УДК 517.515

Ю. М. Березанський, В. А. Теско (Ін-т математики НАН України, Київ)

ОРТОГОНАЛЬНИЙ ПІДХІД ДО ПОБУДОВИ ТЕОРІЇ УЗАГАЛЬНЕНИХ ФУНКЦІЙ НЕСКІНЧЕННОГО ЧИСЛА ЗМІННИХ ТА ПУАССОНІВ АНАЛІЗ БІЛОГО ШУМУ*

We develop orthogonal approach to the construction at the theory of generalized functions of infinite number of variables (without using Jacobi fields), and present its application to the construction and study of Poissonian white noise analysis.

Розроблено ортогональний підхід до побудови теорії узагальнених функцій нескінченного числа змінних (без використання якобієвих полів) і наведено його застосування до побудови та вивчення пуассонового аналізу білого шуму.

0. Вступ. У попередній оглядовій роботі авторів [1] описано загальні конструкції побудови теорії узагальнених функцій нескінченного числа змінних, які ґрунтувались на понятті узагальненого зсуву. Зокрема, було описано так званий біортогональний підхід, коли простори основних функцій будуються за деякою системою функцій, а простори узагальнених функцій пов'язуються з відповідною біортогональною системою.

Дана стаття по суті продовжує роботу [1] — в ній вивчається ситуація, коли вказана система функцій є ортогональною. Це так званий ортогональний (або спектральний) підхід до побудови теорії узагальнених функцій; попередні роботи в цьому напрямку цитувались у роботі [1].

Зазначимо, що в даній роботі ми не торкаємося суто спектрального підходу, пов'язаного зі спектральною теорією якобієвих полів, коли відображення, що реалізує ізоморфізм між просторами з оснащення простору Фока та просторами, що будуються, задається відповідним перетворенням Фур'є при розкладі за сумісними узагальненими власними векторами поля. Грубо кажучи, ми припускаємо, що задіяна в [1] біортогональна система є ортогональною, і отримуємо відповідні наслідки.

Приклад ортогонального підходу — це класичний броунівський аналіз білого шуму, відповідні праці цитувались у [1]. У даній роботі ми зупинимося на іншому відомому прикладі — пуассоновому аналізі білого шуму (тобто відповідній теорії узагальнених функцій; див. [2–10]) — і покажемо, як результати цієї теорії (відомі та нові) отримуються на основі загального підходу, викладеного в [1]. Зазначимо, що подібний виклад пуассонового аналізу анонсовано в [11].

У цій роботі розглядається пуассонова міра, для якої міра інтенсивності σ є мірою Лебега на $\mathbb{R}^1$. Але отримані результати легко переносяться і на довільну неатомарну міру σ; для цього потрібно скористатися відповідними узагальненими соболевськими просторами (щодо визначення таких просторів див., наприклад, [12, 13]).

Зробимо деякі додаткові зауваження. Простори основних та узагальнених функцій в ортогональній ситуації будуються в пп. 3, 4. У п. 5 вивчаються оператори

* Виконано при частковій підтримці INTAS (проект 00-257) і DFG (проект 436 UKR 113/61).

вторинного квантування в термінах відповідного простору L^2. Зазначимо, що в різних випадках такі оператори вивчались в [14, 15, 6, 10, 16]. Пуассонів аналіз на соболевському просторі узагальнених функцій викладено в пп. 7–11, а його модифікація на простір конфігурацій — у п. 12.

1. Простір Фока та його оснащення. Введемо позначення

$$\mathbb{N}_p := \{p, p+1, \ldots\}, \quad p \in \mathbb{Z},$$

де $\mathbb{Z}$ — множина всіх цілих чисел.

Розглянемо фіксовану сім'ю $(N_p)_{p\in\mathbb{N}_0}$ дійсних сепарабельних гільбертових просторів N_p таку, що для всіх $p \in \mathbb{N}_0$ простір N_{p+1} топологічно (щільно та неперервно) та квазіядерно (оператор вкладення є оператором Гільберта–Шмідта) вкладається у простір N_p і, крім того, $\|\cdot\|_{N_p} \le \|\cdot\|_{N_{p+1}}$.

Побудуємо ядерний ланцюжок (див. [14, 17])

$$\mathcal{N}' := \operatorname*{ind\,lim}_{\tilde{p}\in\mathbb{N}_1} N_{-\tilde{p}} \supset N_{-p} \supset N_0 \supset N_p \supset \operatorname*{pr\,lim}_{\tilde{p}\in\mathbb{N}_1} N_{\tilde{p}} =: \mathcal{N}, \tag{1.1}$$

де N_{-p}, $p \in \mathbb{N}_1$, — негативний простір по відношенню до нульового N_0 та позитивного N_p. Спарювання між N_{-p} та N_p, породжене скалярним добутком $(\cdot\,,\cdot)_{N_0}$ у просторі N_0, будемо позначати $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$, нехтуючи індексом N_0.

При кожному $p \in \mathbb{Z}$ побудуємо зважений симетричний простір Фока $\mathcal{F}(N_p, \tau)$ з вагою $\tau = (\tau_n)_{n=0}^\infty$, $\tau_n > 0$, поклавши

$$\mathcal{F}(N_p, \tau) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_n(N_p)\tau_n =$$

$$= \left\{ f = (f_n)_{n=0}^\infty \mid f_n \in \mathcal{F}_n(N_p), \quad \|f\|^2_{\mathcal{F}(N_p,\tau)} = \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|^2_{\mathcal{F}_n(N_p)}\tau_n < \infty \right\},$$

де n-частинковий простір Фока $\mathcal{F}_n(N_p)$ — це n-та симетрична тензорна степінь комплексифікації $N_{p,\mathbb{C}}$ простору N_p, тобто $\mathcal{F}_n(N_p) := N_{p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes}n}$ ($N_{p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes}0} := \mathbb{C}^1$). Зрозуміло, що множина $\mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(N_p)$ фінітних послідовностей із $\mathcal{F}(N_p, \tau)$ є щільною у цьому просторі.

Зафіксуємо $K > 1$ і розглянемо сім'ю $(\tau(q))_{q\in\mathbb{N}_1}$ ваг

$$\tau(q) = (\tau_n(q))_{n=0}^\infty, \qquad \tau_n(q) = (n!)^2 K^{qn}. \tag{1.2}$$

Використавши ланцюжок (1.1) та вказану сім'ю ваг, побудуємо ядерний ланцюжок

$$\begin{gathered} \mathcal{F}(\mathcal{N}') \supset \mathcal{F}(N_{-p}, \tau_F(q)) \supset F(N_0) \supset \mathcal{F}(N_p, \tau(q)) \supset \mathcal{F}(\mathcal{N}), \\ \mathcal{F}(\mathcal{N}) := \operatorname*{pr\,lim}_{\tilde{p},\,\tilde{q}\in\mathbb{N}_1} \mathcal{F}(N_{\tilde{p}}, \tau(\tilde{q})), \qquad \mathcal{F}(\mathcal{N}') := \operatorname*{ind\,lim}_{\tilde{p},\,\tilde{q}\in\mathbb{N}_1} \mathcal{F}(N_{-\tilde{p}}, \tau_F(\tilde{q})). \end{gathered} \tag{1.3}$$

Тут $\mathcal{F}(N_{-p}, \tau_F(q))$, $\tau_F(q) := (K^{-qn})_{n=0}^\infty$, — негативний простір по відношенню до нульового $F(N_0) := \mathcal{F}(N_0, (n!)_{n=0}^\infty)$ та позитивного $\mathcal{F}(N_p, \tau(q))$. Зауважимо, що *далі скрізь під вагою* $\tau(q)$ *будемо розуміти вагу* (1.2), *а під вагою* $\tau_F(q)$ — *вагу* $(K^{-qn})_{n=0}^\infty$.

„Координатно" спарювання $\langle\cdot,\cdot\rangle_{F(N_0)}$ між $\mathcal{F}(N_{-p},\tau_F(q))$ та $\mathcal{F}(N_p,\tau(q))$, породжене скалярним добутком $(\cdot,\cdot)_{F(N_0)}$ у просторі $F(N_0)$, допускає зображення: для довільних $\xi=(\xi_n)_{n=0}^{\infty}\in\mathcal{F}(N_{-p},\tau_F(q))$, $f=(f_n)_{n=0}^{\infty}\in\mathcal{F}(N_p,\tau(q))$

$$\langle\xi,f\rangle_{F(N_0)}=\sum_{n=0}^{\infty}\langle\xi_n,f_n\rangle_{\mathcal{F}_n(N_0)}n!,$$

де через $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{F}_n(N_0)}$ позначено комплексне спарювання між $\mathcal{F}_n(N_{-p})$ та $\mathcal{F}_n(N_p)$, породжене скалярним добутком $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{F}_n(N_0)}$ у просторі $\mathcal{F}_n(N_0)$. Поряд із комплексним спарюванням $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{F}_n(N_0)}$ будемо використовувати дійсне спарювання $\langle\cdot,\cdot\rangle:=\langle\cdot,\bar{\cdot}\rangle_{\mathcal{F}_n(N_0)}$, де символом $^-$ позначено комплексне спряження.

Введемо потрібні в подальшому позначення: для даної лінійної підмножини $D\subset N_0$ позначимо через $\mathring{\mathcal{F}}_n(D)\subset\mathcal{F}_n(N_0)$, $n\in\mathbb{N}_1$, лінійну оболонку множини векторів

$$\left\{\varphi_1\hat{\otimes}\ldots\hat{\otimes}\varphi_n\,|\,\varphi_i\in D_{\mathbb{C}},\quad i=1,\ldots,n\right\}$$

($D_{\mathbb{C}}$ – комплексифікація D), а через $\mathring{\mathcal{F}}_{\mathrm{fin}}(D)\subset\mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(N_0)$ підмножину фінітних векторів з компонентами із $\mathring{\mathcal{F}}_n(D)$. Зазначимо, що завдяки поляризаційній тотожності

$$\mathring{\mathcal{F}}_n(D):=\text{л.о.}\left\{\varphi_1\hat{\otimes}\ldots\hat{\otimes}\varphi_n\,|\,\varphi_i\in D_{\mathbb{C}},\quad i=1,\ldots,n\right\}=\text{л.о.}\left\{\varphi^{\otimes n}\,|\,\varphi\in D_{\mathbb{C}}\right\}$$

для всіх $n\in\mathbb{N}_1$.

2. Оператори знищення та народження. На множині $\mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(N_p)$, $p\in\mathbb{Z}$, визначимо лінійний оператор $a_+(\xi_m)$ з коефіцієнтом $\xi_m\in\mathcal{F}_m(N_s)$, $m\in\mathbb{N}_0$, $s\in\mathbb{N}_p$ (так званий оператор народження), поклавши

$$a_+(\xi_m)\eta=a_+(\xi_m)(\eta_0,\eta_1,\ldots):=\Big(\underbrace{0,\ldots,0}_{m},\xi_m\hat{\otimes}\eta_0,\xi_m\hat{\otimes}\eta_1,\ldots\Big),$$
$$(a_+(\xi_m)\eta)_n:=\begin{cases}\xi_m\hat{\otimes}\eta_{n-m}\in\mathcal{F}_n(N_p), & \text{якщо}\quad n\in\mathbb{N}_m,\\ 0\in\mathcal{F}_n(N_p), & \text{якщо}\quad n=0,\ldots,m-1,\end{cases}\tag{2.1}$$

для довільного $\eta=(\eta_n)_{n=0}^{\infty}\in\mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(N_p)$.

Поряд з оператором (2.1) на множині $\mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(N_p)$, $p\in\mathbb{N}_0$, визначимо лінійний оператор $a_-(\xi_m)$ з коефіцієнтом $\xi_m\in\mathcal{F}_m(N_{-p})$, $m\in\mathbb{N}_0$ (так званий оператор знищення), поклавши

$$a_-(\xi_m)f=a_-(\xi_m)(f_0,f_1,\ldots):=\left(m!f_m^{\xi_m},\ldots,\frac{n!}{(n-m)!}f_n^{\xi_m},\ldots\right),$$
$$(a_-(\xi_m)f)_n:=\frac{(n+m)!}{n!}f_{n+m}^{\xi_m}\in\mathcal{F}_n(N_p),\quad n\in\mathbb{N}_0,\tag{2.2}$$

для довільного $f=(f_n)_{n=0}^{\infty}\in\mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(N_p)$. Елемент $f_n^{\xi_m}\in\mathcal{F}_{n-m}(N_p)$, $n\in\mathbb{N}_m$, із (2.2) однозначно визначається з рівності (див., наприклад, [1], п. 5)

$$\langle f_n, \xi_m \hat{\otimes} \eta_{n-m} \rangle = \langle f_n^{\xi_m}, \eta_{n-m} \rangle, \tag{2.3}$$

справедливої для довільного $\eta_{n-m} \in \mathcal{F}_{n-m}(N_{-p})$.

Має місце таке твердження (див., наприклад, [1], леми 11.1 – 11.3).

Твердження 2.1. *При фіксованому $\xi_m \in \mathcal{F}_m(N_{-p})$, $m \in \mathbb{N}_0$, $p \in \mathbb{N}_1$, відображення*

$$\mathcal{F}(N_p, \tau(q)) \supset \mathcal{F}_{\text{fin}}(N_p) \ni f \mapsto a_-(\xi_m) f \in \mathcal{F}(N_p, \tau(q)),$$

$$\mathcal{F}(N_{-p}, \tau_F(q)) \supset \mathcal{F}_{\text{fin}}(N_{-p}) \ni \eta \mapsto a_+(\xi_m)\eta \in \mathcal{F}(N_{-p}, \tau_F(q))$$

є неперервними і після замикання за неперервністю є лінійними неперервними операторами (ми зберігаємо позначення $a_-(\xi_m)$ та $a_+(\xi_m)$ для відповідних замикань), спряженими щодо ланцюжка (1.3). *Точніше,*

$$\langle a_+(\bar{\xi}_m)\eta, f \rangle_{F(N_0)} = \langle \eta, a_-(\xi_m) f \rangle_{F(N_0)}$$

для довільних $\eta \in \mathcal{F}(N_{-p}, \tau_F(q))$ та $f \in \mathcal{F}(N_p, \tau(q))$.

