УДК 517.51

Р. А. Ласурия (Абхаз. ун-т, Сухум)

ХАРАКТЕРИСТИКА ТОЧЕК φ-СИЛЬНОЙ СУММИРУЕМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ – ЛАПЛАСА ФУНКЦИЙ КЛАССА $L_p(S^m)$, $p > 1$

We consider the behavior of φ-strong mean Fourier – Laplace series for functions that belong to $L_p(S^m)$, $p > 1$, on a set of points possessing a complete measure on m-dimensional sphere S^m.

Розглядається поведінка φ-сильних середніх рядів Фур'є – Лапласа функцій із $L_p(S^m)$, $p > 1$, на множині точок, що мають повну міру на m-вимірній сфері S^m.

1. Пусть S^m, $m \geq 3$, — единичная сфера в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$ с центром в начале координат, $L_p(S^m)$, $1 \leq p < \infty$ $(L_1(S^m) = L(S^m))$, — пространство функций $f(x)$ с нормой

$$\| f \|_{L_p(S^m)} = \left(\int_{S^m} | f(x) |^p \, dS(x) \right)^{1/p}.$$

Пусть, далее,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+\lambda)\Gamma(\lambda)}{2\pi^{\lambda+1}} \int_{S^m} f(y) P_n^{(\lambda)}(\cos\gamma) \, dS(y) \tag{1}$$

— ряд Фурье – Лапласа функции $f(x) \in L(S^m)$, где $\Gamma(\lambda)$ — гамма-функция Эйлера,

$$\sigma_n^{(\lambda)}(f; x) = \frac{1}{A_n^{\lambda}} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\lambda-1} S_k^{(\lambda)}(f; x)$$

— средние Чезаро (C, λ) ряда (1),

$$\Phi_n^{(\lambda)}(\cos\gamma) = \frac{1}{A_n^{\lambda}} \sum_{k=0}^{n} (k+\lambda) A_{n-k}^{\lambda} P_k^{(\lambda)}(\cos\gamma),$$

$\lambda = (m-2)/2$, $\cos\gamma = (x, y)$ — скалярное произведение векторов $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $y = (y_1, \ldots, y_m)$, $x, y \in S^m$, $S_n^{(\lambda)}(f; x)$ — частичная сумма ряда (1), $P_n^{(\lambda)}(t)$ — многочлены Гегенбауэра (ультрасферические многочлены).

Точка $x \in S^m$ называется D_p-точкой функции $f(x) \in L_p(S^m)$, $p \geq 1$ (см., например, [1, с. 262]), если

$$\int_0^h \left| \int_{(x, y) = \cos\gamma} [f(y) - f(x)] \, dt(y) \right|^p d\gamma = o(h^{2\lambda p+1}), \quad h \to 0. \tag{2}$$

Точка $x \in S^m$ называется D_p^*-точкой функции f, если x и x^* одновременно являются D_p-точками функции f, где x^* — точка, противоположная точке x. Если некоторая точка x является D_p-точкой функции f, то она является и $D_{p'}$-точкой для любого $p' < p$. Известно (см., например, [1, с. 263]), что если $f(x) \in L_p(S^m)$, $p > 1$, то почти каждая точка $x \in S^m$ является ее D_p^*-точкой.

В работе [2] установлено, что если $f(x) \in L_p(S^m)$, $p > 1$, то в каждой D_p^*-точке функции f, т. е. почти всюду на S^m

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left| \sigma_k^{(\lambda)}(f; x) - f(x) \right|^q = 0 \quad \forall q > 0. \tag{3}$$

Введем, следуя Тотику [3], следующие типы сильных средних:

$$h_{n,r}^{(q),\lambda}(f; x) = \left\{ \frac{1}{r} \sum_{j=1}^{r} \left| \rho_{k_j}^{(\lambda)}(f; x) \right|^q \right\}^{1/q}, \tag{4}$$

$$\rho_{k_j}^{(\lambda)} = \sigma_{k_j}^{(\lambda)}(f; x) - f(x),$$

$$n \le k_1 < k_2 < \ldots < k_r \le 2n - 1, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$H_n^{\varphi,\lambda}(f; \alpha; x) = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k(u) \varphi\left(\left| \rho_k^{(\lambda)}(f; x) \right|\right), \tag{5}$$

где $\varphi(u)$ — некоторая неотрицательная на $[0, +\infty)$ функция, $\alpha = (\alpha_k(u))$, $k \in \mathbb{N}$, — некоторая неотрицательная последовательность функций, заданных на множестве U, имеющем хотя бы одну предельную точку.

