УДК 517.956.6

Д. А. Номировский (Киев. нац. ун-т им. Т. Шевченко)

О ГОМЕОМОРФИЗМАХ, ОСУЩЕСТВЛЯЕМЫХ НЕКОТОРЫМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

For sufficiently broad class of partial differential operators, we prove a theorem on homeomorphism. We consider applications of this theorem to some classical operators.

Для досить широкого класу диференціальних операторів із частинними похідними доведено теорему про гомеоморфізм. Розглянуто застосування цієї теореми до деяких класичних операторів.

1. Введение. В работе [1] при изучении электроионных волн в холодной „намагниченной" плазме приходят к дифференциальному уравнению в частных производных относительно обобщенного потенциала $\Phi(t, x)$:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\omega_\varepsilon^2\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\omega_i^2\right)\Delta_2\Phi + \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\omega_p^2\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\omega_{B_\varepsilon}^2\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\omega_{B_i}^2\right)\Phi_{x_3x_3} = F, \tag{1}$$

где

$$\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2},$$

$\Phi(t, x)$ связано с потенциалом электрического поля $\varphi(t, x)$ некоторым дифференциальным соотношением.

Там же получены и другие аналогичные уравнения, а также ставится вопрос о построении теории разрешимости таких уравнений. Подобные операторы изучались многими авторами (см., например, [2–5]).

В данной статье мы докажем теорему о гомеоморфизмах, осуществляемых некоторыми операторами (в том числе и для оператора уравнения (1)) с самосопряженными краевыми условиями по пространственным переменным, что обобщает некоторые известные результаты [4, 5]. Доказательство основывается на предложенной в [6] (и значительно развитой в [5]) идее домножения $\mathcal{L}u$ на вспомогательный интегральный (в данной работе интегро-дифференциальный) оператор Iu.

2. Постановка задачи и основные обозначения. В цилиндрической области $Q = (0, T) \times \Omega$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная односвязная область с регулярной границей $\partial\Omega$, рассмотрим систему

$$\mathcal{L}u \equiv \sum_{k=0}^{6} \frac{\partial^k}{\partial t^k}\mathcal{A}_k u = F$$

с краевыми условиями

$$u\big|_{x\in\partial\Omega} = 0, \quad \left.\frac{\partial^l u}{\partial t^l}\right|_{t=0} = 0, \quad l = \overline{0, 5}. \tag{2}$$

Операторы $\mathcal{A}_k$ не зависят от переменной t и задаются дифференциальными выражениями второго порядка

$$\mathcal{A}_k u = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij;k}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{n} a_{i;k}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + a_k(x)u, \quad k = \overline{0, 6},$$

где $a_{ij;k}(x) = a_{ji;k}(x)$, $a_{i;k}(x)$ — непрерывно дифференцируемые, $a_k(x)$ — непрерывные в $\overline{\Omega}$ функции. Относительно оператора $\mathcal{A}_6$ предполагается, что он равномерно эллиптичен в $\overline{\Omega}$, т. е. существуют положительные постоянные $\alpha_{\mathcal{A}_6,i}$ такие, что неравенство

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij;6}(x)\xi_i\xi_j \geq \sum_{i=1}^{n} \alpha_{\mathcal{A}_6,i}\xi_i^2$$

выполняется для произвольных $\xi_i \in \mathbb{R}$ и $x \in \overline{\Omega}$.

Пусть в области Q выполняются неравенства Фридрихса $\|v\|^2_{L_2(Q)} \leq \leq c_{f,i}\|v_{x_i}\|^2_{L_2(Q)}$, $i = \overline{1,n}$, для всех гладких в $\overline{Q}$ функций $v(t,x)$, удовлетворяющих условию $v|_{x\in\partial\Omega} = 0$, $c_{f,i}$ — положительные постоянные.

Кроме этого будем предполагать, что в $\overline{\Omega}$ выполняются неравенства

$$\begin{gathered}\inf_{x\in\overline{\Omega}} a_6(x) > \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{c_{f,i}}}\sup_{x\in\overline{\Omega}}\left|a_{i;6}(x)\right| - \frac{\alpha_{\mathcal{A}_6,i}}{c_{f,i}}\right),\\ 2\alpha_{\mathcal{A}_6,i} > \sqrt{c_{f,i}}\sup_{x\in\overline{\Omega}}\left|a_{i;6}(x)\right|, \quad i = \overline{1,n}.\end{gathered} \tag{3}$$

Поскольку неравенства (3) строгие, первое из них допускает усиление на постоянную $\varepsilon > 0$, а второе — на $2c_{f,i}\varepsilon/n$.