***Зауваження* 2.1.** Якщо $\xi_m \in \mathcal{F}_m(N_{-p})$, $m \in \mathbb{N}_0$, $p \in \mathbb{N}_1$, то $\xi_m \in \mathcal{F}_m(N_{-p'})$ для всіх $p' \in \mathbb{N}_p$. Тому оператор $a_-(\xi_m)$ діє неперервно в кожному просторі $\mathcal{F}(N_{p'}, \tau(q))$, $q \in \mathbb{N}_1$, і, крім того, задовольняє оцінку (див. [1], лема 11.1)

$$\|a_-(\xi_m) f\|_{\mathcal{F}(N_{p'}, \tau(q))} \le K^{-\frac{qm}{2}} \|\xi_m\|_{\mathcal{F}_m(N_{-p'})} \|f\|_{\mathcal{F}(N_{p'}, \tau(q))}, \quad f \in \mathcal{F}(N_{p'}, \tau(q)). \tag{2.4}$$

Спряжений до нього (щодо $F(N_0)$) оператор $a_+(\xi_m)$ діє неперервно у негативних просторах $\mathcal{F}(N_{-p'}, \tau_F(q))$ і задовольняє аналогічну оцінку.

3. Оператори узагальненого зсуву та пов'язані з ними об'єкти. Нехай Q — сепарабельний метричний простір точок $x, y, \ldots$. Позначимо через $C(Q)$ лінійний простір всіх комплекснозначних локально обмежених (тобто обмежених на кожній кулі в Q) неперервних функцій на Q. Зручно вважати, що $C(Q)$ — топологічний простір зі збіжністю, рівномірною на кожній кулі з Q.

Припустимо, що у просторі $C(Q)$ задано сім'ю $T = (T_x)_{x \in Q}$ лінійних операторів (так званих операторів узагальненого зсуву), які мають такі властивості:

а) $(T_x f)(y) = (T_y f)(x)$, $x, y \in Q$, для довільної функції $f \in C(Q)$ („комутативність");

б) існує точка $e \in Q$ („базисна одиниця") така, що $T_e = \mathrm{id}$ (id — тотожний оператор);

в) для довільних $x, y \in Q$ існує куля $W_{x,y} \subset Q$ така, що для довільної функції $f \in C(Q)$ значення $(T_x f)(y)$ не залежить від значень $f(s)$ при $s \in Q \backslash W_{x,y}$ („локальність");

г) для довільних $x, y \in Q$ лінійне відображення $C(Q) \ni f \mapsto (T_x f)(y) \in \mathbb{C}^1$ є неперервним („неперервність").

Функцію $\chi \in C(Q)$, яка тотожно не дорівнює нулю, назвемо характером сім'ї T, якщо вона має таку властивість:

$$(T_x \chi)(y) = \chi(x)\chi(y), \quad x, y \in Q.$$

Будемо вважати, що функція $\chi(x) = 1$, $x \in Q$, є характером (одиничним характером).

Нехай B_0 — деякий окіл нуля у просторі $N_{1,\mathbb{C}}$ і

$$Q \times B_0 \ni \{x, \lambda\} \mapsto \chi(x, \lambda) \in \mathbb{C}^1$$

— задана функція. *Припустимо, що для кожного $x \in Q$ $\chi(x, \cdot)$ є аналітичною в нулі простору $N_{1,\mathbb{C}}$ функцією змінної λ, для кожного $\lambda \in B_0$ $\chi(\cdot, \lambda)$ є характером сім'ї T. Крім того, будемо вважати, що $\chi(\cdot, \lambda)$ локально обмежена рівномірно по відношенню до λ із довільної замкненої кулі з B_0 і $\chi(x, 0) = 1$ для всіх x із Q.*

Із аналітичності випливає (див., наприклад, [1], пп. 2, 3), що для кожної точки $x \in Q$ існує окіл

$$B_\chi(x) = \left\{ \lambda \in N_{2,\mathbb{C}} \mid \|\lambda\|_{N_{2,\mathbb{C}}} < R_\chi(x),\ R_\chi(x) > 0 \right\} \subset B_0$$

такий, що

$$\chi(x, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle \lambda^{\otimes n}, \chi_n(x) \rangle \tag{3.1}$$

для всіх λ із $B_\chi(x)$. Причому ряд (3.1) рівномірно збігається на кожній замкненій кулі з $B_\chi(x)$. Коефіцієнти $\chi_n(x) \in \mathcal{F}_n(N_{-2})$ називають *характерами Дельсарта.*

Припустимо, що для всіх x із Q існує спільний окіл

$$B_\chi = \left\{ \lambda \in N_{2,\mathbb{C}} \mid \|\lambda\|_{N_{2,\mathbb{C}}} < R_\chi, \quad R_\chi > 0 \right\} \subset B_0,$$

в якому функцію $\chi(x, \cdot)$ можна подати у вигляді (3.1).

Зазначимо, що за такої функції χ кожен вектор $f_n \in \mathcal{F}_n(N_p)$, $n \in \mathbb{N}_0$, $p \in \mathbb{N}_3$, породжує функцію

$$Q \ni x \mapsto \langle f_n, \chi_n(x) \rangle \in \mathbb{C}^1$$

із простору $C(Q)$ (див., наприклад, [1], лема 3.2), котру можна зобразити в термінах даної функції. Для цього потрібно скористатися поляризаційною тотожністю, неперервністю спарювання $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ та очевидною формулою

$$\langle \varphi^{\otimes n}, \chi_n(x) \rangle = \frac{d^n}{dz^n} \chi(x, z\varphi) \bigg|_{z=0}, \tag{3.2}$$

справедливою для довільного φ із $N_{2,\mathbb{C}}$.

Нехай ρ — фіксована борелева ймовірнісна міра на Q, $(L^2_\rho) := L^2(Q, d\rho(x))$ — відповідний L^2-простір. *Припустимо, що узагальнене перетворення Лапласа*

$$N_{1,\mathbb{C}} \ni \lambda \mapsto \widehat{\rho}(\lambda) := \int_Q \chi(x, \lambda) d\rho(x) \in \mathbb{C}^1$$

визначене і є аналітичною функцією в $0 \in N_{1,\mathbb{C}}$.

Оскільки $\widehat{\rho}(0) = \rho(Q) = 1$, то $N_{1,\mathbb{C}} \ni \lambda \mapsto \dfrac{1}{\widehat{\rho}(\lambda)} \in \mathbb{C}^1$ є аналітичною в $0 \in N_{1,\mathbb{C}}$ функцією. Тому для кожного $x \in Q$ функція $\omega(x, \lambda) := \dfrac{\chi(x, \lambda)}{\widehat{\rho}(\lambda)}$ є аналітичною за змінною λ в нулі простору $N_{1,\mathbb{C}}$ і допускає зображення

$$\omega(x,\lambda) := \frac{\chi(x,\lambda)}{\widehat{\rho}(\lambda)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\langle \lambda^{\otimes n}, \omega_n(x)\rangle, \tag{3.3}$$

$$\lambda \in B_\omega = \Big\{ \lambda \in N_{2,\mathbb{C}} \mid \|\lambda\|_{N_{2,\mathbb{C}}} < R_\omega, \quad R_\omega > 0 \Big\} \subset B_\chi,$$

з коефіцієнтами $Q \ni x \mapsto \omega_n(x) \in \mathcal{F}_n(N_{-2})$ — *характерами Аппеля.*

Твердження 3.1. *Співвідношення ортогональності*

$$\int_Q \langle \varphi_n, \omega_n(x)\rangle \overline{\langle \psi_m, \omega_m(x)\rangle} d\rho(x) = \delta_{n,m} n! \langle \varphi_n, \overline{\psi_n}\,\rangle, \tag{3.4}$$

$$\varphi_n \in \mathcal{F}_n(\mathcal{N}), \quad \psi_m \in \mathcal{F}_m(\mathcal{N}), \qquad n,m \in \mathbb{N}_0,$$

є справедливим тоді і тільки тоді, коли існує $p \in \mathbb{N}_2$ таке, що

$$\Big\| \|\omega_n(\cdot)\|_{\mathcal{F}_n(N_{-p})} \Big\|_{(L^2)} \le LC^n n! \quad \text{для деяких} \quad C > 0, \quad L > 0 \quad \text{та всіх} \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{3.5}$$

і для довільних φ, $\psi \in \mathcal{N}_{\mathbb{C}}$, $\|\varphi\|_{N_{p,\mathbb{C}}}$, $\|\psi\|_{N_{p,\mathbb{C}}} < \min\{R_\omega, C^{-1}\}$

$$\int_Q \omega(x,\varphi)\overline{\omega(x,\psi)} d\rho(x) = \exp\langle \varphi, \overline{\psi}\,\rangle. \tag{3.6}$$

Доведення. Необхідність. Згідно з твердженням 7.2 із [1], якщо має місце співвідношення ортогональності (3.4), то має місце й оцінка (3.5). Крім того, за наявності цього співвідношення для всіх λ із B_ω ряд $\omega(\cdot,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\langle \lambda^{\otimes n}, \omega_n(\cdot)\rangle$ збігається у топології простору (L^2_ρ). Врахувавши останнє та (3.4), для φ, $\psi \in \mathcal{N}_{\mathbb{C}}$, $\|\varphi\|_{N_{p,\mathbb{C}}}$, $\|\psi\|_{N_{p,\mathbb{C}}} < \min\{R_\omega, C^{-1}\}$, отримаємо

$$\int_Q \omega(x,\varphi)\overline{\omega(x,\psi)} d\rho(x) = (\omega(\cdot,\varphi), \omega(\cdot,\psi))_{(L^2_\rho)} =$$

$$= \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{1}{n!m!} \Big(\langle \varphi^{\otimes n}, \omega_n(\cdot)\rangle, \langle \psi^{\otimes m}, \omega_m(\cdot)\rangle \Big)_{(L^2_\rho)} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle \varphi, \overline{\psi}\rangle^n = \exp\langle \varphi, \overline{\psi}\rangle.$$

Достатність. Припустимо, що існує $p \in \mathbb{N}_2$ таке, що оцінка (3.5) і рівність (3.6) виконуються. Нехай вектори φ та ψ такі, як і в умові твердження. Подавши їх у вигляді

$$\varphi = z_1 \tilde{\varphi}, \qquad \psi = z_2 \tilde{\psi},$$

$$\tilde{\varphi}, \tilde{\psi} \in \mathcal{N}_{\mathbb{C}}, \quad \|\tilde{\varphi}\|_{N_{p,\mathbb{C}}} = \|\tilde{\psi}\|_{N_{p,\mathbb{C}}} = 1;$$

$$z_1, \ z_2 \in \mathbb{C}^1, \quad |z_1|, \ \ |z_2| < \min\{R_\omega, C^{-1}\},$$

та врахувавши, що для $\lambda = \varphi, \psi$ ряд (3.3) збігається у топології простору (L^2_ρ) до $\omega(\cdot, \varphi)$ та $\omega(\cdot, \psi)$ відповідно (див. [1], лема 4.1), отримаємо

$$\int_Q \omega(x, z_1\tilde{\varphi})\overline{\omega(x, z_2\tilde{\psi})}d\rho(x) = (\omega(\cdot, z_1\tilde{\varphi}), \omega(\cdot, z_2\tilde{\psi}))_{(L^2_\rho)} =$$

$$= \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{z_1^n \bar{z}_2^m}{n!m!}\Big(\langle\tilde{\varphi}^{\otimes n}, \omega_n(\cdot)\rangle, \langle\tilde{\psi}^{\otimes m}, \omega_m(\cdot)\rangle\Big)_{(L^2_\rho)} =$$

$$= \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{z_1^n \bar{z}_2^m}{n!m!} \int\limits_Q \langle\tilde{\varphi}^{\otimes n}, \omega_n(x)\rangle\overline{\langle\tilde{\psi}^{\otimes m}, \omega_m(x)\rangle}d\rho(x). \tag{3.7}$$

З іншого боку, на підставі (3.6) маємо

$$\int\limits_Q \omega(x, z_1\tilde{\varphi})\overline{\omega(x, z_2\tilde{\psi})}d\rho(x) = \exp(z_1\bar{z}_2\langle\tilde{\varphi}, \overline{\tilde{\psi}}\rangle) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_1^n \bar{z}_2^n}{n!}\Big\langle\tilde{\varphi}^{\otimes n}, \overline{\tilde{\psi}}^{\otimes n}\Big\rangle. \tag{3.8}$$

Таким чином, для функції від z_1, z_2, що знаходиться у лівій частині (3.7), маємо два зображення: (3.7) і (3.8). Порівнюючи коефіцієнти в цих двох зображеннях, одержуємо

$$\int\limits_Q \langle\tilde{\varphi}^{\otimes n}, \omega_n(x)\rangle\overline{\langle\tilde{\psi}^{\otimes m}, \omega_m(x)\rangle}d\rho(x) = \delta_{n,m}n!\Big\langle\tilde{\varphi}^{\otimes n}, \overline{\tilde{\psi}}^{\otimes n}\Big\rangle.$$

Використовуючи поляризаційну тотожність, лінійність по $\tilde{\varphi}^{\otimes n}$, антилінійність по $\tilde{\psi}^{\otimes n}$ та неперервність скалярного добутку (а також спарювання $\langle\cdot, \cdot\rangle$), переконуємось у справедливості (3.4) для довільних векторів $\varphi_n \in \mathcal{F}_n(\mathcal{N})$, $\psi_m \in \mathcal{F}_m(\mathcal{N})$.

Твердження доведено.

***Зауваження* 3.1.** Нехай $Q = N_{-1}$. Борелеву ймовірнісну міру ρ на Q називають аналітичною, якщо її перетворення Лапласа

$$l_\rho(\lambda) = \int\limits_{N_{-1}} \exp\langle x, \lambda\rangle d\rho(x), \quad \lambda \in N_{1,\mathbb{C}},$$

є аналітичною функцією в нулі простору $N_{1,\mathbb{C}}$.

У випадку, коли міра ρ є аналітичною і

$$\omega(x, \lambda) = \frac{\exp\langle x, \alpha(\lambda)\rangle}{l_\rho(\alpha(\lambda))}, \qquad x \in Q = N_{-1}, \quad \lambda \in N_{1,\mathbb{C}}$$

($\alpha : N_{1,\mathbb{C}} \to N_{1,\mathbb{C}}$ — аналітична й оборотна функція в околі $0 \in N_{1,\mathbb{C}}$, $\alpha(0) = 0$), оцінка (3.5) виконується автоматично (див. [18, 19]). Крім того, лінійна оболонка функцій $Q \ni x \mapsto \langle\varphi_n, \omega_n(x)\rangle \in \mathbb{C}^1$, $\varphi_n \in \mathcal{F}_n(\mathcal{N})$, $n \in \mathbb{N}_0$ (у цьому випадку неперервних поліномів), є щільною у просторі (L^2_ρ) (див. [20], розд. 2, § 10, теорема 1).