В настоящей работе рассматривается поведение величин (4), (5) в D_p^*-точках (см. (2)) функции $f(x) \in L_p(S^m)$, $p > 1$, и в качестве одного из следствий, устанавливается равенство (3).

2. В дальнейшем нам понадобятся два вспомогательных утверждения, одно из которых приведем без доказательства.

Лемма 1. *Пусть* $f(x) \in L_p(S^m)$, $m \ge 3$. *Тогда в каждой* D_1^*-*точке* $x \in S^m$, *т. е. почти всюду на* S^m

$$\left| \rho_k^{(\lambda)}(f; x) \right| = \left| \sigma_k^{(\lambda)}(f; x) - f(x) \right| = o(\ln k), \quad k \to \infty. \tag{6}$$

Лемма 2. *Пусть* $f(x) \in L_p(S^m)$, $1 < p \le 2$, $n \in \mathbb{N}$, $j = 1, \ldots, r$, $n \le k_1 < k_2 < \ldots < k_r \le 2n - 1$. *Тогда в каждой* D_p^*-*точке* $x \in S^m$, *т. е. почти всюду на* S^m,

$$\forall q > 0 \quad \lim_{n \to \infty} \frac{h_{n,r}^{(q),\lambda}(f; x)}{\ln(ne/r)} = 0 \tag{7}$$

равномерно относительно $r \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Обозначим

$$g_x(\gamma) = \int_{(x,y) = \cos\gamma} [f(y) - f(x)] \, dt(y).$$

На основании неравенства Гельдера можно убедиться, что

$$h_{n,r}^{(q),\lambda}(f; x) \le h_{n,r}^{(q'),\lambda}(f; x), \quad 0 < q \le q',$$

поэтому достаточно доказать (7) для произвольно больших степеней $q' \ge 2$. Выберем q' достаточно большим, чтобы соответствующая сопряженная степень p' не превышала p. Тогда условие $f \in L_{p'}(S^m)$, $1/p' + 1/q' = 1$, следует из условия теоремы $f \in L_p(S^m)$. В этом случае D_p^*-точка $x \in S^m$ является одновременно и $D_{p'}^*$-точкой функции f. Далее имеем

$$h_{n,r}^{(q'),\lambda}(f;x) = \left\{ \frac{1}{r} \sum_{j=1}^{r} \left| \rho_{k_j}^{(\lambda)}(f;x) \right|^{q'} \right\}^{1/q'} =$$

$$= \left\{ \frac{1}{r} \sum_{j=1}^{r} \left| \frac{\Gamma(\lambda)}{2\pi^{\lambda+1}} \int_{S^m} f(y) \Phi_{k_j}^{(\lambda)}(\cos\gamma)\, dS(y) - f(x) \right|^{q'} \right\}^{1/q'} =$$

$$= \left\{ \frac{1}{r} \sum_{j=1}^{r} \left| \frac{\Gamma(\lambda)}{2\pi^{\lambda+1}} \int_{S^m} [\, f(y) - f(x)\,] \Phi_{k_j}^{(\lambda)}(\cos\gamma)\, dS(y) \right|^{q'} \right\}^{1/q'} =$$

$$= \left\{ \frac{1}{r} \sum_{j=1}^{r} \left| \frac{\Gamma(\lambda)}{2\pi^{\lambda+1}} \int_{0}^{\pi} \left\{ \int_{(x,y)=\cos\gamma} [\, f(y) - f(x)\,]\, dt(y) \right\} \Phi_{k_j}^{(\lambda)}(\cos\gamma)\, d\gamma \right|^{q'} \right\}^{1/q'} =$$

$$= \left\{ \frac{1}{r} \sum_{j=1}^{r} \left| \frac{\Gamma(\lambda)}{2\pi^{\lambda+1}} \int_{0}^{\pi} g_x(\gamma) \Phi_{k_j}^{(\lambda)}(\cos\gamma)\, d\gamma \right|^{q'} \right\}^{1/q'} \le$$