Обозначим через C^* постоянную, которая мажорирует в области $\overline{\Omega}$ все коэффициенты $|a_{ij;k}|$, $|a_{i;k}|$, $|a_k|$, $k = \overline{0,6}$, через $C_0^\infty(\overline{Q})$ множество бесконечно дифференцируемых в $\overline{Q}$ функций, удовлетворяющих условиям (2), через $C_T^\infty(\overline{Q})$ аналогичное множество, в котором функции удовлетворяют сопряженным условиям

$$v|_{x\in\partial\Omega} = 0, \quad \left.\frac{\partial^l v}{\partial t^l}\right|_{t=T} = 0, \quad l = \overline{0,5}. \tag{4}$$

Пусть $W_0^{k,1}$ — пополнение множества функций $u(t,x) \in C^\infty(\overline{Q})$, удовлетворяющих условиям $u|_{x\in\partial\Omega} = 0$, $\left.\frac{\partial^l u}{\partial t^l}\right|_{t=0} = 0$, $l = \overline{0,(k-1)}$, по норме

$$\|u\|_{W_0^{k,1}} = \left(\sum_{i=1}^{n}\int_Q \left(u_{x_i}^{(k)}\right)^2 dQ\right)^{1/2}; \tag{5}$$

где $k \in \mathbb{N} \cup 0$, верхний индекс в $f^{(k)}$ здесь и далее обозначает k-ю производную функции f по переменной t, $W_T^{k,1}$ — пополнение множества функций $v(t,x) \in C^\infty(\overline{Q})$, удовлетворяющих условиям $v|_{x\in\partial\Omega} = 0$, $\left.\frac{\partial^l v}{\partial t^l}\right|_{t=T} = 0$, $l = \overline{0,(k-1)}$, по той же норме (5). Через $W_0^{-k,-1}$, $W_T^{-k,-1}$ обозначим соответствующие негативные пространства (относительно $L_2(Q)$).

Для всех $u \in C_0^\infty(\overline{Q})$, $v \in C_T^\infty(\overline{Q})$ после применения формулы интегрирования по частям имеем

$$(\mathcal{L}u, v)_{L_2(Q)} = \sum_{k=0}^{6} (-1)^k \int_Q \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij;k} u_{x_i} v_{x_j}^{(k)} + \sum_{i=1}^{n} a_{i;k} u_{x_i} v^{(k)} + a_k u v^{(k)} dQ.$$

Отсюда легко получаем $\left|(\mathcal{L}u, v)_{L_2(Q)}\right| \le c\|u\|_{W_0^{0,1}}\|v\|_{W_T^{6,1}}$, где $c > 0$. Поэтому для всех $u \in C_0^\infty(\overline{Q})$ $\|\mathcal{L}u\|_{W_T^{-6,-1}} \le c\|u\|_{W_0^{0,1}}$. Это неравенство позволяет расширить непрерывным образом $\mathcal{L}$ с множества $C_0^\infty(\overline{Q})$ до оператора $\overline{\mathcal{L}}$, действующего непрерывно в следующих пространствах $\overline{\mathcal{L}}\colon W_0^{0,1} \to W_T^{-6,-1}$.

Докажем неравенства коэрцитивности для оператора $\overline{\mathcal{L}}$.

Лемма 1. *Для всех* $u \in W_0^{0,1}$ *имеет место неравенство*

$$\|\overline{\mathcal{L}}u\|_{W_T^{-6,-1}} \ge c^{-1}\|u\|_{W_0^{0,1}}.$$

Доказательство достаточно провести для функций $u \in C_0^\infty(\overline{Q})$, общее неравенство получается предельным переходом.

Рассмотрим значение функционала $\overline{\mathcal{L}}u \in W_T^{-6,-1}$ на элементе $v(t,x) = I(u)$, где $v(t,x)$ — решение задачи Коши

$$e^{Mt}\left(v - v^{(1)} + v^{(2)} - v^{(3)} + v^{(4)} - v^{(5)} + v^{(6)}\right) = u(t,x), \qquad \left.\frac{\partial^l v}{\partial t^l}\right|_{t=T} = 0, \quad l = \overline{0,5},$$

M — достаточно большая положительная постоянная.

Ясно, что $v \in W_T^{6,1}$. Имеем

$$\left\langle \overline{\mathcal{L}}u, v\right\rangle_{W_T^{-6,-1}\times W_T^{6,1}} = \sum_{k=0}^{6}\left\langle \overline{\mathcal{A}}_k u^{(k)}, v\right\rangle_{W_T^{-6,-1}\times W_T^{6,1}}.$$

Рассмотрим каждое слагаемое отдельно. Применяя формулу интегрирования по частям, переходя к поверхностным интегралам и учитывая условия (2), (4), имеем

$$\left\langle \overline{\mathcal{A}}_6 u^{(6)}, v\right\rangle_{W_T^{-6,-1}\times W_T^{6,1}} = A_1 + A_2 + \ldots + A_{10},$$