4. Простори основних та узагальнених функцій. *Припустимо, що функції* $Q \ni x \mapsto \langle\varphi_n, \omega_n(x)\rangle \in \mathbb{C}^1$, $\varphi_n \in \mathcal{F}_n(\mathcal{N})$, $n \in \mathbb{N}_0$, *задовольняють співвідношення ортогональності* (3.4) *і їхня лінійна оболонка є щільною у просторі* (L^2_ρ).

Завдяки останньому припущенню відображення

$$F(N_0) \ni f = (f_n)_{n=0}^{\infty} \mapsto (I_\rho f)(\cdot) := \sum_{n=0}^{\infty} \langle f_n, \omega_n(\cdot) \rangle \in (L^2_\rho) \tag{4.1}$$

визначене і є унітарним оператором [1] (п. 7). Тут

$$\langle f_n, \omega_n(\cdot) \rangle := \lim_{k\to\infty} \langle \varphi_n^{(k)}, \omega_n(\cdot) \rangle \in (L^2_\rho), \qquad f_n \in \mathcal{F}_n(N_0), \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{4.2}$$

де $(\varphi_n^{(k)})_{k=0}^{\infty} \subset \mathcal{F}_n(\mathcal{N})$ — довільна послідовність, збіжна до f_n у топології простору $\mathcal{F}_n(N_0)$ (в (4.2) границю розуміємо в (L^2_ρ)).

З огляду на те, що оператор I_ρ (4.1) реалізує унітарний ізоморфізм між простором Фока $F(N_0)$ і простором (L^2_ρ), природно будувати оснащення простору (L^2_ρ) (тобто простори основних та узагальнених функцій) як образ оснащення (1.3) простору $F(N_0)$ при відображенні I_ρ. Точніше, образ $I_\rho(\mathcal{F}(N_p, \tau(q))) =: H^\omega(p,q) \subset$ $\subset (L^2_\rho)$ з топологією $\mathcal{F}(N_p, \tau(q))$ є гільбертовим простором, щільно та неперервно вкладеним у (L^2_ρ) і породжуючим ядерне оснащення: для будь-яких p, $q \in \mathbb{N}_1$

$$\begin{gathered}(\Phi^\omega)' \supset H^\omega(-p,-q) \supset (L^2_\rho) \supset H^\omega(p,q) \supset \Phi^\omega, \\ \Phi^\omega := \operatorname*{pr\,lim}_{\tilde{p},\, \tilde{q} \in \mathbb{N}_1} H^\omega(\tilde{p}, \tilde{q}), \qquad (\Phi^\omega)' := \operatorname*{ind\,lim}_{\tilde{p},\, \tilde{q} \in \mathbb{N}_1} H^\omega(-\tilde{p}, -\tilde{q}),\end{gathered} \tag{4.3}$$

де $H^\omega(-p,-q)$ — негативний простір по відношенню до нульового (L^2_ρ) та позитивного $H^\omega(p,q)$. За визначенням

$$H^\omega(p,q) := I_\rho(\mathcal{F}(N_p, \tau(q))) =$$

$$= \left\{ f \in (L^2_\rho) \mid \exists (f_n)_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{F}(N_p, \tau(q)) : \quad f(\cdot) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f_n, \omega_n(\cdot) \rangle \right\}$$

є гільбертовим простором з гільбертовою нормою

$$\|f\|_{H^\omega(p,q)} = \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \langle f_n, \omega_n(\cdot) \rangle \right\|_{H^\omega(p,q)} := \|(f_n)_{n=0}^{\infty}\|_{\mathcal{F}(N_p, \tau(q))}. \tag{4.4}$$

***Зауваження* 4.1.** Наявність породжуючої функції ω (з вказаними вище властивостями) для характерів Аппеля $\omega_n(x)$ дає можливість стверджувати (див. [1], п. 7), що кожен ряд (сталу $K > 1$ із (1.2) вибираємо достатньо великою)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \langle f_n, \omega_n(\cdot) \rangle, \qquad (f_n)_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{F}(N_p, \tau(q)), \quad p \in \mathbb{N}_3, \quad q \in \mathbb{N}_1,$$

збігається у топології простору $C(Q)$ до неперервної локально обмеженої функції $f \in C(Q)$. Крім того, для кожної кулі $U \subset C(Q)$ існує стала $c = c(U) > 0$ така, що

$$|f(x)| \le c \|f\|_{H^\omega(p,q)}, \qquad x \in U, \quad f \in H^\omega(p,q). \tag{4.5}$$

Як результат, *простір* $H^\omega(p,q)$, $p \in \mathbb{N}_3$, $q \in \mathbb{N}_1$, *неперервно вкладається у простір* $C(Q)$, і його можна інтерпретувати як множину неперервних функцій

$$H^\omega(p,q) = \left\{ f \in C(Q) \mid \exists (f_n)_{n=0}^\infty \in \mathcal{F}(N_p, \tau(q)) : \, f(x) = \sum_{n=0}^\infty \langle f_n, \omega_n(x) \rangle, \, x \in Q \right\} \tag{4.6}$$

з гільбертовою нормою (4.4).

Неважко бачити, що відображення

$$\mathcal{F}(N_{-p}, \tau_F(q)) \supset F(N_0) \ni f = (f_n)_{n=0}^\infty \mapsto (I_\rho f)(\cdot) =$$

$$= \sum_{n=0}^\infty \langle f_n, \omega_n(\cdot) \rangle \, \in H^\omega(-p,-q)$$

є ізометричним і після замикання за неперервністю реалізує унітарний ізоморфізм між $\mathcal{F}(N_{-p}, \tau_F(q))$ та $H^\omega(-p,-q)$, p, $q \in \mathbb{N}_1$. Як наслідок, негативний простір узагальнених функцій $H^\omega(-p,-q)$, $p, q \in \mathbb{N}_1$, допускає зображення

$$H^\omega(-p,-q) = \left\{ \xi(\cdot) = \sum_{n=0}^\infty \langle \xi_n, \omega_n(\cdot) \rangle, \right.$$

$$\left. (\xi_n)_{n=0}^\infty \in \mathcal{F}(N_{-p}, \tau_F(q)) \, \middle| \, \|\xi\|_{H^\omega(-p,-q)} = \|(\xi_n)_{n=0}^\infty\|_{\mathcal{F}(N_{-p}, \tau_F(q))} \right\}.$$

Тут

$$\langle \xi_n, \omega_n(\cdot) \rangle := \lim_{k \to \infty} \langle f_n^{(k)}, \omega_n(\cdot) \rangle \in H^\omega(-p,-q), \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{4.7}$$

де $(f_n^{(k)})_{k=0}^\infty \subset \mathcal{F}_n(N_0)$ — довільна послідовність, збіжна до $\xi_n \in \mathcal{F}_n(N_{-p})$ у топології простору $\mathcal{F}_n(N_{-p})$ (в (4.7) границю розуміємо в $H^\omega(-p,-q)$).

„Координатно" спарювання $\langle\!\langle \cdot \, , \cdot \rangle\!\rangle$ між $H^\omega(-p,-q)$ та $H^\omega(p,q)$, $p, q \in \mathbb{N}_1$, породжене скалярним добутком $(\cdot \, , \cdot)_{(L^2_\rho)}$ у просторі (L^2_ρ), допускає зображення

$$\langle\!\langle \xi, f \rangle\!\rangle = \left\langle (\xi_n)_{n=0}^\infty, (f_n)_{n=0}^\infty \right\rangle_{F(N_0)} = \sum_{n=0}^\infty \langle \xi_n, f_n \rangle_{\mathcal{F}_n(N_0)} n! \tag{4.8}$$

для довільних

$$\xi(\cdot) = \sum_{n=0}^\infty \langle \xi_n, \omega_n(\cdot) \rangle \in H^\omega(-p,-q), \qquad f(\cdot) = \sum_{n=0}^\infty \langle f_n, \omega_n(\cdot) \rangle \in H^\omega(p,q).$$

***Зауваження* 4.2.** У просторі $H^\omega(p,q)$, $p, q \in \mathbb{N}_1$, оператор знищення $\partial(\xi_n)$ з коефіцієнтом $\xi_n \in \mathcal{F}_n(N_{-p})$, $n \in \mathbb{N}_0$, визначається так:

$$\partial(\xi_n) := I_\rho a_-(\xi_n) I_\rho^{-1} : H^\omega(p,q) \to H^\omega(p,q), \tag{4.9}$$

де $a_-(\xi_n) : \mathcal{F}(N_p, \tau(q)) \to \mathcal{F}(N_p, \tau(q))$ діє за правилом (2.2). Спряженим до $\partial(\xi_n)$ щодо ланцюжка (4.3) є оператор народження

$$\partial^+(\bar{\xi}_n) := I_\rho a_+(\bar{\xi}_n) I_\rho^{-1} : H^\omega(-p,-q) \to H^\omega(-p,-q).$$

На підставі леми 12.5 та теореми 12.2 із [1] простір $H^{\omega}(-p,-q)$, $p,q \in \mathbb{N}_1$, допускає зображення

$$H^{\omega}(-p,-q) = \Big\{ \xi = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{Q}(\xi_n),$$

$$(\xi_n)_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{F}(N_{-p}, \tau_F(q)) \;\Big|\; \|\xi\|_{H^{\omega}(-p,-q)} = \|(\xi_n)_{n=0}^{\infty}\|_{\mathcal{F}(N_{-p},\tau_F(q))} \Big\} \tag{4.10}$$

з кохарактерами Аппеля

$$\mathcal{Q}(\xi_n) := \partial^{+}(\bar{\xi}_n)1 \in H^{\omega}(-p,-q), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Останні пов'язані з функціями $Q \ni x \mapsto \langle f_m, \omega_m(x)\rangle \in \mathbb{C}^1$, $f_m \in \mathcal{F}_m(N_p)$, $m \in \mathbb{N}_0$, співвідношенням біортогональності

$$\langle\!\langle\, \mathcal{Q}(\xi_n), \langle f_m, \omega_m(\cdot)\rangle \,\rangle\!\rangle = \delta_{n,m} n! \langle \xi_n, \overline{f_n}\rangle. \tag{4.11}$$

Порівнюючи (4.8) з (4.11), приходимо до висновку, що

$$\mathcal{Q}(\xi_n) = \langle \xi_n, \omega_n(\cdot)\rangle, \quad \xi_n \in \mathcal{F}_n(N_{-p}),$$

як елементи простору $H^{\omega}(-p,-q)$, $p,q \in \mathbb{N}_1$.

Поряд з $H^{\omega}(p,q)$ в якості просторів основних функцій можна використовувати простори $H^{\chi}(p,q)$, побудовані за характерами Дельсарта $\chi_n(x)$. Точніше, при фіксованих $p,q \in \mathbb{N}_3$ та достатньо великому $K > 1$ (K із (1.2)) відображення

$$\mathcal{F}(N_p, \tau(q)) \ni f = (f_n)_{n=0}^{\infty} \mapsto (I^{\chi} f)(\cdot) := \sum_{n=0}^{\infty} \langle f_n, \chi_n(\cdot)\rangle \in C(Q) \tag{4.12}$$

визначене і є ін'єктивним (див. [1], п. 5). Тому

$$H^{\chi}(p,q) := I^{\chi}(\mathcal{F}(N_p, \tau(q))) =$$

$$= \Big\{ f \in C(Q) \,|\, \exists (f_n)_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{F}(N_p, \tau(q)) : \; f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f_n, \chi_n(x)\rangle, \quad x \in Q \Big\} \tag{4.13}$$

є гільбертовим простором з гільбертовою нормою

$$\|f\|_{H^{\chi}(p,q)} := \Big\| \sum_{n=0}^{\infty} \langle f_n, \chi_n(\cdot)\rangle \Big\|_{H^{\chi}(p,q)} = \|(f_n)_{n=0}^{\infty}\|_{\mathcal{F}(N_p,\tau(q))}.$$

Далі сталу $K > 1$ вибираємо достатньо великою і спільною для просторів $H^{\omega}(p,q)$ та $H^{\chi}(p,q)$.

На підставі теореми 2.1 із [21] $H^{\omega}(p,q)$ (4.6) та $H^{\chi}(p,q)$, $p,q \in \mathbb{N}_3$, *збігаються як топологічні простори*. В результаті поряд з оснащенням (4.3) можна побудувати оснащення: для будь-яких $p,q \in \mathbb{N}_3$

$$(\Phi^{\chi})' \supset H^{\chi}(-p,-q) \supset (L^2_\rho) \supset H^{\chi}(p,q) \supset \Phi^{\chi},$$

$$\Phi^{\chi} := \operatorname*{pr\,lim}_{\tilde{p},\,\tilde{q}\in\mathbb{N}_3} H^{\chi}(\tilde{p},\tilde{q}), \qquad (\Phi^{\chi})' := \operatorname*{ind\,lim}_{\tilde{p},\,\tilde{q}\in\mathbb{N}_3} H^{\chi}(-\tilde{p},-\tilde{q}),$$

де $H^{\chi}(-p,-q)$ — негативний простір по відношенню до нульового (L^2_ρ) та позитивного $H^{\chi}(p,q)$.

Негативний простір узагальнених функцій $H^{\chi}(-p,-q)$, $p,q\in\mathbb{N}_3$, допускає зображення [1] (лема 12.3, теорема 12.1)

$$H^{\chi}(-p,-q) = \Bigg\{\xi = \sum_{n=0}^{\infty}\theta(\xi_n),$$

$$(\xi_n)_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{F}(N_{-p},\tau_F(q)) \;\Bigg|\; \|\xi\|_{H^{\chi}(-p,-q)} = \|(\xi_n)_{n=0}^{\infty}\|_{\mathcal{F}(N_{-p},\tau_F(q))}\Bigg\} \tag{4.14}$$

з кохарактерами Дельсарта

$$\theta(\xi_n) := \partial^+(\bar{\xi}_n)\delta_e \in H^{\chi}(-p,-q), \quad n\in\mathbb{N}_0,$$

де δ_e — δ-функція, зосереджена у точці $e\in Q$ (e — базисна одиниця сім'ї T), тобто $\langle\!\langle \delta_e, f\rangle\!\rangle = \overline{f(e)}$, $f\in H^{\chi}(p,q)$, $\delta_e\in H^{\chi}(-p,-q)$.