$$\le C(\lambda) \left\{ \frac{1}{r} \sum_{j=1}^{r} \left| \int_{0}^{\pi/(2(k_j+1))} g_x(\gamma) \Phi_{k_j}^{(\lambda)}(\cos\gamma)\, d\gamma \right|^{q'} \right\}^{1/q'} +$$

$$+ C(\lambda) \left\{ \frac{1}{r} \sum_{j=1}^{r} \left| \int_{\pi/(2(k_j+1))}^{\pi-\pi/(2(k_j+1))} g_x(\gamma) \Phi_{k_j}^{(\lambda)}(\cos\gamma)\, d\gamma \right|^{q'} \right\}^{1/q'} +$$

$$+ C(\lambda) \left\{ \frac{1}{r} \sum_{j=1}^{r} \left| \int_{\pi-\pi/(2(k_j+1))}^{\pi} g_x(\gamma) \Phi_{k_j}^{(\lambda)}(\cos\gamma)\, d\gamma \right|^{q'} \right\}^{1/q'} =$$

$$= I_{n,r}^{(1)}(f;x) + I_{n,r}^{(2)}(f;x) + I_{n,r}^{(3)}(f;x), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{8}$$

В силу известного неравенства [4, с. 133] $\left| \Phi_k^{(\lambda)}(\cos\gamma) \right| < Ck^{2\lambda+1}$, $k \in \mathbb{N}$, $0 \le \le \gamma \le \pi$, в $D_{p'}^*$-точке x имеем

$$I_{n,r}^{(1)}(f;x) \le C(\lambda) \left\{ \frac{1}{r} \sum_{j=1}^{r} \left(k_j^{2\lambda+1} \int_{0}^{\pi/(2(k_j+1))} |g_x(\gamma)|\, d\gamma \right)^{q'} \right\}^{1/q'} \le$$

$$\le C(\lambda) \left\{ \frac{1}{r} \sum_{j=1}^{r} k_j^{(2\lambda+1)q'} o\left(\frac{1}{k_j^{2\lambda+1}} \right)^{q'} \right\}^{1/q'} = o(1), \quad n \to \infty. \tag{9}$$

Далее,

$$I^{(3)}_{n,r}(f;x) \le$$

$$\le C(\lambda)\left\{\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}\left|\int\limits_{\pi-\pi/(2(k_j+1))}^{\pi}\left\{\int\limits_{(x,y)=\cos\gamma}\left[f(y)-f(x^*)\right]dt(y)\right\}\Phi^{(\lambda)}_{k_j}(\cos\gamma)d\gamma\right|^{q'}\right\}^{1/q'} +$$

$$+ C(\lambda)\left\{\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}\left|\int\limits_{\pi-\pi/(2(k_j+1))}^{\pi}\left\{\int\limits_{(x,y)=\cos\gamma}\left[f(x^*)-f(x)\right]dt(y)\right\}\Phi^{(\lambda)}_{k_j}(\cos\gamma)\,d\gamma\right|^{q'}\right\}^{1/q'}.$$

Учитывая, что $\left|\Phi^{(\lambda)}_{k_j}(\cos\gamma)\right| < Ck^{\lambda}$, $\pi/2 \le \gamma \le \pi$, находим

$$I^{(3)}_{n,r}(f;x) \le C(\lambda)\left\{\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}\left(k_j^{\lambda}\int\limits_{\pi-\pi/(2(k_j+1))}^{\pi}\left|g_{x^*}(\gamma)\right|d\gamma\right)^{q'}\right\}^{1/q'} +$$

$$+ C(\lambda)\left\{\frac{\left|f(x^*)-f(x)\right|^{q'}}{r}\sum_{j=1}^{r}\left(k_j^{\lambda}\int\limits_{\pi-\pi/(2(k_j+1))}^{\pi}\sin^{2\lambda}\gamma\,d\gamma\right)^{q'}\right\}^{1/q'} \le$$

$$\le C(\lambda)\left\{\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}\left[k_j^{\lambda}o\left(\frac{1}{k_j^{2\lambda+1}}\right)\right]^{q'}\right\}^{1/q'} + o(1) \le$$

$$\le C(\lambda)\left\{\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}\left[o\left(\frac{1}{k_j^{\lambda+1}}\right)\right]^{q'}\right\}^{1/q'} + o(1) \le \frac{C(\lambda)}{n^{\lambda+1}}\left\{\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}o(1)\right\}^{1/q'} + o(1) = o(1). \tag{10}$$