где

$$A_1 = \sum_{i,j=1}^{n}\int_Q a_{ij;6} e^{Mt} v_{x_i}^{(6)} v_{x_j}^{(6)} dQ \ge \sum_{i=1}^{n}\int_Q \alpha_{\mathcal{A}_6,i} e^{Mt}\left(v_{x_i}^{(6)}\right)^2 dQ,$$

$$A_2 = -\sum_{i,j=1}^{n}\int_Q a_{ij;6} e^{Mt} v_{x_i}^{(5)} v_{x_j}^{(6)} dQ =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega a_{ij;6}\, v_{x_i}^{(5)} v_{x_j}^{(5)}\Big|_{t=0} d\Omega + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\int_Q a_{ij;6} M e^{Mt} v_{x_i}^{(5)} v_{x_j}^{(5)} dQ \ge$$

$$\ge \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \frac{\alpha_{\mathcal{A}_6,i}}{2}\left(v_{x_i}^{(5)}\right)^2\Big|_{t=0} d\Omega + \sum_{i=1}^{n}\int_Q \frac{\alpha_{\mathcal{A}_6,i} M}{2} e^{Mt}\left(v_{x_i}^{(5)}\right)^2 dQ.$$

Далее будем применять соглашение, что подчеркнутое слагаемое содержится во всех последующих равенствах, но для сокращения записи не записывается, например $\underline{a} + b + c = \underline{b} + c = c$. Имеем

$$A_3 = \sum_{i,j=1}^{n} \int_Q a_{ij;6} e^{Mt} v_{x_i}^{(4)} v_{x_j}^{(6)} dQ =$$

$$= \underline{-\sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij;6}\, v_{x_i}^{(4)} v_{x_j}^{(5)} \Big|_{t=0} d\Omega} - \sum_{i,j=1}^{n} \int_Q a_{ij;6} M e^{Mt} v_{x_i}^{(4)} v_{x_j}^{(5)} dQ -$$

$$\underline{-\sum_{i,j=1}^{n} \int_Q a_{ij;6} e^{Mt}\, v_{x_i}^{(5)} v_{x_j}^{(5)} dQ} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij;6} M\, v_{x_i}^{(4)} v_{x_j}^{(4)} \Big|_{t=0} d\Omega + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \int_Q a_{ij;6} M^2 e^{Mt} v_{x_i}^{(4)} v_{x_j}^{(4)} dQ.$$

Таким образом, используя неравенство $ab \geq -\varepsilon a^2 - \dfrac{b^2}{4\varepsilon}$, имеем

$$A_3 \geq \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\alpha_{\mathcal{A}_6,i} M}{2} \left(v_{x_i}^{(4)}\right)^2 \Big|_{t=0} d\Omega + \sum_{i=1}^{n} \int_Q \frac{\alpha_{\mathcal{A}_6,i} M^2}{2} e^{Mt} \left(v_{x_i}^{(4)}\right)^2 dQ -$$

$$- nC^* \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{10nC^*}{\alpha_{\mathcal{A}_6,i}} \left(v_{x_i}^{(4)}\right)^2 + \frac{\alpha_{\mathcal{A}_6,i}}{40nC^*} \left(v_{x_i}^{(5)}\right)^2 \Bigg|_{t=0} d\Omega -$$

$$- nC^* \sum_{i=1}^{n} \int_Q e^{Mt} \left(v_{x_i}^{(5)}\right)^2 dQ.$$

Далее

$$A_4 = -\sum_{i,j=1}^{n} \int_Q a_{ij;6} e^{Mt} v_{x_i}^{(3)} v_{x_j}^{(6)} dQ =$$

$$= \underline{\sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij;6}\, v_{x_i}^{(3)} v_{x_j}^{(5)} \Big|_{t=0} d\Omega} + \sum_{i,j=1}^{n} \int_Q a_{ij;6} M e^{Mt} v_{x_i}^{(3)} v_{x_j}^{(5)} dQ +$$

$$\underline{+\sum_{i,j=1}^{n} \int_Q a_{ij;6} e^{Mt}\, v_{x_i}^{(4)} v_{x_j}^{(5)} dQ} =$$

$$= \underline{-\sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij;6}\, M v_{x_i}^{(3)} v_{x_j}^{(4)} \Big|_{t=0} d\Omega} - \sum_{i,j=1}^{n} \int_Q a_{ij;6} M^2 e^{Mt} v_{x_i}^{(3)} v_{x_j}^{(4)} dQ -$$

$$\underline{-\sum_{i,j=1}^{n} \int_Q a_{ij;6} M e^{Mt}\, v_{x_i}^{(4)} v_{x_j}^{(4)} dQ} =$$

$$= \frac{M^2}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij;6}\, v_{x_i}^{(3)} v_{x_j}^{(3)} \Big|_{t=0} d\Omega + \frac{M^3}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \int_Q a_{ij;6}\, e^{Mt} v_{x_i}^{(3)} v_{x_j}^{(3)} dQ.$$