Кохарактери Дельсарта $\theta(\xi_n)$, $n\in\mathbb{N}_0$, пов'язані з функціями $Q\ni x\mapsto \langle f_m, \chi_m(x)\rangle\in\mathbb{C}^1$, $f_m\in\mathcal{F}_m(N_p)$, $m\in\mathbb{N}_0$, співвідношенням біортогональності

$$\langle\!\langle\, \theta(\xi_n), \langle f_m, \chi_m(\cdot)\rangle \,\rangle\!\rangle = \delta_{n,m} n! \langle \xi_n, \overline{f_n}\rangle. \tag{4.15}$$

Як результат, „координатно" спарювання $\langle\!\langle\cdot\,,\cdot\rangle\!\rangle$ між $H^{\chi}(-p,-q)$ та $H^{\chi}(p,q)$ допускає зображення

$$\langle\!\langle \xi, f\rangle\!\rangle = \langle (\xi)_{n=0}^{\infty}, (f)_{n=0}^{\infty}\rangle_{F(N_0)} = \sum_{n=0}^{\infty}\langle \xi_n, f_n\rangle_{\mathcal{F}_n(N_0)} n!$$

для довільних

$$\xi = \sum_{n=0}^{\infty}\theta(\xi_n)\in H^{\chi}(-p,-q), \qquad f = \sum_{n=0}^{\infty}\langle f_n, \chi_n(\cdot)\rangle \in H^{\chi}(p,q).$$

5. Оператори вторинного квантування. Нехай A — самоспряжений позитивний оператор в N_0 з областю визначення $\mathrm{Dom}\,(A)$. Він природним чином продовжується до такого ж оператора в $\mathcal{F}_1(N_0) = N_{0,\mathbb{C}}$, для продовженого оператора збережемо позначення A. Для кожного $n\in\mathbb{N}_1$ позначимо через A_n оператор в $\mathcal{F}_n(N_0)$, визначений формулою

$$A_n := A\otimes 1\otimes\ldots\otimes 1 + 1\otimes A\otimes 1\otimes\ldots\otimes 1 + \ldots + 1\otimes\ldots\otimes 1\otimes A$$

на $\mathring{\mathcal{F}}_n(D)$ ($D\subset \mathrm{Dom}\,(A)$ — фіксована лінійна множина в N_0).

Вторинним квантуванням оператора A називається оператор в $F(N_0)$, визначений формулою

$$d\,\mathrm{Exp}\,A := \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n, \quad A_0 := 0, \tag{5.1}$$

на $\mathring{\mathcal{F}}_{\mathrm{fin}}(D)$. Згідно з [14] (розділ 6, § 1) цей оператор є ермітовим. Більш того, якщо D — область істотної самоспряженості, то він є істотно самоспряженим.

Позначимо через $H_\rho^A := I_\rho d\,\mathrm{Exp}\,AI_\rho^{-1}$ образ оператора $d\,\mathrm{Exp}\,A$ при відображенні (4.1). Оператор H_ρ^A також будемо називати вторинним квантуванням оператора A. Зрозуміло, що якщо множина D є областю істотної самоспряженості оператора A, то множина $I_\rho(\mathring{\mathcal{F}}_{\mathrm{fin}}(D))$ є областю істотної самоспряженості оператора H_ρ^A.

Введемо оператори ∂_x, $x \in Q$, необхідні при побудові симетричної білінійної форми оператора H_ρ^A.

Для фіксованого $x \in Q$ позначимо через ∂_x лінійний неперервний оператор, що діє із $H^\omega(p,q)$ ($p \in \mathbb{N}_3$, $q \in \mathbb{N}_1$ — фіксовані) в $\mathcal{F}_1(N_0) = N_{0,\mathbb{C}}$ і задовольняє рівність

$$(\partial_x f, \xi_1)_{\mathcal{F}_1(N_0)} = (\partial(\bar{\xi}_1)f)(x), \qquad \xi_1 \in \mathcal{F}_1(N_0), \quad f \in H^\omega(p,q), \tag{5.2}$$

якою він однозначно визначається.

Існування такого оператора забезпечує оцінка (використовуємо (4.5), (4.9) та (2.4))

$$|(\partial(\xi_1)f)(x)| \le c\|\partial(\xi_1)f\|_{H^\omega(p,q)} \le cK^{-\frac{q}{2}}\|\xi_1\|_{\mathcal{F}_1(N_{-p})}\|f\|_{H^\omega(p,q)} \le$$

$$\le cK^{-\frac{q}{2}}\|\xi_1\|_{\mathcal{F}_1(N_0)}\|f\|_{H^\omega(p,q)},$$

справедлива для деякого $c = c(x) > 0$ і всіх $f \in H^\omega(p,q)$ та $\xi_1 \in \mathcal{F}_1(N_0)$.

Щоб визначити явно дію оператора $\partial_x : H^\omega(p,q) \to \mathcal{F}_1(N_0)$ ($p \in \mathbb{N}_3$, $q \in \mathbb{N}_1$ — фіксовані) на функціях

$$\langle \varphi_1^{\otimes n}, \omega_n(\cdot)\rangle \in H^\omega(p,q), \qquad \varphi_1 \in \mathcal{F}_1(N_p), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

скористаємося (5.2), (4.9), (2.2) та (2.3). А саме, для довільного $\xi_1 \in \mathcal{F}_1(N_0)$ маємо

$$\Big(\partial_x\langle\varphi_1^{\otimes n}, \omega_n\rangle, \xi_1\Big)_{\mathcal{F}_1(N_0)} = \Big(\partial(\bar{\xi}_1)\langle\varphi_1^{\otimes n}, \omega_n(\cdot)\rangle\Big)(x) =$$

$$= \begin{cases} n\langle\varphi_1^{\otimes n}, \omega_{n-1}(x)\hat{\otimes}\bar{\xi}_1\rangle, & \text{якщо } n \ge 0, \\ 0, & \text{якщо } n = 0, \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} (n\langle\varphi_1^{\otimes(n-1)}, \omega_{n-1}(x)\rangle\varphi_1, \xi_1)_{\mathcal{F}_1(N_0)}, & \text{якщо } n \ge 0, \\ 0, & \text{якщо } n = 0. \end{cases}$$

Звідси знаходимо

$$\partial_x\langle\varphi_1^{\otimes n}, \omega_n\rangle = \begin{cases} n\langle\varphi_1^{\otimes(n-1)}, \omega_{n-1}(x)\rangle\varphi_1, & \text{якщо } n \ge 0, \\ 0, & \text{якщо } n = 0. \end{cases} \tag{5.3}$$

Справедливою є така теорема.

Теорема 5.1. *Нехай* $\mathcal{N} \subset \operatorname{Dom} A$. *Симетрична білінійна форма оператора* H_ρ^A *допускає зображення*

$$(H_\rho^A \varphi, \psi)_{(L_\rho^2)} = \int\limits_Q (A\partial_x \varphi, \partial_x \psi)_{\mathcal{F}_1(N_0)} d\rho(x) \tag{5.4}$$

для всіх $\varphi, \psi \in I_\rho(\mathring{\mathcal{F}}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{N}))$.

Доведення. Рівність (5.4) досить встановити для функцій

$$\varphi(\cdot) = \langle \varphi_1^{\otimes n}, \omega_n(\cdot)\rangle, \quad \psi(\cdot) = \langle \psi_1^{\otimes n}, \omega_n(\cdot)\rangle, \quad \varphi_1, \psi_1 \in \mathcal{F}_1(\mathcal{N}), \quad n, m \in \mathbb{N}_1.$$

З одного боку, скориставшись (4.1), для ρ-майже всіх $x \in Q$ отримуємо

$$\Big(H_\rho^A \langle \varphi_1^{\otimes n}, \omega_n(\cdot)\rangle\Big)(x) =$$

$$= \Big(I_\rho d \operatorname{Exp} A I_\rho^{-1} \langle \varphi_1^{\otimes n}, \omega_n(\cdot)\rangle\Big)(x) = \Big(I_\rho((d \operatorname{Exp} A)\varphi_1^{\otimes n})\Big)(x) =$$

$$= \Big(I_\rho(A\varphi_1 \otimes \varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_1 + \ldots + \varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_1 \otimes A\varphi_1)\Big)(x) =$$

$$= \Big(I_\rho(nA\varphi_1 \hat{\otimes} \varphi_1^{\otimes(n-1)}\Big)(x) = n\langle A\varphi_1 \hat{\otimes} \varphi_1^{\otimes(n-1)}, \omega_n(x)\rangle.$$

Звідси (використовуємо (3.4))

$$(H_\rho^A \varphi, \psi)_{(L_\rho^2)} = \int\limits_Q n\langle A\varphi_1 \hat{\otimes} \varphi_1^{\otimes(n-1)}, \omega_n(x)\rangle \overline{\langle \psi_1^{\otimes m}, \omega_m(x)\rangle} d\rho(x) =$$

$$= \delta_{n,m} n n! \langle A\varphi_1 \hat{\otimes} \varphi_1^{\otimes(n-1)}, \bar{\psi}_1^{\otimes n}\rangle = \delta_{n,m} n n! \langle \varphi_1, \bar{\psi}_1\rangle^{n-1} \langle A\varphi_1, \bar{\psi}_1\rangle. \tag{5.5}$$

З іншого боку, скориставшись (5.3), для будь-якого $x \in Q$ отримуємо

$$(A\partial_x \varphi, \partial_x \psi)_{\mathcal{F}_1(N_0)} = \Big(A\partial_x \langle \varphi_1^{\otimes n}, \omega_n\rangle, \partial_x \langle \psi_1^{\otimes m}, \omega_m\rangle\Big)_{\mathcal{F}_1(N_0)} =$$

$$= nm\langle \varphi_1^{\otimes(n-1)}, \omega_{n-1}(x)\rangle \overline{\langle \psi_1^{\otimes(m-1)}, \omega_{m-1}(x)\rangle} \langle A\varphi_1, \bar{\psi}_1\rangle.$$

Врахувавши останнє, за допомогою співвідношення ортогональності (3.4) знаходимо

$$\int\limits_Q (A\partial_x \varphi, \partial_x \psi)_{\mathcal{F}_1(N_0)} d\rho(x) =$$

$$= nm\langle A\varphi_1, \bar{\psi}_1\rangle \int\limits_Q \langle \varphi_1^{\otimes(n-1)}, \omega_{n-1}(x)\rangle \overline{\langle \psi_1^{\otimes(m-1)}, \omega_{m-1}(x)\rangle} d\rho(x) =$$

$$= \delta_{n,m} n n! \langle \varphi_1, \bar{\psi}_1\rangle^{n-1} \langle A\varphi_1, \bar{\psi}_1\rangle. \tag{5.6}$$

Порівнюючи (5.5) та (5.6), отримуємо необхідне.

Теорему доведено.

6. Зсув Тейлора – Дельсарта. На функціях f із простору $C(Q)$ розглянемо лінійну операцію $\mathcal{L}(\xi_n)$ з коефіцієнтом $\xi_n \in \mathcal{F}_n(\mathcal{N})$, $n \in \mathbb{N}_0$, таку, що при кожному $x \in Q$ відображення

$$C(Q) \ni f \mapsto (\mathcal{L}(\xi_n)f)(x) \in \mathbb{C}^1$$

визначене і є лінійним. Припустимо, що характер $\chi(x, \lambda)$ є „власною функцією" $\mathcal{L}(\xi_n)$ в такому розумінні:

$$(\mathcal{L}(\xi_n)\chi(\cdot, \lambda))(x) = \langle \lambda^{\otimes n}, \xi_n \rangle \chi(x, \lambda), \qquad x \in Q, \quad \lambda \in B_\chi. \tag{6.1}$$

Оператори узагальненого зсуву, для яких відома наявність вказаних операцій $\mathcal{L}(\xi_n)$, будемо називати операторами узагальненого зсуву Тейлора – Дельсарта. Зазначимо, що операції $\mathcal{L}(\xi_n)$ часто з'являються незалежно від конструкцій, наведених у попередніх пунктах (див. [22, 23]).

Твердження 6.1 ([1], теорема 13.1). *Нехай $\xi_n \in \mathcal{F}_n(\mathcal{N})$, $n \in \mathbb{N}_0$. Припустимо, що лінійна операція $\mathcal{L}(\xi_n)$ має властивість* (6.1) *і є неперервним оператором, що діє із $H^\omega(p, q)$, $p, q \in \mathbb{N}_3$, в $C(Q)$. Тоді простір $H^\omega(p, q)$ є інваріантним відносно дії цієї операції і операція $\mathcal{L}(\xi_n)$, як оператор в $H^\omega(p, q)$, є неперервною. Більш того, оператор $\mathcal{L}(\xi_n) : H^\omega(p, q) \to H^\omega(p, q)$ збігається з оператором знищення $\partial(\xi_n) : H^\omega(p, q) \to H^\omega(p, q)$.*

7. Один клас вагових просторів Соболева. Нехай σ — міра Лебега на осі $\mathbb{R}^1$, тобто $d\sigma(t) = dt$. Розглянемо дійсний соболевський простір

$$S_p(\mathbb{R}^1) := W_p^2(\mathbb{R}^1, (1 + t^2)^p d\sigma(t)), \quad p \in \mathbb{N}_0, \tag{7.1}$$

котрий є поповненням множини $C_{\text{fin}}^\infty(\mathbb{R}^1)$ ($C_{\text{fin}}^\infty(\mathbb{R}^1)$ — простір дійсних нескінченно диференційовних фінітних функцій на $\mathbb{R}^1$) щодо гільбертової норми

$$\|\varphi\|_{S_p}^2 := \sum_{n=0}^{p} \int_{\mathbb{R}^1} \Big((D^n\varphi)(t)\Big)^2 (1 + t^2)^p d\sigma(t), \quad \varphi \in C_{\text{fin}}^\infty(\mathbb{R}^1) \tag{7.2}$$

(зрозуміло, що $S_0(\mathbb{R}^1) = L^2(\mathbb{R}^1, d\sigma(t)) =: L^2(\mathbb{R}^1)$). Відомо (див., наприклад, [17], розділ 14, § 4, п. 3), що простір $S_p(\mathbb{R}^1)$, $p \in \mathbb{N}_1$, неперервно вкладається у банахів простір $C_{\text{b}}(\mathbb{R}^1)$ неперервних обмежених функцій на $\mathbb{R}^1$ (з нормою $\|f\|_{C_{\text{b}}(\mathbb{R}^1)} := \sup_{t \in \mathbb{R}^1} |f(t)|$). Крім того, відомо, що соболевський простір на обмеженій області є алгеброю (див., наприклад, [24], розділ 1, п. 1.7). Подібний результат має місце і для $S_p(\mathbb{R}^1)$.

