C^{-1}A^T B(E+AC^{-1}A^T B)^{-1}\left\{E+(E+AC^{-1}A^T B)^{-1}\right\}\prod_{k=1}^{\infty}\left\{E+(E+AC^{-1}A^T B)^{-(2^k)}\right\} =$$

$$= A_{BC}^{+} \tag{59}$$

и

$$\left\| A_{BC}^{+} - A_{BC,j}^{+} \right\|_{CB^{-1/2}} \leq \frac{(1+d_*^2)^{-(2^j)}}{d_*}, \tag{60}$$

где

$$A_{BC,j}^{+} = C^{-1}A^T B(E+AC^{-1}A^T B)^{-1} \times$$

$$\times \left\{E+(E+AC^{-1}A^T B)^{-1}\right\}\prod_{k=1}^{j-1}\left\{E+(E+AC^{-1}A^T B)^{-(2^k)}\right\},$$

d_* *— минимальный ненулевой диагональный элемент матрицы* D, *определенной в* (6).

***Следствие* 7.** *Из равенства* (57) *следует справедливость соотношений*

$$A_{BC}^{+} = \sum_{k=1}^{\infty} C^{-1}A^T (E+BAC^{-1}A^T)^{-k} B = \sum_{k=1}^{\infty} C^{-1}A^T B^{1/2}(E+B^{1/2}AC^{-1}A^T B^{1/2})^{-k} B^{1/2}.$$

***Следствие* 8.** *Из равенства* (59) *следует*

$$A_{BC}^{+} =$$

$$= C^{-1}A^T (E+AC^{-1}A^T B)^{-1}\left\{E+(E+AC^{-1}A^T B)^{-1}\right\}\prod_{k=1}^{\infty}\left\{E+(E+AC^{-1}A^T B)^{-(2^k)}\right\}B =$$

$$= C^{-1}A^T B^{1/2}(E+B^{1/2}AC^{-1}A^T B^{1/2})^{-1}\left\{E+(E+B^{1/2}AC^{-1}A^T B^{1/2})^{-1}\right\} \times$$

$$\times \prod_{k=1}^{\infty}\left\{E+(E+B^{1/2}AC^{-1}A^T B^{1/2})^{-(2^k)}\right\}B^{1/2}.$$

В силу (57), (59) получаем такое следствие.

***Следствие* 9.** *Для* $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, *симметричных положительно определенных матриц* B *и* C *таких, что* $AC^{-1}A^T B$ *существует, имеет место тождество*

$$\sum_{k=1}^{\infty} C^{-1}A^TB(E+AC^{-1}A^TB)^{-k} =$$

$$= C^{-1}A^TB(E+AC^{-1}A^TB)^{-1}\left\{E+(E+AC^{-1}A^TB)^{-1}\right\}\prod_{k=1}^{\infty}\left\{E+(E+AC^{-1}A^TB)^{-(2^k)}\right\}.$$

***Замечание* 5.** Аналогично (54) получаем матричное тождество

$$C^{-1}A^TB(E+AC^{-1}A^TB)^{-1}\left\{E+(E+AC^{-1}A^TB)^{-1}\right\}\prod_{k=1}^{j-1}\left\{E+(E+AC^{-1}A^TB)^{-(2^k)}\right\} =$$

$$= C^{-1}A^TB(E+AC^{-1}A^TB)^{-1}\sum_{k=0}^{2^j-1}(E+AC^{-1}A^TB)^{-k}. \tag{61}$$

***Замечание* 6.** В силу единственности взвешенной псевдообратной матрицы на основании формул (10), (23), (35), (46), (57), (59) можно записать еще ряд матричных тождеств, например,

$$\sigma\sum_{k=0}^{\infty}(E-\sigma C^{-1}A^TBA)^k C^{-1}A^TB =$$

$$= C^{-1}A^TB(E+AC^{-1}A^TB)^{-1}\left\{E+(E+AC^{-1}A^TB)^{-1}\right\}\prod_{k=1}^{\infty}\left\{E+(E+AC^{-1}A^TB)^{-(2^k)}\right\}.$$

Таким образом, на основе тождества Эйлера получено шесть видов разложений (см. формулы (46), (59), следствия 5 и 8) взвешенных псевдообратных матриц с положительно определенными весами в матричные степенные произведения второго типа (с отрицательными показателями степеней). Четыре из них представляются посредством степеней симметризуемых матриц, а два — степеней симметричных матриц.