На основании представления [4] ядра $\Phi^{(\lambda)}_{k}(\cos\gamma)$:

$$\Phi^{(\lambda)}_{k}(\cos\gamma) = \frac{\lambda}{4^{\lambda}}\frac{\sin[(k+(3\lambda+1)/2)\gamma-\lambda\pi]}{(\sin\gamma)^{\lambda}(\sin(\gamma/2))^{\lambda+1}} +$$

$$+ \frac{1}{k+1}\frac{M}{(\sin\gamma)^{\lambda+1}(\sin(\gamma/2))^{\lambda+1}} = \Phi^{(\lambda)}_{k,1}(\cos\gamma) + \Phi^{(\lambda)}_{k,2}(\cos\gamma),$$

$$\left|\frac{\pi}{2}-\gamma\right| < \frac{k\pi}{2(k+1)},$$

где M — величина, равномерно ограниченная относительно k, γ, имеем

$$I^{(2)}_{n,r}(f;x) \le C(\lambda)\left\{\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}\left|\int\limits_{\pi/(2(k_j+1))}^{\pi-\pi/(2(k_j+1))} g_x(\gamma)\Phi^{(\lambda)}_{k_{j,1}}(\cos\gamma)\,d\gamma\right|^{q'}\right\}^{1/q'} +$$

$$+ C(\lambda)\left\{\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}\left|\int\limits_{\pi/(2(k_j+1))}^{\pi-\pi/(2(k_j+1))} g_x(\gamma)\Phi^{(\lambda)}_{k_{j,2}}(\cos\gamma)\,d\gamma\right|^{q'}\right\}^{1/q'} = \bar{I}^{(2)}_{n,r}(f;x) + \bar{\bar{I}}^{(2)}_{n,r}(f;x). \tag{11}$$

На основании неравенства Минковского

$$\bar{I}^{(2)}_{n,r}(f;x) \le C(\lambda)\left\{\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}\left|\int\limits_{\pi/2(2(k_j+1))}^{\pi-\pi/(2(k_j+1))} g_x(\gamma)\frac{\sin k_j\gamma\cos((3\lambda+1)\gamma/2-\lambda\pi)}{(\sin\gamma)^{\lambda}(\sin(\gamma/2))^{\lambda+1}}d\gamma\right|^{q'}\right\}^{1/q'} +$$

$$+\ C(\lambda)\left\{\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}\left|\int\limits_{\pi/(2(k_j+1))}^{\pi-\pi/(2(k_j+1))} g_x(\gamma)\frac{\cos k_j\gamma\sin((3\lambda+1)\gamma/2-\lambda\pi)}{(\sin\gamma)^{\lambda}(\sin(\gamma/2))^{\lambda+1}}d\gamma\right|^{q'}\right\}^{1/q'} =$$

$$= A_{n,r}(f;x) + B_{n,r}(f;x). \qquad (12)$$

Величину $A_{n,r}(f;x)$ представим в виде суммы трех слагаемых и применим неравенство Минковского:

$$A_{n,r}(f;x) \le C(\lambda)\left\{\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}\left|\int\limits_{1/(2n)}^{\pi-1/(2n)} g_x(\gamma)\frac{\sin k_j\gamma\cos((3\lambda+1)\gamma/2-\lambda\pi)}{(\sin\gamma)^{\lambda}(\sin(\gamma/2))^{\lambda+1}}d\gamma\right|^{q'}\right\}^{1/q'} +$$

$$+\ C(\lambda)\left\{\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}\left|\int\limits_{1/(2n)}^{\pi/(2(k_j+1))} g_x(\gamma)\frac{\sin k_j\gamma\cos((3\lambda+1)\gamma/2-\lambda\pi)}{(\sin\gamma)^{\lambda}(\sin(\gamma/2))^{\lambda+1}}d\gamma\right|^{q'}\right\}^{1/q'} +$$

$$+\ C(\lambda)\left\{\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}\left|\int\limits_{\pi-\pi/(2(k_j+1))}^{\pi-1/(2n)} g_x(\gamma)\frac{\sin k_j\gamma\cos((3\lambda+1)\gamma/2-\lambda\pi)}{(\sin\gamma)^{\lambda}(\sin(\gamma/2))^{\lambda+1}}d\gamma\right|^{q'}\right\}^{1/q'} =$$

$$= A_{n,r}^{(1)}(f;x) + A_{n,r}^{(2)}(f;x) + A_{n,r}^{(3)}(f;x), \quad n\in\mathbb{N}. \qquad (13)$$