Теорема 7.1. *Простір $S_p(\mathbb{R}^1)$, $p \in \mathbb{N}_1$, є банаховою алгеброю щодо звичайного (поточкового) множення функцій.*

Доведення. Потрібно показати, що

$$\exists c := c_p > 0 : \quad \|fg\|_{S_p} \le c\|f\|_{S_p}\|g\|_{S_p}, \quad f, g \in S_p(\mathbb{R}^1).$$

Для цього досить переконатися у справедливості оцінки

$$\exists c = c_p > 0 : \quad \|\varphi\psi\|_{S_p} \le c\|\varphi\|_{S_p}\|\psi\|_{S_p}, \quad \varphi, \psi \in C_{\text{fin}}^\infty(\mathbb{R}^1). \tag{7.3}$$

Скориставшись (7.2), формулою Лейбніца та очевидними нерівностями

$$C_n^m := \frac{n!}{m!(n-m)!} \leq 2^p, \qquad n \in \{0, \dots, p\}, \quad \mathbb{N}_0 \ni m \leq n,$$

$$(a_1 + \ldots + a_n)^2 \leq n(a_1^2 + \ldots + a_n^2), \qquad a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^1, \quad n \in \mathbb{N}_1,$$

для довільних φ, $\psi \in C^\infty_{\text{fin}}(\mathbb{R}^1)$ отримаємо

$$\|\varphi\psi\|^2_{S_p} = \sum_{n=0}^{p} \int_{\mathbb{R}^1} ((D^n(\varphi\psi))(t))^2 (1+t^2)^p d\sigma(t) =$$

$$= \sum_{n=0}^{p} \int_{\mathbb{R}^1} \left(\sum_{m=0}^{n} C_n^m (D^m\varphi)(t)(D^{n-m}\psi)(t) \right)^2 (1+t^2)^p d\sigma(t) \leq$$

$$\leq 4^p \sum_{n=0}^{p} (n+1) \int_{\mathbb{R}^1} \sum_{m=0}^{n} \Big((D^m\varphi)(t)(D^{n-m}\psi)(t) \Big)^2 (1+t^2)^p d\sigma(t) \leq$$

$$\leq (p+1)4^p \sum_{m=0}^{p} \mathbb{J}_m, \tag{7.4}$$

де

$$\mathbb{J}_m := \sum_{n=m}^{p} \int_{\mathbb{R}^1} \Big((D^m\varphi)(t)(D^{n-m}\psi)(t) \Big)^2 (1+t^2)^p d\sigma(t).$$

Оцінимо $\mathbb{J}_m$, $m \in \{0, \dots, p\}$. Згідно з [17] (розділ 14, § 4, п. 3) для кожного $p \in \mathbb{N}_1$ існує стала $d = d_p > 0$ така, що

$$|(D^m\varphi)(t)| \leq d\|\varphi\|_{S_p}, \quad \varphi \in C^\infty_{\text{fin}}(\mathbb{R}^1), \tag{7.5}$$

для всіх $m \in \{0, \dots, p-1\}$ та $t \in \mathbb{R}^1$. Врахувавши останнє, для $m \in \{0, \dots, p-1\}$ дістанемо

$$\mathbb{J}_m \leq d^2 \|\varphi\|^2_{S_p} \sum_{n=m}^{p} \int_{\mathbb{R}^1} \Big((D^{n-m}\psi)(t) \Big)^2 (1+t^2)^p d\sigma(t) \leq d_p^2 \|\varphi\|^2_{S_p} \|\psi\|^2_{S_p}. \tag{7.6}$$

Щодо $\mathbb{J}_p$, то

$$\mathbb{J}_p = \int_{\mathbb{R}^1} \Big((D^p\varphi)(t)\psi(t) \Big)^2 (1+t^2)^p d\sigma(t) \leq d^2 \|\varphi\|^2_{S_p} \|\psi\|^2_{S_p}. \tag{7.7}$$

Оцінки (7.4), (7.6) та (7.7) забезпечують справедливість (7.3).

Теорему доведено.

***Зауваження* 7.1.** Теорема 7.1 залишається справедливою і для комплексних просторів Соболева $S_{p,\mathbb{C}}(\mathbb{R}^1)$, $p \in \mathbb{N}_1$.

8. Міра Пуассона на просторі узагальнених функцій. Будемо використовувати відоме зображення простору Шварца

$$\mathcal{S}(R^1) = \operatorname*{pr\,lim}_{p\in\mathbb{N}_0} S_p(\mathbb{R}^1)$$

у вигляді проективної границі сім'ї $(S_p(\mathbb{R}^1))_{p\in\mathbb{N}_1}$ соболевських просторів $S_p(\mathbb{R}^1)$ (7.1). Нагадаємо [17] (розділ 14, теорема 4.4), що для кожного $p\in\mathbb{N}_0$ вкладення $S_{p+1}(\mathbb{R}^1)\hookrightarrow S_p(\mathbb{R}^1)$ є квазіядерним, тому простір $\mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$ — ядерний. Позначимо через $S_{-p}(\mathbb{R}^1)$, $p\in\mathbb{N}_1$, простір, спряжений до $S_p(\mathbb{R}^1)$ щодо $S_0(\mathbb{R}^1)=L^2(\mathbb{R}^1)$, і розглянемо ядерний ланцюжок

$$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^1) = \operatorname*{ind\,lim}_{\tilde{p}\in\mathbb{N}_1} S_{-\tilde{p}}(\mathbb{R}^1) \supset S_{-p}(\mathbb{R}^1) \supset$$

$$\supset L^2(\mathbb{R}^1) \supset S_p(\mathbb{R}^1) \supset \operatorname*{pr\,lim}_{\tilde{p}\in\mathbb{N}_1} S_{\tilde{p}}(\mathbb{R}^1) = \mathcal{S}(\mathbb{R}^1) \qquad (8.1)$$

зі спарюванням $\langle\cdot,\cdot\rangle$, породженим скалярним добутком $(\cdot,\cdot)_{L^2(\mathbb{R}^1)}$ у просторі $L^2(\mathbb{R}^1)$. Через $\mathcal{B}(E)$ завжди будемо позначати σ-алгебру борелевих множин топологічного простору E.

Борелеву ймовірнісну міру π на $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^1)$, що однозначно визначається на підставі теореми Мінлоса (див., наприклад, [14]) своїм перетворенням Фур'є

$$\int_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^1)} e^{i\langle\lambda,x\rangle} d\pi(x) = \exp\left(\int_{\mathbb{R}^1} (e^{i\lambda(t)}-1)d\sigma(t)\right), \quad \lambda\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^1), \qquad (8.2)$$

називають *мірою Пуассона* з лебеговою мірою інтенсивності σ.

***Зауваження* 8.1.** Щодо інших альтернативних способів введення міри Пуассона на σ-алгебрі $\mathcal{B}(\mathcal{S}'(\mathbb{R}^1))$ див., наприклад, [5, 6, 8–10]. Назву „пуассонова міра" можна пояснити виходячи із таких міркувань.

Класична міра Пуассона π_a (з параметром $a>0$) на $(\mathbb{R}^1,\mathcal{B}(\mathbb{R}^1))$ — це ймовірнісна міра, зосереджена на $\mathbb{N}_0$, така, що для всіх $\alpha\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^1)$

$$\pi_a(\alpha) = \sum_{k\in\alpha\cap\mathbb{N}_0} \frac{e^{-a}a^k}{k!} \in \mathbb{R}^1.$$

Перетворення Фур'є міри π_a має вигляд

$$\int_{\mathbb{R}^1} e^{i\lambda x} d\pi_a(x) = \exp(a(e^{i\lambda}-1)), \quad \lambda\in\mathbb{R}^1.$$

Під мірою Пуассона π_a (з параметром $a=(a_1,\ldots,a_n)\in\mathbb{R}^d$, $a_j>0$) на $(\mathbb{R}^d,\mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$, $d\in\mathbb{N}_1$, природно розуміти ймовірнісну міру

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \ni \alpha \mapsto \pi_a(\alpha) := \mathop{\times}_{j=1}^{d} \pi_{a_j}(\alpha) \in \mathbb{R}^1.$$

Перетворення Фур'є цієї міри має вигляд

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle\lambda,x\rangle_d} d\pi_a(x) = \exp\left(\sum_{j=1}^{d} a_j(e^{i\lambda_j}-1)\right), \tag{8.3}$$

$$\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_d) \in \mathbb{R}^d, \quad \langle\lambda,x\rangle_d := x_1\lambda_1 + \ldots + x_d\lambda_d.$$

Ототожнивши $\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_d) \in \mathbb{R}^d$ з функцією

$$\mathbb{R}^1 \ni t \mapsto \lambda(t) := \sum_{j=1}^{d} \lambda_j k_{\tau_j}(t)$$

(тут $\tau_1,\ldots,\tau_d$ — фіксовані непорожні борелеві множини, що утворюють розбиття осі $\mathbb{R}^1$, тобто $\tau_j \cap \tau_k = \varnothing$ $(j \neq k)$, $\bigcup_{j=1}^d \tau_j = \mathbb{R}^1$; k_{τ_j} — індикатор множини τ_j), суму $\sum_{j=1}^d a_j(e^{i\lambda_j}-1)$ можна інтерпретувати як інтеграл Лебега $\int_{\mathbb{R}^1}(e^{i\lambda(t)}-1)d\mu(t)$, де μ — скінченна борелева міра на $\mathbb{R}^1$ така, що $\mu(\tau_j) = a_j$, $j = 1,\ldots,d$. В результаті перетворення Фур'є (8.3) можна подати у вигляді

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle\lambda,x\rangle} d\pi_a(x) = \exp\left(\int_{\mathbb{R}^1}(e^{i\lambda(t)}-1)d\mu(t)\right),$$

що і зумовлює природність назви „міра Пуассона" для міри π (8.2).

Використовуючи теорему 7.1, переконуємось у неперервності відображення

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^1) \ni \lambda \mapsto e^{i\lambda} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i\lambda)^n}{n!} \in \mathcal{S}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^1),$$

де $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^1)$ — комплексифікація $\mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$. Як наслідок, праву частину (8.2) можна подати у вигляді

$$\exp\left(\int_{\mathbb{R}^1}(e^{i\lambda(t)}-1)d\sigma(t)\right) = \exp\langle 1, e^{i\lambda}-1\rangle, \quad \lambda \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^1).$$

Оскільки відображення $S_1(\mathbb{R}^1) \ni \lambda \mapsto \exp\langle 1, e^{i\lambda}-1\rangle \in \mathbb{C}^1$ є неперервним (це випливає із теореми 7.1) і вкладення $S_2(\mathbb{R}^1) \hookrightarrow S_1(\mathbb{R}^1)$ — квазіядерне, то на підставі теореми Мінлоса – Сазонова міру π можна модифікувати до борелевої ймовірнісної міри на $S_{-2}(\mathbb{R}^1)$. Модифіковану міру π щодо $S_{-2}(\mathbb{R}^1)$ також позначатимемо через π і називатимемо мірою Пуассона. Перетворення Фур'є цієї міри має вигляд

$$\int_{S_{-2}(\mathbb{R}^1)} e^{i\langle\lambda,x\rangle} d\pi(x) = \exp\langle 1, e^{i\lambda}-1\rangle, \quad \lambda \in S_2(\mathbb{R}^1). \tag{8.4}$$

Нагадаємо, що розуміють під модифікацією міри (див., наприклад, [14], розділ 3, § 1, п. 9). Розглянемо вимірні простори $(R,\mathcal{R})$ та $(R',\mathcal{R}')$. Будемо вважати, що простір R містить R' і відображення

$$\mathcal{R} \ni \alpha \mapsto \alpha' = \alpha \cap R' \in \mathcal{R}'$$

є відображенням всієї σ-алгебри $\mathcal{R}$ на всю σ-алгебру $\mathcal{R}'$.

Нехай μ — фіксована міра на $\mathcal{R}$. Припустимо, що множина R' має повну зовнішню міру μ (тобто довільна множина $\mathcal{R} \ni \alpha \supset R'$ має повну міру μ). Тоді μ породжує міру μ' на $\mathcal{R}'$ за правилом

$$\mathcal{R}' \ni \alpha' \mapsto \mu'(\alpha') = \mu'(\alpha \cap R') := \mu(\alpha) \in \mathbb{C}^1,$$

де α — деяка множина з $\mathcal{R}$, що визначається з рівності $\alpha' = \alpha \cap R'$. Міру μ' називають модифікованою мірою μ щодо R'. Якщо функція $R \ni x \mapsto f(x) \in \mathbb{C}^1$ є вимірною щодо σ-алгебри $\mathcal{R}$, то її звуження $f \restriction R'$ вимірне щодо σ-алгебри $\mathcal{R}'$. Функція f є сумовною щодо міри μ тоді і тільки тоді, коли $f \restriction R'$ сумовна щодо μ', причому

$$\int_R f(x) d\mu(x) = \int_{R'} f(x) d\mu'(x).$$

9. Простори основних та узагальнених функцій в пуассоновому аналізі. Перейдемо до реалізації загальної схеми побудови просторів основних та узагальнених функцій, викладеної в пп. 3 – 6, у випадку, коли Q є лінійним дійсним простором $S_{-2}(\mathbb{R}^1)$ з операцією додавання $+$, а ρ є мірою Пуассона на $\mathcal{B}(Q)$. Зазначимо, що при дещо іншому виборі простору Q (коли він є $S'(\mathbb{R}^1)$ або $D'(\mathbb{R}^1)$) основні результати даного пункту є відомими (див. [3 – 10] та наведену там бібліографію).

У лінійному просторі $C(Q)$ введемо сім'ю $T = (T_x)_{x \in Q}$ операторів узагальненого зсуву T_x, поклавши

$$(T_x f)(y) = f(x + y), \qquad y \in Q, \quad f \in C(Q) \tag{9.1}$$

(тобто маємо звичайний зсув на $C(Q)$ з базисною одиницею $e = 0 \in Q$). Очевидно, що сім'я $T = (T_x)_{x \in Q}$ задовольняє аксіоми а) – г) із п. 3.

В якості ланцюжка (1.1) використаємо ланцюжок (8.1), точніше, з огляду на те, що $Q = S_{-2}(\mathbb{R}^1)$, *будемо вважати, що* $N_0 = S_0(\mathbb{R}^1) = L^2(\mathbb{R}^1)$, $N_p = S_{p+1}(\mathbb{R}^1)$, $p \in \mathbb{N}_1$.