5. Построение итерационных процессов. Отметим, что разложение псевдообратной матрицы Мура – Пенроуза в матричное степенное произведение (21) использовано в работах [19, 20] для построения итерационного процесса вычисления псевдообратной матрицы Мура – Пенроуза. Естественно предположить, что полученные в настоящей работе разложения взвешенных псевдообратных матриц в матричные степенные произведения можно использовать для построения итерационных процессов вычисления взвешенных псевдообратных матриц с положительно определенными весами. Кратко остановимся на этом вопросе.

Сначала в качестве примера построения и сравнения итерационных процессов для вычисления приближений к взвешенным псевдообратным матрицам рассмотрим использование следующих разложений A_{BC}^{+} в матричные степенные ряды и в матричные степенные произведения (см. соответственно следствия 1 и 2):

$$A_{BC}^{+} = \sigma\sum_{k=0}^{\infty}C^{-1}A^TB(E-\sigma AC^{-1}A^TB)^k, \tag{62}$$

$$A_{BC}^{+} = \sigma C^{-1}A^TB\left\{E+(E-\sigma AC^{-1}A^TB)\right\}\prod_{k=1}^{\infty}\left\{E+(E-\sigma AC^{-1}A^TB)^{2^k}\right\}. \tag{63}$$

Рассмотрим разложение взвешенной псевдообратной матрицы в матричный степенной ряд (62). Положим

$$X_{k+1} = \sigma\sum_{i=0}^{k+1}C^{-1}A^TB(E-\sigma AC^{-1}A^TB)^i. \tag{64}$$

Тогда, как нетрудно убедиться, для вычисления приближения к A^+_{BC} получим итерационный процесс

$$X_0 = \sigma C^{-1}A^TB, \quad X_{k+1} = X_k(E-\sigma AC^{-1}A^TB) + \sigma C^{-1}A^TB =$$
$$= X_k + \sigma(E-X_kA)C^{-1}A^TB, \quad k = 0, 1, \ldots . \tag{65}$$

Теперь рассмотрим матричное степенное произведение (63). Положим

$$Y_{k+1} = \sigma C^{-1}A^TB\left\{E + (E-\sigma AC^{-1}A^TB)\right\}\prod_{i=1}^{k+1}\left\{E + (E-\sigma AC^{-1}A^TB)^{2^i}\right\}. \tag{66}$$

Тогда для вычисления приближения к A^+_{BC} получим итерационный процесс

$$Y_0 = \sigma C^{-1}A^TB\left\{E + (E-\sigma AC^{-1}A^TB)\right\},$$
$$Y_k = Y_{k-1}\left\{E + (E-\sigma AC^{-1}A^TB)^{2^k}\right\}, \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{67}$$

Сходимость последовательности матриц, определенных формулами (65), (67), следует из того факта, что эти последовательности построены соответственно на основе степенного матричного ряда (62) и матричного степенного произведения (63).

Для сравнения итерационных процессов используем тождество (34). Согласно этому тождеству и формулам (64), (66) имеем $Y_{n-1} = X_{2^n-1}$, т. е. на $(n-1)$-й итерации с помощью итерационного процесса (67) получим то же приближение к A^+_{BC}, что и на (2^n-1)-й итерации с помощью итерационного процесса (65).

Рассмотрим еще использование для построения итерационных процессов разложения взвешенных псевдообратных матриц в матричные степенные ряды и в матричные степенные произведения с отрицательными показателями степеней, представленные соответственно формулами (57) и (59).

Сначала рассмотрим разложение взвешенной псевдообратной матрицы в матричный степенной ряд (57). Положим

$$X_{k+1} = \sum_{i=1}^{k+1} C^{-1}A^TB(E+AC^{-1}A^TB)^{-i}. \tag{68}$$

Тогда для вычисления приближения к A^+_{BC} получим итерационный процесс

$$X_0 = 0, \quad X_{k+1} = X_k(E+AC^{-1}A^TB)^{-1} + C^{-1}A^TB(E+AC^{-1}A^TB)^{-1} =$$
$$= (X_k + C^{-1}A^TB)(E+AC^{-1}A^TB)^{-1}, \quad k = 0, 1, \ldots . \tag{69}$$

Теперь рассмотрим матричное степенное произведение (59). Положим

$$Y_{k+1} = C^{-1}A^TB(E+AC^{-1}A^TB)^{-1} \times$$
$$\times \left\{E+(E+AC^{-1}A^TB)^{-1}\right\}\prod_{i=1}^{k+1}\left\{E+(E+AC^{-1}A^TB)^{-(2^i)}\right\}. \tag{70}$$