Принимая во внимание, что $r \le n$, получаем

$$A_{n,r}^{(1)}(f;x) \le C(\lambda)\left\{\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}\left|\int\limits_{1/(2n)}^{1/(2r)} g_x(\gamma)\frac{\sin k_j\gamma\cos((3\lambda+1)\gamma/2-\lambda\pi)}{(\sin\gamma)^{\lambda}(\sin(\gamma/2))^{\lambda+1}}d\gamma\right|^{q'}\right\}^{1/q'} +$$

$$+\ C(\lambda)\left\{\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}\left|\int\limits_{1/(2r)}^{\pi-1/(2n)} g_x(\gamma)\frac{\sin k_j\gamma\cos((3\lambda+1)\gamma/2-\lambda\pi)}{(\sin\gamma)^{\lambda}(\sin(\gamma/2))^{\lambda+1}}d\gamma\right|^{q'}\right\}^{1/q'} =$$

$$= \overline{A}_{n,r}^{(1)}(f;x) + \overline{\overline{A}}_{n,r}^{(1)}(f;x). \qquad (14)$$

Интегрируя по частям, находим

$$\overline{A}_{n,r}^{(1)}(f;x) \le C(\lambda)\left\{\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}\left(\int\limits_{1/(2n)}^{1/(2r)}|g_x(\gamma)|\frac{d\gamma}{\gamma^{2\lambda+1}}\right)^{q'}\right\}^{1/q'} =$$

$$= C(\lambda)\left\{(2r)^{2\lambda+1}\int\limits_{1/(2n)}^{1/(2r)}|g_x(\tau)|d\tau + (2\lambda+1)\int\limits_{1/(2n)}^{1/(2r)} o(\gamma^{2\lambda+1})\frac{d\gamma}{\gamma^{2\lambda+2}}\right\} =$$

$$= C(\lambda)\left\{r^{2\lambda+1}o\left(\frac{1}{r^{2\lambda+1}}\right) + o(1)\ln\frac{n}{r}\right\} \le C(\lambda)\left\{o(1)+o(1)\ln\frac{n}{r}\right\} = o(1)\ln\frac{ne}{r}. \qquad (15)$$

Вводя вспомогательную функцию

$$G_x(\gamma) = \begin{cases} g_x(\gamma)\dfrac{\cos((3\lambda+1)\gamma/2-\lambda\pi)}{(\sin\gamma)^{\lambda}(\sin(\gamma/2))^{\lambda+1}}, & \gamma\in[1/(2r),\ \pi-1/(2r)\,]; \\ 0, & \gamma\in[-\pi,\ 1/(2r)\,)\cup(\pi-1/(2n),\ \pi], \end{cases}$$

$$G_x(\gamma+2\pi) = G_x(\gamma)\in L_{p'} \quad \left(g_x(\gamma)\in L_{p'}\right)$$

и применяя теорему Хаусдорфа – Юнга [5, с. 153], получаем

$$\overline{\overline{A}}_{n,r}^{(1)}(f;x) \le C(\lambda) r^{-1/q'} \left\{ \int_{1/(2r)}^{\pi-1/(2n)} \left| \frac{g_x(\gamma)}{\gamma^{\lambda+1} \sin^\lambda \gamma} \right|^{p'} d\gamma \right\}^{1/p'}, \quad 1/p' + 1/q' = 1. \tag{16}$$

Из определения D_p^*-точки x следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $h_0(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\Phi_{p'}(h) = \int_0^h |g_x(\gamma)|^{p'} d\gamma < \varepsilon h^{2\lambda p'+1}, \quad 0 < h \le h_0 < \frac{\pi}{2}. \tag{17}$$