Нехай

$$B_0 := \left\{ \lambda \in N_{1,\mathbb{C}} \mid \| \lambda \|_{N_{1,\mathbb{C}}} < R, \quad 0 < R < 1 \right\}.$$

Із теореми 7.1 випливає, що відображення

$$N_{1,\mathbb{C}} \supset B_0 \ni \lambda \mapsto \log(1 + \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \lambda^n}{n} \in N_{1,\mathbb{C}},$$

а отже, і функція

$$Q \times B_0 \ni \{x, \lambda\} \mapsto \chi(x, \lambda) := \exp\langle x, \log(1 + \lambda) \rangle \in \mathbb{C}^1 \tag{9.2}$$

є визначеними. Неважко бачити, що функція (9.2) задовольняє припущення п. 3 і, як наслідок, допускає зображення (3.1). Відповідні їй характери Дельсарта $\chi_n(x) \in \mathcal{F}_n(N_{-2})$, $n \in \mathbb{N}_1$, визначаються з рекурентної рівності

$$\langle \varphi^{\otimes n}, \chi_n(x) \rangle = \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^{n-m-1} \frac{(n-1)!}{m!} \langle \varphi^{n-m}, x \rangle \langle \varphi^{\otimes m}, \chi_m(x) \rangle,$$

справедливої для всіх $\varphi \in N_{2,\mathbb{C}}$ та $x \in Q$ ($\chi_0(x) = 1$, $x \in Q$). Щоб її отримати, потрібно скористатися (3.2) та формулою

$$\frac{d}{dz}\chi(x, z\varphi) = \left\langle x, \frac{\varphi}{1+z\varphi} \right\rangle \chi(x, z\varphi), \qquad x \in Q, \quad \varphi \in N_{2,\mathbb{C}}$$

($z \in \mathbb{C}^1$, $|z|$ — достатньо мале), яка безпосередньо випливає із (9.2).

Знайдемо узагальнене перетворення Лапласа міри π. Оскільки перетворення Лапласа має вигляд

$$l_\pi(\lambda) = \int_Q \exp\langle x, \lambda\rangle d\pi(x) = \exp\langle 1, e^\lambda - 1\rangle, \quad \lambda \in N_{1,\mathbb{C}}, \tag{9.3}$$

то

$$\widehat{\pi}(\lambda) = \int_Q \chi(x, \lambda) d\pi(x) = \int_Q \exp\langle x, \log(1+\lambda)\rangle d\pi(x) = \exp\langle 1, \lambda\rangle$$

для довільного λ із B_0.

Очевидно, що узагальнене перетворення Лапласа $\widehat{\pi}$ є аналітичною функцією в нулі простору $N_{1,\mathbb{C}}$, тому функція

$$\omega(x, \lambda) := \frac{\chi(x, \lambda)}{\widehat{\pi}(\lambda)} = \exp\Big(\langle x, \log(1+\lambda)\rangle - \langle 1, \lambda\rangle\Big) \tag{9.4}$$

допускає розклад у ряд (3.3). Відповідні їй характери Аппеля $\omega_n(x) \in \mathcal{F}_n(N_{-2})$ прийнято називати *поліномами Шарльє* (див., наприклад, [4 – 10]). Подібно до характерів Дельсарта, ці поліноми визначаються з рекурентної рівності (див. також [3])

$$\langle \varphi^{\otimes n}, \omega_n(x)\rangle =$$

$$= \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^{n-m-1} \frac{(n-1)!}{m!} \langle \varphi^{n-m}, x\rangle \langle \varphi^{\otimes m}, \omega_m(x)\rangle - \langle 1, \varphi\rangle \langle \varphi^{\otimes(n-1)}, \omega_{n-1}(x)\rangle,$$

справедливої для всіх $\varphi \in N_{2,\mathbb{C}}$ та $x \in Q$ ($\omega_0(x) = 1$, $x \in Q$).

Для можливості застосування результатів із п. 4 залишилось показати, що функції $Q \ni x \mapsto \langle \varphi_n, \omega_n(x)\rangle \in \mathbb{C}^1$, $\varphi_n \in \mathcal{F}_n(\mathcal{N}) = \mathcal{S}_{\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}$, $n \in \mathbb{N}_0$, задовольняють співвідношення ортогональності (3.4) і їхня лінійна оболонка є щільною у просторі $(L^2_\pi) := L^2(Q, d\pi(x))$.

Оскільки перетворення Лапласа l_π міри π є аналітичною функцією змінної λ в нулі простору $N_{1,\mathbb{C}}$, то лінійна оболонка функцій $Q \ni x \mapsto \langle \varphi_n, \omega_n(x)\rangle \in \mathbb{C}^1$, $\varphi_n \in \mathcal{F}_n(\mathcal{N})$, $n \in \mathbb{N}_0$, є щільною у просторі (L^2_π) (див. зауваження 3.1). Щодо потрібної ортогональності (3.4), то справедливим є таке твердження (в іншому викладі див. [3]).

Твердження 9.1. *Для* $\varphi_n \in \mathcal{F}_n(\mathcal{N}) = \mathcal{S}_{\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}$ *та* $\psi_m \in \mathcal{F}_m(\mathcal{N}) = \mathcal{S}_{\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} m}$, $n, m \in \mathbb{N}_0$, *справджується співвідношення ортогональності*

$$\int_Q \langle \varphi_n, \omega_n(x)\rangle \overline{\langle \psi_m, \omega_m(x)\rangle} d\pi(x) = \delta_{n,m} n! \langle \varphi_n, \overline{\psi_n}\rangle. \tag{9.5}$$

Доведення. Досить встановити оцінку (3.5) та рівність (3.6).

Оскільки перетворення Лапласа l_π міри π є аналітичною функцією змінної λ в нулі простору $N_{1,\mathbb{C}}$, то на підставі зауваження 3.1 знайдеться таке $p \in \mathbb{N}_2$, що оцінка (3.5) виконується.

Встановимо рівність (3.6). Скориставшись (9.3) та (9.4), для довільних φ, $\psi \in \mathcal{N}_\mathbb{C} = \mathcal{S}_\mathbb{C}$, $\|\varphi\|_{N_{p,\mathbb{C}}}, \|\psi\|_{N_{p,\mathbb{C}}} < \min\{R_\omega, C^{-1}\}$, отримаємо

$$\int_Q \omega(x,\varphi)\overline{\omega(x,\psi)}d\pi(x) = \exp(-\langle 1, \varphi + \overline{\psi}\rangle) \int_Q \exp\langle x, \log(1+\varphi)\overline{(1+\psi)}\rangle d\pi(x) =$$

$$= \exp(-\langle 1, \varphi + \overline{\psi}\rangle) \exp\langle 1, (1+\varphi)\overline{(1+\psi)} - 1\rangle =$$

$$= \exp\langle 1, \varphi\overline{\psi}\rangle = \exp \int_{\mathbb{R}^1} \varphi(t)\overline{\psi(t)}dt = \exp\langle \varphi, \overline{\psi}\rangle.$$

Твердження доведено.

Як висновок з властивостей, встановлених вище, можна сформулювати таку теорему.

Теорема 9.1. *Результати, викладені у пп. 3–6, є справедливими для пуассонового аналізу з простором $Q = S_{-2}(\mathbb{R}^1)$, мірою Пуассона $\rho = \pi$, зсувом* (9.1) *і характерами Дельсарта та Аппеля (поліномами Шарльє), породженими функціями* (9.2) *та* (9.4) *відповідно.*

Зокрема, для всіх p, $q \in \mathbb{N}_3$ простори $H^\chi(p,q)$ (4.13) *та $H^\omega(p,q)$* (4.6) *збігаються у топологічному сенсі і, крім того, неперервно вкладаються у простір $C(Q)$. Більш того, ці простори щільно та неперервно вкладаються у простір $(L^2_\pi) = L^2(Q, d\pi(x))$, що дає змогу будувати ядерні ланцюжки*

$$\begin{array}{ccccccccc} (\Phi^\chi)' & \supset\cdots\supset & H^\chi(-p,-q) & \supset\cdots\supset & (L^2_\pi) & \supset\cdots\supset & H^\chi(p,q) & \supset\cdots\supset & \Phi^\chi \\ \| & & \| & & \| & & \| & & \| \\ (\Phi^\omega)' & \supset\cdots\supset & H^\omega(-p,-q) & \supset\cdots\supset & (L^2_\pi) & \supset\cdots\supset & H^\omega(p,q) & \supset\cdots\supset & \Phi^\omega \end{array}$$

зі спарюванням $\langle\!\langle \cdot, \cdot \rangle\!\rangle$, породженим скалярним добутком у просторі (L^2_π).

Зауваження 9.1. Можна показати, що унітарний ізоморфізм

$$F(N_0) \ni f = (f_n)_{n=0}^\infty \mapsto (I_\pi f)(\cdot) := \sum_{n=0}^\infty \langle f_n, \omega_n(\cdot)\rangle \in (L^2_\pi) \qquad (9.6)$$

є перетворенням Фур'є за сумісними власними векторами деякої сім'ї $A = (A(\varphi))_{\varphi\in S_2(\mathbb{R}^1)}$ комутуючих самоспряжених операторів $A(\varphi)$, що діють у просторі Фока $F(N_0)$, $N_0 = L^2(\mathbb{R}^1)$, і мають якобієву структуру. Точніше, сім'я $A = (A(\varphi))_{\varphi\in S_2(\mathbb{R}^1)}$ утворює так зване поле Пуассона (щодо означення і властивостей такого поля див. [25]).

10. Оператори знищення та вторинного квантування у пуассоновому аналізі. На функціях f із простору $C(Q)$ введемо лінійну різницеву операцію $\mathcal{L}(\varphi_n)$ з фінітним коефіцієнтом $\varphi_n = \varphi_n(t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{F}_n(\mathcal{N}) = \mathcal{S}_\mathbb{C}^{\hat{\otimes} n}(\mathbb{R}^1)$, $n \in \mathbb{N}_1$, поклавши

$$(\mathcal{L}(\varphi_n)f)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} (\ell(\delta_{t_1}) \dots \ell(\delta_{t_n})f)(x)\varphi_n(t_1, \dots, t_n)d\sigma(t_1)\dots d\sigma(t_n), \quad (10.1)$$

$$(\ell(\delta_t)f)(x) := f(x + \delta_t) - f(x), \qquad x \in Q = S_{-2}(\mathbb{R}^1), \quad t \in \mathbb{R}^1, \quad (10.2)$$

де δ_t — δ-функція, зосереджена в точці t; відомо, що $\delta_t \in S_{-2}(\mathbb{R}^1)$ (див. [17], розділ 14, § 4).

При кожному $x \in Q$ функція

$$\mathbb{R}^n \ni \{t_1, \dots, t_n\} \mapsto f\left(x + \sum_{m=1}^{n} \delta_{t_m}\right) \in \mathbb{C}^1, \quad n \in \mathbb{N}_1, \quad (10.3)$$

є неперервною та обмеженою. Тому при вказаних вище f та φ_n права частина (10.1) визначена для всіх $x \in Q$.

Справді, оскільки $f \in C(Q)$ і відображення

$$\mathbb{R}^n \ni \{t_1, \dots, t_n\} \mapsto \sum_{m=1}^{n} \delta_{t_m} \in Q$$

є неперервним (див. [17], розділ 14, § 4), то таким буде і відображення (10.3). Обмеженість функції (10.3) забезпечує оцінка

$$\exists c > 0: \quad \|\delta_t\|_{S_{-2}(\mathbb{R}^1)} \le \frac{c}{\sqrt{1 + t^2}}, \quad t \in \mathbb{R}^1, \quad (10.4)$$

та локальна обмеженість функції $f \in C(Q)$.

Застосувавши різницеву операцію (10.2) до характеру (9.2), для $x \in Q$, $\lambda \in B_\chi$ отримаємо

$$(\ell(\delta_t)\chi(\cdot, \lambda))(x) = \chi(x + \delta_t, \lambda) - \chi(x, \lambda) =$$

$$= \exp\langle x + \delta_t, \log(1 + \lambda)\rangle - \exp\langle x, \log(1 + \lambda)\rangle =$$

$$= \exp\langle x, \log(1 + \lambda)\rangle(\exp\langle \delta_t, \log(1 + \lambda)\rangle - 1) =$$

$$= \exp\langle x, \log(1 + \lambda)\rangle\lambda(t) = \lambda(t)\chi(x, \lambda), \quad t \in \mathbb{R}^1.$$

Завдяки останньому

$$(\mathcal{L}(\varphi_n)\chi(\cdot, \lambda))(x) = \langle \lambda^{\otimes n}, \varphi_n \rangle \chi(x, \lambda), \qquad x \in Q, \quad \lambda \in B_\chi,$$

для довільної фінітної функції $\varphi_n \in \mathcal{F}_n(\mathcal{N})$, $n \in \mathbb{N}_1$.

Таким чином, зсув T_x (9.1) є зсувом Тейлора–Дельсарта.

Теорема 10.1. *Для кожної фінітної функції* $\varphi_n \in \mathcal{F}_n(\mathcal{N}) = \mathcal{S}_{\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}(\mathbb{R}^1)$, $n \in \mathbb{N}_1$, *відображення*

$$H^\omega(p, q) \ni f \mapsto \mathcal{L}(\varphi_n)f \in C(Q)$$

визначене для всіх $p, q \in \mathbb{N}_3$ *і є лінійним та неперервним.*

Доведення. Досить встановити оцінку: для довільної кулі $U \subset Q$ знайдеться стала $c = c(U) > 0$ така, що

$$|(\mathcal{L}(\varphi_n)f)(x)| \le c\|f\|_{H^\omega(p,q)}, \qquad x \in U, \quad f \in H^\omega(p,q). \tag{10.5}$$

Оскільки функція $\varphi_n \in \mathcal{F}_n(\mathcal{N}) = \mathcal{S}_{\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}(\mathbb{R}^1)$ фінітна, то досить показати, що для довільної кулі $U \subset Q$ знайдеться стала $a = a(U) > 0$ така, що

$$|(\ell(\delta_{t_1})\ldots\ell(\delta_{t_n})f)(x)| \le a\|f\|_{H^\omega(p,q)}, \qquad x \in U, \quad f \in H^\omega(p,q),$$

для будь-яких $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}^1$.

Остання оцінка безпосередньо випливає з оцінки (4.5). Потрібно скористатись (10.2) та врахувати, що для довільної кулі $U \subset Q$ існує куля $U' \subset Q$ така, що $x + \sum_{m=k}^n \delta_{t_m}$ належить U' для всіх $t_k, \ldots, t_n \in \mathbb{R}^1$, $k \in \{1, \ldots, n\}$ і $x \in U$ (існування кулі $U' \subset Q$ забезпечує оцінка (10.4)).

Теорему доведено.