Тогда для вычисления приближения к A^+_{BC} получим итерационный процесс

$$Y_0 = C^{-1}A^TB(E+AC^{-1}A^TB)^{-1}\left\{E+(E+AC^{-1}A^TB)^{-1}\right\},$$
$$Y_k = Y_{k-1}\left\{E+(E+AC^{-1}A^TB)^{-(2^k)}\right\}, \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{71}$$

Сходимость последовательности матриц, определенных формулами (69), (71), следует из того факта, что эти последовательности построены соответственно на основе степенного матричного ряда (57) и матричного степенного произведения (59). Качественную характеристику сходимости этих последовательностей определяют соответственно оценки (58) и (60).

В силу (61) из (68), (70) следует

$$Y_{n-1} = X_{2^n-1}(E + AC^{-1}A^T B)^{-1},$$

т. е. на $(n-1)$-й итерации с помощью итерационного процесса (71) получим то же приближение к A_{BC}^{+}, что и на 2^n-й итерации с помощью итерационного процесса (69).

1. *Chipman J. S.* On least squares with insufficient observation // J. Amer. Statist. Assoc. – 1964. – **59**, № 308. – P. 1078 – 1111.
2. *Milne R. D.* An oblique matrix pseudoinverse // SIAM J. Appl. Math. – 1968. – **16**, № 5. – P. 931 – 944.
3. *Ward J. F., Boullion T. L., Lewis T. O.* A note on the oblique matrix pseudoinverse // Ibid. – 1971. – **20**, № 2. – P. 173 – 175.
4. *Блюмин С. Л., Миловидов С. П.* Взвешенное псевдообращение в оптимальном управлении дискретно-аргументными системами // Изв. РАН. Техн. кибернетика. – 1992. – № 1. – С. 227.
5. *Pule L. D.* The weighted generalized inverse in nonlinear programming-active set selection using a variable-metric generalization of the simplex algorithm // Lect. Notes Econ. and Math. Syst. – 1977. – **174**. – P. 197 – 231.
6. *Ваарманн О.* Обобщенные обратные отображения. – Таллинн: Валгус, 1988. – 120 с.
7. *Мелешко В. И.* Применение рекуррентных оптимальных оценок с псевдообращением в задачах идентификации // Автоматика и телемеханика. – 1978. – № 9. – С. 79 – 89.
8. *Moore E. H.* On the reciprocal of the general algebraic matrix // Abstrs Bull. Amer. Math. Soc. – 1920. – **26**. – P. 394 – 395.
9. *Penrose R.* A generalized inverse for matrices // Proc. Cambridge Phill. Soc. – 1955. – **51**, № 3. – P. 406 – 413.
10. *Галба Е. Ф.* Итерационные методы для вычисления взвешенной псевдообратной матрицы // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1996. – **36**, № 6. – С. 28 – 39.
11. *Молчанов И. Н., Галба Е. Ф.* Взвешенное псевдообращение комплексных матриц // Укр. мат. журн. – 1983. – **35**, № 1. – С. 53 – 57.
12. *Галба Е. Ф.* Взвешенное сингулярное разложение и взвешенное псевдообращение матриц // Там же. – 1996. – **48**, № 10. – С. 1426 – 1430.
13. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. – М.: Наука, 1969. – 368 с.
14. *Lancaster P., Rozsa P.* Eigenvectors of H-self-adjoint matrices // Z. angew. Math. und Mech. – 1984. – **64**, № 9. – S. 439 – 441.
15. *Икрамов Х. Д.* Об алгебраических свойствах классов псевдоперестановочных и H-самосопряженных матриц // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1992. – **32**, № 8. – С. 155 – 169.
16. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. – М.: Мир, 1989. – 656 с.
17. *Ben-Israel A., Charnes A.* Contribution to the theory of generalized inverses // J. Soc. Industr. Appl. Math. – 1963. – **11**, № 3. – P. 667 – 699.
18. *Lonseth A. T.* Approximate solution of Fredholm type integral equations // Bull. Amer. Math. Soc. – 1954. – **60**. – P. 415 – 430.
19. *Ben-Israel A., Cohen D.* On iterative computation of generalized inverses and associated projections // SIAM J. Numer. Anal. – 1966. – **3**, № 3. – P. 410 – 419.
20. *Nashed M. Z.* Inner, outer, and generalized inverses in Banach and Hilbert spaces // Numer. Funct. Anal. and Optimiz. – 1987. – **9**, № 4. – P. 261 – 325.

Получено 28.11.2003