Аналогично

$$A_5 = \sum_{i,j=1}^{n} \int_Q a_{ij;6} e^{Mt} v_{x_i}^{(2)} v_{x_j}^{(6)} dQ =$$

$$= \underline{-\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega} a_{ij;6}\, v^{(2)}_{x_i} v^{(5)}_{x_j}\Big|_{t=0} d\Omega} - \sum_{i,j=1}^{n}\int_{Q} a_{ij;6} M e^{Mt} v^{(2)}_{x_i} v^{(5)}_{x_j} dQ -$$

$$\underline{- \sum_{i,j=1}^{n}\int_{Q} a_{ij;6}\, e^{Mt} v^{(3)}_{x_i} v^{(5)}_{x_j} dQ} = \ldots$$

$$\ldots = \frac{M^3}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega} a_{ij;6}\, v^{(2)}_{x_i} v^{(2)}_{x_j}\Big|_{t=0} d\Omega + \frac{M^4}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\int_{Q} a_{ij;6}\, e^{Mt} v^{(2)}_{x_i} v^{(2)}_{x_j} dQ,$$

$$A_6 = -\sum_{i,j=1}^{n}\int_{Q} a_{ij;6} e^{Mt} v^{(1)}_{x_i} v^{(6)}_{x_j} dQ =$$

$$= \underline{\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega} a_{ij;6}\, v^{(1)}_{x_i} v^{(5)}_{x_j}\Big|_{t=0} d\Omega} + \sum_{i,j=1}^{n}\int_{Q} a_{ij;6} M e^{Mt} v^{(1)}_{x_i} v^{(5)}_{x_j} dQ +$$

$$\underline{+ \sum_{i,j=1}^{n}\int_{Q} a_{ij;6}\, e^{Mt} v^{(2)}_{x_i} v^{(5)}_{x_j} dQ} = \ldots$$

$$\ldots = \frac{M^4}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega} a_{ij;6}\, v^{(1)}_{x_i} v^{(1)}_{x_j}\Big|_{t=0} d\Omega + \frac{M^5}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\int_{Q} a_{ij;6}\, e^{Mt} v^{(1)}_{x_i} v^{(1)}_{x_j} dQ,$$

$$A_7 = \sum_{i,j=1}^{n}\int_{Q} a_{ij;6} e^{Mt} v_{x_i} v^{(6)}_{x_j} dQ =$$

$$= \underline{-\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega} a_{ij;6}\, v_{x_i} v^{(5)}_{x_j}\Big|_{t=0} d\Omega} - \sum_{i,j=1}^{n}\int_{Q} a_{ij;6} M e^{Mt} v_{x_i} v^{(5)}_{x_j} dQ -$$

$$\underline{- \sum_{i,j=1}^{n}\int_{Q} a_{ij;6}\, e^{Mt} v^{(1)}_{x_i} v^{(5)}_{x_j} dQ} = \ldots$$

$$\ldots = \frac{M^5}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega} a_{ij;6}\, v_{x_i} v_{x_j}\Big|_{t=0} d\Omega + \frac{M^6}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\int_{Q} a_{ij;6}\, e^{Mt} v_{x_i} v_{x_j} dQ.$$

Оценивая слагаемые A_4, A_5, A_6, A_7 аналогично A_1, A_2, A_3, получаем, что существует такая достаточно большая константа $M > 0$, что выполняется неравенство

$$A_1 + \ldots + A_7 \geq \sum_{i=1}^{n}\int_{Q} \alpha_{\mathcal{A}_6,i} e^{Mt}\left(v^{(6)}_{x_i}\right)^2 dQ + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{5}\int_{Q} \frac{\alpha_{\mathcal{A}_6,i}}{4} e^{Mt} M^{6-k}\left(v^{(k)}_{x_i}\right)^2 dQ.$$

Применяя неравенство (3), далее имеем

$$A_8 = \sum_{i=1}^{n}\int_{Q} a_{i;6} e^{Mt} v^{(6)}_{x_i} v^{(6)} dQ + \int_{Q} a_6 e^{Mt}\left(v^{(6)}\right)^2 dQ \geq$$

$$\geq \sum_{i=1}^{n}\int_{Q} a_{i;6} e^{Mt} v^{(6)}_{x_i} v^{(6)} + \left(\frac{1}{\sqrt{c_{f,i}}}\sup_{x\in\overline{\Omega}}\left|a_{i;6}\right| - \frac{\alpha_{\mathcal{A}_6,i}}{c_{f,i}} + \frac{\varepsilon}{n}\right) e^{Mt}\left(v^{(6)}\right)^2 dQ.$$