***Наслідок* 10.1.** *Із твердження* 6.1 *та теореми* 10.1 *випливає, що простір $H^\omega(p,q)$ є інваріантним відносно дії $\mathcal{L}(\varphi_n)$ (φ_n — фінітна функція із $\mathcal{F}_n(\mathcal{N}) = \mathcal{S}_{\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}(\mathbb{R}^1)$, $n \in \mathbb{N}_1$). Більш того, оператор $\mathcal{L}(\varphi_n) : H^\omega(p,q) \to H^\omega(p,q)$ є неперервним і збігається з оператором знищення $\partial(\varphi_n) : H^\omega(p,q) \to H^\omega(p,q)$.*

Перейдемо до розгляду операторів вторинного квантування, що діють у просторі (L^2_π). Нехай, як і раніше, A — самоспряжений позитивний оператор в $N_0 = L^2(\mathbb{R}^1)$ з областю визначення $\mathrm{Dom}\,(A)$. Позначимо через $H^A_\pi := I_\pi d\,\mathrm{Exp}\, A I_\pi^{-1}$ образ оператора вторинного квантування $d\,\mathrm{Exp}\, A$ при відображенні I_π (9.6). Застосувавши до H^A_π теорему 5.1, отримаємо відоме твердження (див., наприклад, [6, 9, 10]).

Теорема 10.2. *Припустимо, що $\mathcal{N} = \mathcal{S}(R^1) \subset \mathrm{Dom}\, A$. Тоді симетрична білінійна форма оператора H^A_π допускає зображення*

$$(H^A_\pi \varphi, \psi)_{(L^2_\pi)} = \int\limits_Q (A\partial_x\varphi, \partial_x\psi)_{L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^1)} d\pi(x) \tag{10.6}$$

для всіх $\varphi, \psi \in I_\pi(\mathring{\mathcal{F}}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{N}))$.

***Зауваження* 10.1.** Дія оператора $\partial_x : H^\omega(p,q) \to \mathcal{F}_1(N_0) = L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^1)$ ($p, q \in \mathbb{N}_3$ — фіксовані) легко підраховується: для майже всіх $t \in \mathbb{R}^1$

$$(\partial_x f)(t) = (\ell(\delta_t)f)(x) = f(x + \delta_t) - f(x), \quad f \in H^\omega(p,q). \tag{10.7}$$

Справді, на підставі (5.2) для довільної функції $\xi_1 \in \mathcal{F}_1(N_0) = L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^1)$

$$(\partial(\xi_1)f)(x) = (\partial_x f, \bar{\xi}_1)_{L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^1)}, \quad f \in H^\omega(p,q). \tag{10.8}$$

З іншого боку, на підставі (10.1) для будь-якої фінітної функції $\varphi_1 \in \mathcal{F}_1(\mathcal{N}) = \mathcal{S}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^1)$

$$(\partial(\varphi_1)f)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} (\ell(\delta_t)f)(x)\varphi_1(t)d\sigma(t), \quad f \in H^\omega(p,q). \tag{10.9}$$

Порівнюючи (10.8) з (10.9) та враховуючи, що множина фінітних функцій із $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^1)$ є щільною у просторі $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^1)$, переконуємось у справедливості рівності (10.7).

11. Міра Лебега – Пуассона. Під простором конфігурацій $\Gamma = \Gamma(\mathbb{R}^1)$ над $\mathbb{R}^1$ розуміють (див., наприклад, [3 – 10]) сукупність усіх локально скінченних підмножин (конфігурацій) $\mathbb{R}^1$, тобто

$$\Gamma := \left\{\gamma \subset \mathbb{R}^1 \mid |\gamma \cap \Lambda| < \infty \quad \text{для довільного компакту} \quad \Lambda \subset \mathbb{R}^1\right\},$$

де $|X|$ означає кількість точок множини $X \subset \mathbb{R}^1$.

При кожному $n \in \mathbb{N}_1$ розглянемо підмножину $\Gamma^{(n)} = \Gamma^{(n)}(\mathbb{R}^1)$ простору Γ, що складається з усіх n-точкових конфігурацій $\eta = \{t_1, \ldots, t_n\}$, тобто

$$\Gamma^{(n)} := \{\eta \subset \mathbb{R}^1 \big| |\gamma| = n\}.$$

Нехай

$$\widehat{\mathbb{R}}^n := \{(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n \mid t_k \neq t_j, \quad \text{якщо} \quad k \neq j\}.$$

Відображення

$$\widehat{\mathbb{R}}^n \ni (t_1, \ldots, t_n) \mapsto \{t_1, \ldots, t_n\} = \eta \in \Gamma^{(n)} \tag{11.1}$$

визначає на $\Gamma^{(n)}$ хаусдорфову топологію (на $\widehat{\mathbb{R}}^n$ розглядається топологія, індукована топологією $\mathbb{R}^n$). Відповідна до цієї топології борелева σ-алгебра $\mathcal{B}(\Gamma^{(n)})$ є образом борелевої σ-алгебри $\mathcal{B}(\widehat{\mathbb{R}}^n)$ при відображенні (11.1).

Поряд з Γ розглянемо простір скінченних конфігурацій — диз'юнктну суму топологічних просторів $\Gamma^{(n)}$:

$$\Gamma_0 = \Gamma_0(\mathbb{R}^1) := \bigsqcup_{n=0}^{\infty} \Gamma^{(n)}, \quad \Gamma^{(0)} := \varnothing.$$

Простір Γ_0 має звичайну топологію диз'юнктного об'єднання і відповідну до цієї топології борелеву σ-алгебру $\mathcal{B}(\Gamma_0)$. Як множина

$$\Gamma_0 = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Gamma^{(n)} = \{\gamma \in \Gamma \mid |\gamma| < \infty\}$$

є підмножиною простору Γ. Далі ми, як правило, скінченні конфігурації, тобто точки з Γ_0, будемо позначати через η, а довільні точки з Γ — через γ.

Виходячи з міри Лебега σ на $\mathbb{R}^1$, побудуємо міру на Γ_0. Для довільного $n \in \mathbb{N}_1$ розглянемо продакт-міру $\sigma^{\otimes n}$ на $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Оскільки $\sigma^{\otimes n}(\mathbb{R}^n \backslash \widehat{\mathbb{R}}^n) = 0$, то $\sigma^{\otimes n}$ можна розглядати як σ-скінченну міру на $\mathcal{B}(\widehat{\mathbb{R}}^n)$. Позначимо через σ_n борелеву σ-скінченну міру на $\Gamma^{(n)}$, що є образом міри $\sigma^{\otimes n}$ при відображенні (11.1). Під *мірою Лебега – Пуассона* на $\mathcal{B}(\Gamma_0)$ з мірою інтенсивності σ розуміють σ-скінченну міру

$$\nu_\sigma := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sigma_n, \quad \sigma_0(\varnothing) := 1.$$

Встановимо природний унітарний ізоморфізм між простором Фока $F(N_0)$, $N_0 = L^2(\mathbb{R}^1)$, та гільбертовим простором $L^2_\nu(\Gamma_0) := L^2(\Gamma_0, d\nu_\sigma(\eta))$ комплекснозначних функцій, сумовних з квадратом за мірою ν_σ.

Перш за все нагадаємо, що для кожної конфігурації $\eta = \{t_1, \ldots, t_n\} \in \Gamma^{(n)}$ порядок точок t_j є несуттєвим. Тому означити деяку функцію $\Gamma^{(n)} \ni \eta = \{t_1, \ldots, t_n\} \mapsto f(\eta) = f(\{t_1, \ldots, t_n\}) \in \mathbb{C}^1$ – це те саме, що означити симетричну за змінними $t_1, \ldots, t_n$ функцію $\widehat{\mathbb{R}}^n \ni (t_1, \ldots, t_n) \mapsto f(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{C}^1$,

$$f(\{t_1, \ldots, t_n\}) = f(t_1, \ldots, t_n).$$

Оскільки $\sigma^{\otimes n}(\mathbb{R}^n \setminus \widehat{\mathbb{R}}^n) = 0$, то для довільної борелевої функції $\Gamma^{(n)} \ni \eta \mapsto f(\eta) \in \mathbb{C}^1$ (тобто для борелевої симетричної функції $\widehat{\mathbb{R}}^n \ni (t_1, \ldots, t_n) \mapsto f(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{C}^1$) маємо

$$\int_{\Gamma^{(n)}} f(\eta) d\sigma_n(\eta) = \int_{\widehat{\mathbb{R}}^n} f(t_1, \ldots, t_n) d\sigma^{\otimes n}(t_1, \ldots, t_n) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(t_1, \ldots, t_n) d\sigma^{\otimes n}(t_1, \ldots, t_n). \tag{11.2}$$

З огляду на (11.2) і ту обставину, що n-частинковий простір Фока $\mathcal{F}_n(N_0)$ збігається із простором $\widehat{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n, d\sigma^{\otimes n}(t))$ всіх симетричних функцій із $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n, d\sigma^{\otimes n}(t))$, можна записати

$$L^2(\Gamma^{(n)}, d\sigma_n(\eta)) = \widehat{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n, d\sigma^{\otimes n}(t)) = \mathcal{F}_n(N_0).$$

Останнє дає змогу трактувати простір $L^2_\nu(\Gamma_0)$ як образ простору Фока $F(N_0)$ при унітарному відображенні

$$F(N_0) \ni f = (f_n)_{n=0}^\infty \mapsto (I_\nu f)(\cdot) := F(\cdot) = \sum_{n=0}^\infty F_n(\cdot) \in L^2_\nu(\Gamma_0),$$

де

$$\Gamma_0 \ni \eta \mapsto F_0(\eta) := \begin{cases} f_0, & \text{якщо } \eta = \varnothing, \\ 0 & \text{– у противному разі,} \end{cases}$$

$$\Gamma_0 \ni \eta \mapsto F_n(\eta) := \begin{cases} n! f_n(t_1, \ldots, t_n), & \text{якщо } \eta = \{t_1, \ldots, t_n\} \in \Gamma^{(n)}, \\ 0 & \text{– у противному разі,} \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N}_1.$$

Зокрема, простір $L^2_\nu(\Gamma_0)$ допускає зображення

$$L^2_\nu(\Gamma_0) = \bigoplus_{n=0}^\infty L^2\Big(\Gamma^{(n)}, d\sigma_n(\eta)\Big) \frac{1}{n!}.$$

Під дією відображення I_ν ядерне оснащення (1.3) переходить в ядерне оснащення простору $L^2_\nu(\Gamma_0)$ (нагадаємо, що $N_0 = L^2(\mathbb{R}^1) = S_0(\mathbb{R}^1)$, $N_p = S_{p+1}(\mathbb{R}^1)$, $p \in \mathbb{N}_1$). Точніше,

$$(\Phi_\nu)' \supset H_\nu(-p,-q) \supset L^2_\nu(\Gamma_0) \supset H_\nu(p,q) \supset \Phi_\nu, \tag{11.3}$$

$$\Phi_\nu := \operatorname*{pr\,lim}_{\tilde p,\tilde q\in\mathbb{N}_1} H_\nu(\tilde p,\tilde q), \qquad (\Phi_\nu)' := \operatorname*{ind\,lim}_{\tilde p,\tilde q\in\mathbb{N}_1} H_\nu(-\tilde p,-\tilde q),$$

де $H_\nu(-p,-q)$, $p,q\in\mathbb{N}_1$, — негативний простір по відношенню до нульового $L^2_\nu(\Gamma_0)$ та позитивного гільбертового простору

$$H_\nu(p,q) := I_\nu\Big(\mathcal{F}(N_p,\tau(q))\Big) =$$

$$= \Big\{F\in L^2_\nu(\Gamma_0)\,|\,\exists (f_n)_{n=0}^\infty \in \mathcal{F}(N_p,\tau(q)):\; F = I_\nu(f_n)_{n=0}^\infty\Big\}$$

з гільбертовою нормою

$$\|F\|^2_{H_\nu(p,q)} = \big\|I_\nu(f_n)_{n=0}^\infty\big\|^2_{H_\nu(p,q)} := \sum_{n=0}^\infty \|f_n\|^2_{\mathcal{F}_n(N_0)}K^{qn}, \quad F\in H_\nu(p,q).$$

Простори (L^2_π) та $L^2_\nu(\Gamma_0)$ є різними функціональними реалізаціями простору Фока $F(N_0)$, $N_0 = L^2(\mathbb{R}^1)$. Відображення

$$I_{\nu\pi} := I_\pi I_\nu^{-1} : L^2_\nu(\Gamma_0) \to (L^2_\pi)$$

задає унітарний ізоморфізм між цими просторами.

Зрозуміло, що реалізувавши простір Фока $F(N_0)$ як простір $L^2_\nu(\Gamma_0)$, можна будувати оснащення простору (L^2_π) як образ оснащення (11.3). При цьому під дією унітарного відображення

$$I_{\nu\pi} := I_\pi I_\nu^{-1} : H_\nu(p,q) \to H^\omega(p,q), \quad p,q\in\mathbb{N}_1,$$

отримаємо оснащення простору (L^2_π), побудоване за характерами Аппеля, а під дією унітарного відображення

$$I^\chi_\nu := I^\chi I_\nu^{-1} : H_\nu(p,q) \to H^\chi(p,q), \quad p,\ q\in\mathbb{N}_3,$$

— оснащення простору (L^2_π), побудоване за характерами Дельсарта (відображення I^χ (4.12) розглядаємо як унітарний оператор, що діє із $\mathcal{F}(N_p,\tau(q))$ в $H^\chi(p,q)$).

12. Пуассонів аналіз на просторі конфігурацій. Нехай $\mathcal{D}(\mathbb{R}^1) := C^\infty_{\text{fin}}(\mathbb{R}^1)$ — простір основних функцій з класичною топологією, $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ — спряжений до нього простір узагальнених функцій зі слабкою топологією та σ-алгеброю $C_\sigma(\mathcal{D}')$ його підмножин, породженою циліндричними множинами

$$\{x\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)\,|\,(\langle x,\varphi_1\rangle,\ldots,\langle x,\varphi_1\rangle)\in\beta\}, \qquad \varphi_i\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^1), \quad \beta\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \quad n\in\mathbb{N}_1.$$

Неважко бачити, що відображення

$$\Gamma\ni\gamma\mapsto O\gamma := x = \sum_{t\in\gamma}\delta_t \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1) \tag{12.1}$$

визначене і є ін'єктивним (δ_t — δ-функція, зосереджена в точці $t\in\mathbb{R}^1$). Позначимо через $\widetilde\Gamma = \widetilde\Gamma(\mathbb{R}^1)$ сукупність усіх конфігурацій $\gamma\in\Gamma$, котрі при відображенні O

переходять в узагальнені функції із простору $S_{-2}(\mathbb{R}^1) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ $\Big($тобто $O\gamma = \sum_{t\in\gamma}\delta_t \in S_{-2}(\mathbb{R}^1)$ при $\gamma \in \widetilde{\Gamma}\Big)$.