Предположим сначала, что $1/(2r) < h_0$. Тогда, учитывая (17) и интегрируя по частям, получаем

$$\overline{\overline{A}}_{n,r}^{(1)}(f;x) \le$$

$$\le C(\lambda) r^{-1/q'} \left\{ \int_{1/(2r)}^{h_0} \left| \frac{g_x(\gamma)}{\gamma^{\lambda+1} (\sin\gamma)^\lambda} \right|^{p'} d\gamma + \int_{h_0}^{\pi-1/(2n)} \left| \frac{g_x(\gamma)}{\gamma^{\lambda+1} (\sin\gamma)^\lambda} \right|^{p'} d\gamma \right\}^{1/p'} \le$$

$$\le C(\lambda) r^{-1/q'} \left\{ C(q')\varepsilon (2r)^{p'-1} + \left(\frac{1}{h_0}\right)^{(\lambda+1)p'} \int_{h_0}^{\pi-1/(2n)} \frac{|g_x(\gamma)|}{(\sin\gamma)^{\lambda p'}} d\gamma \right\}^{1/p'} \le$$

$$\le C(\lambda, q') r^{-1/q'} \left\{ \varepsilon r^{p'-1} + \int_{h_0}^{\pi-1/(2n)} \frac{\left| \int_{(x,y)=\cos\gamma} \left[f(y) - f(x^*) \right] dt(y) \right|^{p'}}{(\sin\gamma)^{\lambda p'}} d\gamma + \right.$$

$$\left. + \int_{h_0}^{\pi-1/(2n)} \frac{\left| \int_{(x,y)=\cos\gamma} \left[f(x) - f(x^*) \right] dt(y) \right|^{p'}}{(\sin\gamma)^{\lambda p'}} d\gamma \right\}^{1/p'} \le$$

$$\le C(\lambda, q') r^{-1/q'} \left\{ \varepsilon r^{p'-1} + K \right\}^{1/p'} \le$$

$$\le C(\lambda, q') \left\{ \varepsilon + o\left(\ln \frac{ne}{r} \right) \right\}, \quad n \to \infty, \quad 1/p' + 1/q' = 1. \tag{18}$$

Таким образом, в силу (15) и (18) из (14) находим

$$A_{n,r}^{(1)}(f;x) = o\left(\ln \frac{ne}{r} \right), \quad n \to \infty. \tag{19}$$

Оценим величину $A_{n,r}^{(2)}(f;x)$. С помощью интегрирования по частям находим

$$A_{n,r}^{(2)}(f;x) \le C(\lambda) \left\{ \frac{1}{r} \sum_{j=1}^r \left(\int_{1/(2n)}^{\pi/(2(k_j+1))} \frac{|g_x(\gamma)|}{\gamma^{2\lambda+1-1/(2q')} \gamma^{1/(2q')}} d\gamma \right)^{q'} \right\}^{1/q'} \le$$

$$\le C(\lambda) \left\{ \frac{n^{1/2}}{r} \sum_{j=1}^r \left(k_j^{2\lambda+1-1/(2q')} o\left(\frac{1}{k_j^{2\lambda+1}} \right) + o\left[\int_{1/(2n)}^{\pi/(2(k_j+1))} \frac{d\gamma}{\gamma^{1-1/(2q')}} \right] \right)^{q'} \right\}^{1/q'} \le$$

$$\le C(\lambda) \left\{ \frac{n^{1/2}}{r} \sum_{j=1}^r o\left(k_j^{-1/(2q')} \right)^{q'} \right\}^{1/q'} \le C(\lambda) \left\{ \frac{n^{1/2}}{r} n^{-1/2} \sum_{j=1}^r o(1) \right\} = o(1). \tag{20}$$

Далее, также интегрируя по частям, имеем

$$A_{n,r}^{(3)}(f;x) \le C(\lambda)\left\{\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}\left(\int\limits_{\pi-\pi/(2(k_j+1))}^{\pi-1/(2n)}\frac{|g_x(\gamma)|}{(\sin\gamma)^{\lambda}}d\gamma\right)^{q'}\right\}^{1/q'} \le$$

$$\le C(\lambda)\left\{\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}\left(\int\limits_{\pi-\pi/(2(k_j+1))}^{\pi-1/(2n)}\frac{\left|\int_{(x,y)=\cos\gamma}\left[f(y)-f(x^*)\right]dt(y)\right|}{(\sin\gamma)^{\lambda}}d\gamma +\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int\limits_{\pi-\pi/(2(k_j+1))}^{\pi-1/(2n)}\frac{\left|\int_{(x,y)=\cos\gamma}\left[f(x^*)-f(x)\right]dt(y)\right|}{(\sin\gamma)^{\lambda}}d\gamma\right)^{q'}\right\}^{1/q'} \le$$