Применяя неравенство Фридрихса

$$\int\limits_Q \left(\frac{1}{2\sqrt{c_{f,i}}} \sup_{x\in\overline{\Omega}} |a_{i;6}| - \frac{\alpha_{\mathcal{A}_6,i}}{c_{f,i}} + \frac{\varepsilon}{n} \right) e^{Mt} \left(v^{(6)}\right)^2 dQ \ge$$

$$\ge \int\limits_Q \left(\frac{\sqrt{c_{f,i}}}{2} \sup_{x\in\overline{\Omega}} |a_{i;6}| - \alpha_{\mathcal{A}_6,i} + \frac{\varepsilon c_{f,i}}{n} \right) e^{Mt} \left(v^{(6)}_{x_i}\right)^2 dQ,$$

получаем

$$A_8 \le \sum_{i=1}^{n} \int\limits_Q \frac{e^{Mt}}{2\sqrt{c_{f,i}}} \left(\left(\sup_{x\in\overline{\Omega}} |a_{i;6}| \right) c_{f,i} \left(v^{(6)}_{x_i}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + 2a_{i;6}\sqrt{c_{f,i}}\, v^{(6)}_{x_i} v^{(6)} + \left(\sup_{x\in\overline{\Omega}} |a_{i;6}| \right) \left(v^{(6)}\right)^2 \right) dQ +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \int\limits_Q e^{Mt} \left(\frac{\varepsilon c_{f,i}}{n} - \alpha_{\mathcal{A}_6,i} \right) \left(v^{(6)}_{x_i}\right)^2 dQ \ge$$

$$\ge \varepsilon_0 \sum_{i=1}^{n} \int\limits_Q e^{Mt} \left(v^{(6)}_{x_i}\right)^2 dQ - \sum_{i=1}^{n} \int\limits_Q \alpha_{\mathcal{A}_6,i} e^{Mt} \left(v^{(6)}_{x_i}\right)^2 dQ,$$

где $\dfrac{\varepsilon c_{f,i}}{n} \ge \varepsilon_0 > 0$.

Далее, используя неравенство $ab \ge -\varepsilon_1 a^2 - \dfrac{b^2}{4\varepsilon_1}$, имеем

$$A_9 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{5} \int\limits_Q (-1)^k e^{Mt} a_{i;6} v^{(6)}_{x_i} v^{(6)} dQ \ge$$

$$\ge -C^* \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{5} \int\limits_Q e^{Mt} \varepsilon_1 \left(v^{(6)}\right)^2 + \frac{e^{Mt}}{4\varepsilon_1} \left(v^{(k)}_{x_i}\right)^2 dQ \ge$$

$$\ge -\frac{\varepsilon_0}{10} \int\limits_Q e^{Mt} \left(v^{(6)}_{x_1}\right)^2 dQ - \frac{C^*}{4\varepsilon_1} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{5} \int\limits_Q e^{Mt} \left(v^{(k)}_{x_i}\right)^2 dQ,$$

где $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon_0}{60nC^* c_{f,1}}$,

$$A_{10} = \sum_{k=0}^{5} \int\limits_Q (-1)^k e^{Mt} a_6 v^{(k)} v^{(6)} dQ \ge$$

$$\ge -C^* \sum_{k=0}^{5} \int\limits_Q e^{Mt} \varepsilon_2 \left(v^{(6)}\right)^2 + \frac{e^{Mt}}{4\varepsilon_2} \left(v^{(k)}\right)^2 dQ \ge$$

$$\ge -\frac{\varepsilon_0}{10} \int\limits_Q e^{Mt} \left(v^{(6)}_{x_1}\right)^2 dQ - \frac{C^* c_{f,1}}{4\varepsilon_2} \sum_{k=0}^{5} \int\limits_Q e^{Mt} \left(v^{(k)}_{x_1}\right)^2 dQ,$$

где $\varepsilon_2 = \dfrac{\varepsilon_0}{60C^* c_{f,1}}$.