Нехай $\widetilde{Q}$ — образ простору $\widetilde{\Gamma}$ при відображенні (12.1), тобто

$$\widetilde{Q} := \left\{ \sum_{t\in\gamma} \delta_t \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1) \;\Big|\; \gamma \in \Gamma \right\} \cap S_{-2}(\mathbb{R}^1) = \left\{ \sum_{t\in\gamma} \delta_t \in S_{-2}(\mathbb{R}^1) \mid \gamma \in \widetilde{\Gamma} \right\}.$$

Норма в $S_{-2}(\mathbb{R}^1)$ індукує метрику в $\widetilde{Q}$ і перетворює $\widetilde{Q}$ в сепарабельний метричний простір. Множина $\widetilde{Q} \subset S_{-2}(\mathbb{R}^1)$ має повну зовнішню міру Пуассона π (8.4) (це випливає з того, що множини $\Gamma \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ та $S_{-2}(\mathbb{R}^1) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ мають повну зовнішню міру продовженої з $\mathcal{B}(S_{-2})$ на $C_\sigma(\mathcal{D}')$ міри π; див., наприклад, [6, 8 – 10, 14]), тому π можна модифікувати до борелевої ймовірнісної міри на $\widetilde{Q}$. Модифіковану міру π щодо $\widetilde{Q}$ також позначатимемо π і називатимемо мірою Пуассона. Перетворення Фур'є цієї міри має вигляд

$$\int\limits_{\widetilde{Q}} e^{i\langle\lambda,x\rangle} d\pi(x) = \exp\langle 1, e^{i\lambda} - 1\rangle, \quad \lambda \in N_1 = S_2(\mathbb{R}^1). \tag{12.2}$$

Зрозуміло, що результати, викладені в пп. 9 – 11, залишаються справедливими для простору $Q = \widetilde{Q}$, міри $\rho = \pi$ та функцій $\chi(x,\lambda)$ (9.2) і $\omega(x,\lambda)$ (9.4), котрі зараз допускають зображення: для всіх $x \in \widetilde{Q}$ та $\lambda \in B_\omega$

$$\chi(x,\lambda) = \exp\langle x, \log(1+\lambda)\rangle = \prod_{t\in\gamma}(1+\lambda(t)),$$

$$\omega(x,\lambda) = \exp\Big(\langle x, \log(1+\lambda)\rangle - \langle 1, \lambda\rangle\Big) = \exp(-\langle 1,\lambda\rangle)\prod_{t\in\gamma}(1+\lambda(t)),$$

де $\gamma = O^{-1}(x) \in \widetilde{\Gamma}$ (тут і далі відображення O (12.1) розглядаємо як оборотне відображення $O : \widetilde{\Gamma} \to \widetilde{Q}$ з оберненим $O^{-1} : \widetilde{Q} \to \widetilde{\Gamma}$).

Згідно з результатами п. 11 оснащення простору $(L^2_\pi) := L^2(\widetilde{Q}, d\pi(x))$ можна будувати як образ оснащення (11.3) простору $L^2_\nu(\Gamma_0)$ при відображенні $I_{\nu\pi}$ або I^χ_ν. Виявляється, що унітарний ізоморфізм $I^\chi_\nu : H_\nu(p,q) \to H^\chi(p,q)$ має просте комбінаторне тлумачення. Перш ніж переходити до формулювання відповідного твердження, нагадаємо визначення так званого K-перетворення між функціями на Γ_0 та $\widetilde{Q}$, введеного в [26] і дослідженого в [26, 27].

За визначенням

$$(\mathsf{K}f)(x) := \sum_{\eta\subset\gamma} f(\eta), \quad x \in \widetilde{Q}, \tag{12.3}$$

де $\gamma = O^{-1}(x) \in \widetilde{\Gamma}$, $f : \Gamma_0 \to \mathbb{C}^1$ — довільна функція, для якої права частина (12.3) має сенс. Підсумовування в останньому виразі проводиться за всіма скінченними підконфігураціями конфігурації $\gamma = O^{-1}(x) \in \widetilde{\Gamma}$. Зазначимо, що принаймні для векторів f із щільної у просторі $L^2_\nu(\Gamma_0)$ множини $I_\nu\Big(\mathring{\mathcal{F}}_{\text{fin}}(\mathcal{D}(\mathbb{R}^1))\Big)$ K-перетворення визначено (сума (12.3) є скінченною).

Теорема 12.1. *Для всіх* $p, q \in \mathbb{N}_3$ *відображення*

$$H_\nu(p,q) \supset I_\nu(\mathring{\mathcal{F}}_{\text{fin}}(\mathcal{D}(\mathbb{R}^1))) \ni f \mapsto \mathsf{K}f \in H^\chi(p,q)$$

визначене і є лінійним та неперервним. Після замикання за неперервністю оператор K *є унітарним. Більш того, має місце операторна рівність*

$$\mathsf{K} = I_\nu^\chi : H_\nu(p,q) \to H^\chi(p,q).$$

Доведення. Твердження теореми безпосередньо випливає з того, що на векторах

$$e_\nu(\varphi) := I_\nu\left(\frac{\varphi^{\otimes n}}{n!}\right)_{n=0}^\infty \in H_\nu(p,q), \quad \varphi \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^1)$$

(норма $\|\varphi\|_{\mathcal{F}_1(N_p)}$ достатньо мала), K-перетворення визначено (сума (12.3) є скінченною) і

$$(\mathsf{K}e_\nu(\varphi))(x) = \sum_{\eta\subset\gamma}(e_\nu(\varphi))(\eta) = \prod_{t\in\gamma}(1+\varphi(t)) =$$

$$= \chi(x,\varphi) = (I_\nu^\chi e_\nu(\varphi))(x), \quad \gamma = O^{-1}(x) \in \widetilde{\Gamma}$$

для всіх $x \in \widetilde{Q}$.

Теорему доведено.

***Наслідок* 12.1.** *Якщо* $\varphi \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^1)$, *то*

$$\langle\varphi^{\otimes n}, \chi_n(x)\rangle = (I_\nu^\chi(I_\nu\varphi^{\otimes n}))(x) = (\mathsf{K}(I_\nu\varphi^{\otimes n}))(x) = n! \sum_{\{t_1,\ldots,t_n\}\subset\gamma} \prod_{i=1}^n \varphi(t_i)$$

для всіх $x \in \widetilde{Q}$, $n \in \mathbb{N}_1$ *з* $\gamma = O^{-1}(x) \in \widetilde{\Gamma}$.

Неважко бачити, що на функціях $f \in I_\pi(\mathcal{F}_{\text{fin}}(\mathcal{N}))$, $\mathcal{N} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$, оператор народження $\partial^+(\varphi)$, $\varphi \in \mathcal{F}_1(\mathcal{N}) = \mathcal{S}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^1)$, діє за правилом: для π-майже всіх $x \in \widetilde{Q}$

$$(\partial^+(\varphi)f)(x) = \sum_{t\in\gamma} f(x-\delta_t)\varphi(t) - f(x)\int_{\mathbb{R}^1}\varphi(t)d\sigma(t), \quad \gamma = O^{-1}(x) \in \widetilde{\Gamma}. \quad (12.4)$$

Справді, нехай $g \in I_\pi(\mathcal{F}_{\text{fin}}(\mathcal{N}))$, тоді на підставі (10.9) маємо

$$(\partial(\bar{\varphi})g, f)_{(L^2_\pi)} = \int_{\widetilde{Q}}\int_{\mathbb{R}^1} g(x+\delta_t)\overline{f(x)\varphi(t)}d\sigma(t)d\pi(x) -$$

$$-\left(\int_{\widetilde{Q}} g(x)\overline{f(x)}d\pi(x)\right)\left(\int_{\mathbb{R}^1}\overline{\varphi(t)}d\sigma(t)\right). \quad (12.5)$$

Застосувавши тотожність Мекке [28]

$$\int_{\widetilde{Q}} \sum_{t\in O^{-1}(x)} k(x,t)d\pi(x) = \int_{\widetilde{Q}} \int_{\mathbb{R}^1} k(x+\delta_t,t)d\sigma(t)d\pi(x)$$

до першого інтеграла в правій частині (12.5), отримаємо

$$(\partial(\bar{\varphi})g,f)_{(L^2_\pi)} = \int_{\widetilde{Q}} g(x) \sum_{t\in O^{-1}(x)} \overline{f(x-\delta_t)\varphi(t)}\, d\pi(x) -$$

$$-\Bigg(\int_{\widetilde{Q}} g(x)\overline{f(x)}d\pi(x)\Bigg)\Bigg(\int_{\mathbb{R}^1} \overline{\varphi(t)}d\sigma(t)\Bigg),$$

що забезпечує справедливість (12.4).

Зазначимо, що наведена вище тотожність Мекке має простий операторний зміст у термінах пуассонового поля, спектральною мірою якого є міра Пуассона (див. [25]).

Автори глибоко вдячні М. О. Качановському за корисні обговорення і критичні зауваження, котрі сприяли поліпшенню роботи.

1. *Березанський Ю. М., Теско В. А.* Простори основних і узагальнених функцій, пов'язані з узагальненим зсувом // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 12. – С. 1587–1657. (English transl.: Ukr. Math. J. – 2003. – **55**.)
2. *Ito Y.* Generalized Poisson functionals // Probab. Theory Related Fields. – 1988. – **77**. – P. 1–28.
3. *Ito Y., Kubo I.* Calculus on Gaussian and Poisson white noise // Nagoya Math. J. – 1988. – **111**. – P. 41–84.
4. *Us G. F.* Dual Appell systems in Poissonian analysis // Meth. Funct. Anal. and Top. – 1995. – **1**, № 1. – P. 93–108.
5. *Kondratiev Yu. G., Da Silva J. L., Streit L., Us G. F.* Analysis on Poisson and Gamma spaces // Infinite Dim. Anal. Quantum Probab. Related Topics. – 1998. – **1**, № 1. – P. 91–117.
6. *Albeverio S., Kondratiev Yu. G., Röckner M.* Analysis and geometry on configuration spaces // J. Funct. Anal. – 1998. – **154**, № 2. – P. 444–500.
7. *Kachanovsky N. A.* On biorthogonal approach to a construction of non-Gaussian analysis and application to the Poisson anaysis on the configuration space // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2000. – **6**, № 2. – P. 13–21.
8. *Kuna T.* Studies in configuration spaces analysis and applications // Bonn. math. Schr. – 1999. – № 324. – 187 p.
9. *Kondratiev Yu. G., Kuna T., Oliveira M. J.* Analytic aspects of Poissonian white noise analysis // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2002. – **8**, № 4. – P. 15–48.
10. *Oliveira M. J.* Configuration space analysis and Poissonian white noise analysis. – 2002. – 185 p.
11. *Березанский Ю. М.* Пуассонов бесконечномерный анализ как пример анализа, связанного с операторами обобщенного сдвига // Функцион. анализ и его прил. – 1998. – **32**, № 3. – С. 65–70. (English transl.: Funct. Anal. Appl. – 1998. – **32**.)
12. *Lytvynov E. W.* A note on test and generalized functionals of Poisson white noise // Hiroshima Math. J. – 1998. – **28**, № 3. – P. 463–480.
13. *Kondratiev Yu. G., Lytvynov E. W.* Operators of Gamma white noise calculus // Infinite Dim. Anal. Quantum Probab. Related Topics. – 2000. – **3**, № 3. – P. 303–335.
14. *Berezansky Yu. M., Kondratiev Yu. G.* Spectral methods in infinite dimensional analysis. – Dordrecht etc.: Kluwer Acad. Publ., 1995. – Vol. 1. – xvii + 572 p.; Vol. 2. – viii + 427 p. (Russian edition: Kiev: Naukova Dumka, 1988. – 680 p.)
15. *Березанский Ю. М.* Об образах операторов вторичного квантования // Докл. НАН Украины. – 1993. – № 11. – С. 20–24.
16. *Finkelshtein D. L., Kondratiev Yu. G., Konstantinov A. Yu., Röckner M.* Symmetric differential operators of the second order in Poisson spaces // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2001. – **7**, № 4. – P. 489–509.

17. *Berezansky Yu. M., Sheftel Z. G., Us G. F.* Functional Analysis: Vols 1, 2. – Basel etc.: Birkhäuser, 1996. – Vol. 1. – xix + 423 p.; Vol. 2. – xvi + 293 p. (Russian edition: Kiev: Vyshcha Shkola, 1990. – 600 p.)
18. *Kondratiev Yu. G., Da Silva J. L., Streit L.* Generalized Appell systems // Meth. Funct. Anal. and Top. – 1997. – **3**, № 3. – P. 28–61.
19. *Kondratiev Yu. G., Streit L., Westerkamp W., Yan J.* Generalized functions on infinite dimensional analysis // Hiroshima Math. J. – 1998. – **28**, № 2. – P. 213–260.
20. *Скороход А. В.* Интегрирование в гильбертовом пространстве. – М.: Наука, 1975. – 237 с.
21. *Теско В. А.* Про простори, що виникають при побудові нескінченновимірного аналізу за біортогональною схемою // Укр. мат. журн. – 2004. – **56**, № 7. – С. 977–990. (English transl.: Ukr. Math. J. – 2004. – **56**.)
22. *Berezansky Yu. M., Kalyuzhnyi A. A.* Harmonic analylysis in hypercomplex systems. – Dordrecht etc.: Kluwer Acad. Publ., 1998. – x + 483 p. (Russian edition: Kiev: Naukova Dumka, 1992. – 352 p.)
23. *Berezansky Yu. M., Kondratiev Yu. G.* Biorthogonal systems in hypergroups: an extension of non-Gaussian analysis // Meth. Funct. Anal. and Top. – 1996. – **2**, № 2. – P. 1–50.
24. *Maz'ja V. G., Shaposhnicova T. O.* Multiplicators in spaces of differentiable functions. – Leningrad: Leningrad Univ., 1986. – 404 p.
25. *Berezansky Yu. M.* Poisson measure as the spectral measure of Jacobi field // Infinite Dim. Anal. Quantum Probab. Related Topics. – 2000. – **3**, № 1. – P. 121–139.
26. *Lenard A.* Correlation functions and the uniqueness of the state in classical statistical mechanics // Communs Math. Phys. – 1973. – № 30. – P. 35–40.
27. *Kondratiev Yu. G., Kuna T.* Harmonic analysis on configuration space I. General theory // Infinite Dim. Anal. Quantum Probab. Related Topics. – 2002. – **5**, № 2. – P. 201–233.
28. *Mecke J.* Stationäre zufällige Maße auf lokalkompakten Abelshen Gruppen // Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb. – 1967. – № 9. – S. 36–58.

Одержано 04.06.2004