Остальные слагаемые $\left\langle \overline{\mathcal{A}}_k u^{(k)}, v \right\rangle_{W_T^{-6,-1} \times W_T^{6,1}}$, $k = \overline{0,5}$, оценим аналогично A_9, A_{10}. Например,

$$\left\langle \overline{\mathcal{A}}_5 u^{(5)}, v \right\rangle_{W_T^{-6,-1} \times W_T^{6,1}} = A_{11} + A_{12},$$

где

$$A_{11} = -\int_Q e^{Mt} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij;5} v_{x_i}^{(6)} v_{x_j}^{(5)} + \sum_{i=1}^n a_{i;5} v_{x_i}^{(6)} v^{(5)} + a_5 v^{(6)} v^{(5)} \right) dQ \geq$$

$$\geq -\frac{\varepsilon_0}{10} \sum_{i=1}^n \int_Q e^{Mt} \left(v_{x_i}^{(6)} \right)^2 dQ - C \sum_{i=1}^n \int_Q e^{Mt} \left(v_{x_i}^{(5)} \right)^2 dQ,$$

$$A_{12} = \sum_{k=0}^5 (-1)^{k+1} \int_Q e^{Mt} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij;5} v_{x_i}^{(k)} v_{x_j}^{(5)} + \sum_{i=1}^n a_{i;5} v_{x_i}^{(k)} v^{(5)} + a_5 v^{(k)} v^{(5)} \right) dQ \geq$$

$$\geq -C \sum_{k=0}^5 \sum_{i=1}^n \int_Q e^{Mt} \left(v_{x_i}^{(k)} \right)^2 dQ - C \sum_{i=1}^n \int_Q e^{Mt} \left(v_{x_i}^{(5)} \right)^2 dQ$$

для достаточно большой константы $C > 0$ (не зависящей от M).

Таким образом, выбирая достаточно большую константу M, получаем неравенство

$$\left\langle \overline{\mathcal{L}} u, v \right\rangle_{W_T^{-6,-1} \times W_T^{6,1}} \geq$$

$$\geq \frac{\varepsilon_0}{10} \sum_{i=1}^n \int_Q e^{Mt} \left(v_{x_i}^{(6)} \right)^2 dQ + \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^5 \int_Q \frac{\alpha_{\mathcal{A}_6, i}}{10} e^{Mt} M^{6-k} \left(v_{x_i}^{(k)} \right)^2 dQ \geq c_1^{-1} \| v \|_{W_T^{6,1}}^2.$$

Применяя к левой части неравенство Шварца $\left\| \overline{\mathcal{L}} u \right\|_{W_T^{-6,-1}} \| v \|_{W_T^{6,1}} \geq$ $\geq \left\langle \overline{\mathcal{L}} u, v \right\rangle_{W_T^{-6,-1} \times W_T^{6,1}}$, имеем

$$\left\| \overline{\mathcal{L}} u \right\|_{W_T^{-6,-1}} \geq c_1^{-1} \| v \|_{W_T^{6,1}}^2.$$

Но

$$\| u \|_{W_0^{0,1}} = \left\| e^{Mt} \sum_{k=0}^6 (-1)^k v^{(k)} \right\|_{W_0^{0,1}} \leq c_2 \sum_{k=0}^6 \left\| v^{(k)} \right\|_{W_T^{0,1}} =$$

$$= c_2 \sum_{k=0}^6 \| v \|_{W_T^{k,1}} \leq c_3 \| v \|_{W_T^{6,1}},$$

что и завершает доказательство леммы.

Таким образом, доказано, что для всех $u \in W_0^{0,1}$ выполняются неравенства

$$c \| u \|_{W_0^{0,1}} \geq \left\| \overline{\mathcal{L}} u \right\|_{W_T^{-6,-1}} \geq c^{-1} \| u \|_{W_0^{0,1}}. \qquad (6)$$

Лемма 2. *Для всех* $u \in W_0^{k,1}$, $k = \overline{0,6}$, *имеют место неравенства*

$$c \| u \|_{W_0^{k,1}} \geq \left\| \overline{\mathcal{L}} u \right\|_{W_T^{k-6,-1}} \geq c^{-1} \| u \|_{W_0^{k,1}}. \qquad (7)$$

Доказательство. Пусть функция $u \in C^\infty(\overline{Q})$ удовлетворяет условиям $u|_{x\in\partial\Omega} = 0$ и $u(t,x) = 0$ при $t \in [0, \varepsilon)$. Тогда $u^{(1)} \in C_0^\infty(\overline{Q}) \subset W_0^{0,1}$ и в силу (6) имеем

$$c\left\|u^{(1)}\right\|_{W_0^{0,1}} \geq \left\|\mathcal{L}\left(u^{(1)}\right)\right\|_{W_T^{-6,-1}} \geq c^{-1}\left\|u^{(1)}\right\|_{W_0^{0,1}}$$

или

$$c\|u\|_{W_0^{1,1}} \geq \left\|(\mathcal{L}u)^{(1)}\right\|_{W_T^{-6,-1}} \geq c^{-1}\|u\|_{W_0^{1,1}}.$$

Однако легко установить равенство $\left\|(\mathcal{L}u)^{(1)}\right\|_{W_T^{-6,-1}} = \|\mathcal{L}u\|_{W_T^{-5,-1}}$. Действительно, поскольку $\mathcal{L}u = 0$ при $t \in [0, \varepsilon)$, то

$$\left\|(\mathcal{L}u)^{(1)}\right\|_{W_T^{-6,-1}} = \sup_{v \in W_T^{6,1}} \frac{\left|\left((\mathcal{L}u)^{(1)}, v\right)_{L_2(Q)}\right|}{\|v\|_{W_T^{6,1}}} = \sup_{v \in C_T^\infty(\overline{Q})} \frac{\left|\left((\mathcal{L}u)^{(1)}, v\right)_{L_2(Q)}\right|}{\|v\|_{W_T^{6,1}}} =$$

$$= \sup_{v \in C_T^\infty(\overline{Q})} \frac{\left|\left(\mathcal{L}u, v^{(1)}\right)_{L_2(Q)}\right|}{\left\|v^{(1)}\right\|_{W_T^{5,1}}} = \sup_{v^{(1)} \in \overline{C}_T^\infty(\overline{Q})} \frac{\left|\left(\mathcal{L}u, v^{(1)}\right)_{L_2(Q)}\right|}{\left\|v^{(1)}\right\|_{W_T^{5,1}}} = \|\mathcal{L}u\|_{W_T^{-5,-1}},$$

где $\overline{C}_T^\infty(\overline{Q})$ — множество функций $v \in C^\infty(\overline{Q})$, удовлетворяющих условиям $v|_{x\in\partial\Omega} = 0$ и $v^{(l)}(T,x) = 0$, $l = \overline{0,4}$. Ясно, что $\overline{C}_T^\infty(\overline{Q})$ — плотное в $W_T^{5,1}$ множество.

Принимая во внимание, что рассматриваемое множество функций $u(t,x)$ плотно в $W_0^{1,1}$, получаем доказательство неравенства леммы при $k = 1$. Аналогично устанавливаются неравенства и при остальных $k = 2, \ldots, 6$.

Лемма 2 доказана.

***Замечание* 1.** Доказательство леммы 2 можно было изложить и в духе леммы 1. Например, для доказательства (7) при $k = 1$ достаточно рассмотреть $\mathcal{L}u \in W_T^{-5,-1}$ на элементе $v^{(1)} \in W_T^{5,1}$, где функция $v(t,x)$ — решение задачи Коши

$$e^{Mt}\sum_{k=0}^{6}(-1)^k v^{(k)} = -u^{(1)}, \qquad \left.\frac{\partial^l v}{\partial t^l}\right|_{t=T} = 0, \quad l = \overline{0,5}.$$

Корректная разрешимость уравнения $\overline{\mathcal{L}}u = F$, установленная в лемме 2, эквивалентна его однозначной и нормальной разрешимости. Если дополнительно предположить, что уравнение $\overline{\mathcal{L}}u = F$ плотно разрешимо, то из неравенств (7) будет следовать, что оператор $\overline{\mathcal{L}}$ осуществляет гомеоморфизм между пространствами $W_0^{k,1}$ и $W_T^{k-6,-1}$.

Плотную разрешимость можно получить, например, из любой теоремы о классической разрешимости $\mathcal{L}u = F$. Кроме того, плотная разрешимость, как известно, эквивалентна однозначной разрешимости сопряженного уравнения, которую легко установить, доказав аналог леммы 2 для сопряженного оператора.

Лемма 3. *Пусть коэффициенты оператора* $\overline{\mathcal{L}}$ *удовлетворяют неравенству*

$$\inf_{x\in\partial\Omega}\left(a_6(x)-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial a_{i;6}(x)}{\partial x_i}\right) > \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{c_{f,i}}}\sup_{x\in\overline{\Omega}}\left|a_{i;6}(x)\right|-\frac{\alpha_{\mathcal{A}_6,i}}{c_{f,i}}\right) \tag{8}$$

и второму из неравенств (3). *Тогда имеет место оценка*

$$c\|v\|_{W_T^{k,1}} \ge \left\|\overline{\mathcal{L}}^{+}v\right\|_{W_0^{k-6,-1}} \ge c^{-1}\|v\|_{W_T^{k,1}}, \quad k=\overline{0,6},$$

где оператор $\overline{\mathcal{L}}^{+}$ *задается дифференциальным выражением*

$$\overline{\mathcal{L}}^{+}v = \sum_{k=0}^{6}(-1)^k\frac{\partial^k}{\partial t^k}\overline{\mathcal{A}}_k^{+}v,$$

$$\overline{\mathcal{A}}_k^{+}v = -\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij;k}\frac{\partial v}{\partial x_j}\right)-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\left(a_{i;k}(x)v\right)}{\partial x_i}+a_k(x)v.$$

Доказательство. Повторяя рассуждения из доказательств лемм 1, 2, можно рассмотреть значение $\overline{\mathcal{L}}^{+}v$ на элементе $u(t,x)=J(v)$, где $u(t,x)$ — решение задачи Коши

$$e^{-Mt}\left(u+u^{(1)}+\ldots+u^{(6)}\right) = v(t,x), \qquad \left.\frac{\partial^l u}{\partial t^l}\right|_{t=0} = 0, \quad l=\overline{0,5}.$$

Лемма 3 доказана.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть коэффициенты оператора* $\overline{\mathcal{L}}$ *удовлетворяют условиям* (3), (8). *Тогда для произвольной функции* $F\in W_T^{k-6,-1}$, $k=\overline{0,6}$, *существует единственное решение* $u\in W_0^{k,1}$ *уравнения* $\overline{\mathcal{L}}u=F$.

***Замечание* 2.** Если $a_{i;6}=0$ и $a_6\ge 0$, то неравенства (3), (8) выполняются.

***Следствие* 1.** *Уравнение* (1) *с краевыми условиями* (2) *имеет единственное решение* $u\in W_0^{k,1}$ *для произвольной функции* $F\in W_T^{k-6,-1}$, $k=\overline{0,6}$.

Аналогично устанавливается теорема о гомеоморфизме для оператора произвольного порядка по временной переменной и коэрцитивного по пространственным переменным с самосопряженными краевыми условиями. Например, для оператора

$$\mathcal{L}u \equiv \sum_{k=0}^{m}\frac{\partial^k}{\partial t^k}\mathcal{A}_k u = F, \qquad u|_{x\in\partial\Omega} = 0, \qquad \left.\frac{\partial^l u}{\partial t^l}\right|_{t=0} = 0, \quad l=\overline{0,(m-1)}, \tag{9}$$

коэффициенты которого удовлетворяют аналогам неравенств (3), (8), имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Для произвольной функции* $F\in W_T^{k-m,-1}$, $k=\overline{0,m}$, *существует единственное решение* $u\in W_0^{k,1}$ *уравнения* (9).

***Следствие* 2.** *Уравнение* (*а также подобные* [1])

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\omega_{B_i}^2\right)\left(\Delta_3\Phi-\frac{1}{r_D^2}\Phi\right)+\omega_{p_i}^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta_3\Phi+\omega_{p_i}^2\omega_{B_i}^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_3^2} = F,$$

$$\Phi|_{x\in\partial\Omega} = 0, \qquad \left.\frac{\partial^l}{\partial t^l}\Phi\right|_{t=0} = 0, \quad l=\overline{0,3},$$

имеет единственное решение $u \in W_0^{k,1}$ *для произвольной функции* $F \in W_T^{k-4,-1}$, $k = \overline{0,4}$.

***Следствие* 3.** *Уравнение Соболева* [1–5]

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} Au + Bu = F, \quad u\big|_{x \in \partial\Omega} = 0, \quad u(0,x) = u^{(1)}(0,x) = 0,$$

где A, B *— эллиптические операторы, имеет единственное решение* $u \in W_0^{k,1}$ *для произвольной функции* $F \in W_T^{k-2,-1}$, $k = \overline{0,2}$.

***Следствие* 4.** *Псевдопараболическое уравнение* [3–5, 7, 8]

$$\frac{\partial}{\partial t} Au + Bu = F, \quad u\big|_{x \in \partial\Omega} = 0, \quad u(0,x) = 0,$$

где A, B *— эллиптические операторы, имеет единственное решение* $u \in W_0^{k,1}$ *для произвольной функции* $F \in W_T^{k-1,-1}$, $k = \overline{0,1}$.

1. *Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д., Свешников А. Г.* О нестационарных волнах в средах с анизотропной дисперсией // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1999. – **39**, №6. – С. 1006 – 1022.
2. *Соболев С. Л.* Об одной новой задаче математической физики // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1954. – **18**, № 1. – С. 3 – 50.
3. *Габов С. А.* Новые задачи математической теории волн. – М.: Наука, 1998. – 488 с.
4. *Ляшко С. І., Вітюк Н. Я.* Імпульсно-точкове керування деякими системами з розподіленими параметрами // Допов. АН УРСР. Сер. А. Фіз.-мат. та техн. науки. – 1985. – № 8. – С. 61 – 63.
5. *Ляшко С. И.* Обобщенное управление линейными системами. – Киев: Наук. думка, 1998. – 472 с.
6. *Ляшко И. И., Диденко В. П., Цитрицкий О. Е.* Фильтрация шумов. – Киев: Наук. думка, 1979. – 230 с.
7. *Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д., Свешников А. Г.* О квазистационарных процессах в проводящих средах без дисперсии // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 2000. – **40**, № 8. – С. 1237 – 1249.
8. *Кожанов А. И.* Краевые задачи для уравнений математической физики нечетного порядка. – Новосибирск: Новосибир. ун-т, 1990. – 130 с.

Получено 19.08.2003