$$\le C(\lambda)\left\{\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}\left(\int\limits_{1/(2n)}^{\pi/(2(k_j+1))}\frac{|g_x(\gamma)|}{(\sin\gamma)^{\lambda}}d\gamma + \int\limits_{\pi-\pi/(2(k_j+1))}^{\pi-1/(2n)}(\sin\gamma)^{\lambda}\,d\gamma\right)^{q'}\right\}^{1/q'} \le$$

$$\le C(\lambda)\left\{\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}\left(\frac{\Phi^*(\gamma)}{\gamma^{\lambda}}\bigg|_{1/(2n)}^{\pi/(2(k_j+1))} + \int\limits_{1/(2n)}^{\pi/(2(k_j+1))}\frac{\Phi^*(\gamma)}{\gamma^{\lambda+1}}d\gamma +\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int\limits_{1/(2n)}^{\pi/(2(k_j+1))}\gamma^{\lambda}\,d\gamma\right)^{q'}\right\}^{1/q'} \le \frac{C(\lambda)}{n+1} = o(1), \quad n\to\infty. \tag{21}$$

Сопоставляя (19), (20), (21) с (13), получаем

$$A_{n,r}(f;x) = o(1)\ln\frac{ne}{r}, \quad n\to\infty. \tag{22}$$

Аналогично оценивается величина $B_{n,r}(f;x)$:

$$B_{n,r}(f;x) = o(1)\ln\frac{ne}{r}, \quad n\to\infty. \tag{23}$$

В силу (22) и (23) из (12) выводим

$$\bar{I}_{n,r}^{(2)}(f;x) = o(1)\ln\frac{ne}{r}, \quad n\to\infty. \tag{24}$$

Перейдем к оценке $\bar{\bar{I}}_{n,r}^{(2)}(f;x)$. Согласно определению ядер $\Phi_{k,i}^{(\lambda)}(\cos\gamma)$, $i=1,2$, с помощью интегрирования по частям находим

$$\bar{\bar{I}}_{n,r}^{(2)}(f;x) \le C(\lambda)\left\{\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}\frac{1}{k_j^{q'}}\left(\int\limits_{\pi/(2(k_j+1))}^{\pi/2}\frac{|g_x(\gamma)|}{(\sin\gamma)^{\lambda+1}(\sin(\gamma/2))^{\lambda+1}}d\gamma +\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int\limits_{\pi/2}^{\pi-\pi/(2(k_j+1))}\frac{|g_x(\gamma)|}{(\sin\gamma)^{\lambda+1}(\sin(\gamma/2))^{\lambda+1}}d\gamma\right)^{q'}\right\}^{1/q'} \le$$

$$\le C(\lambda)\left\{\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}\frac{1}{k_j^{q'}}\left(\int\limits_{\pi/(2(k_j+1))}^{\pi/2}\frac{|g_x(\gamma)|}{\gamma^{2\lambda+2}}d\gamma +\right.\right.$$

$$+\int\limits_{\pi/(2(k_j+1))}^{\pi/2}\frac{\left|g_{x^*}(\gamma)\right|}{\gamma^{\lambda+1}}d\gamma+\int\limits_{\pi/(2(k_j+1))}^{\pi/2}\frac{(\sin\gamma)^{2\lambda}}{(\sin\gamma)^{\lambda+1}}d\gamma\Bigg)^{q'}\Bigg\}^{1/q'}\le$$

$$\le C(\lambda)\left\{\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}\frac{1}{k_j^{q'}}\left(o(k_j)+K\right)^{q'}\right\}^{1/q'}\le C(\lambda)\left\{\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}\frac{1}{k_j^{q'}}o\left(k_j^{q'}\right)\right\}^{1/q'}=o(1),\quad n\to\infty. \tag{25}$$

Вследствие (24) и (25) из (11) получаем

$$I_{n,r}^{(2)}(f;x)=o(1)\ln\frac{ne}{r},\quad n\to\infty. \tag{26}$$

Принимая во внимание (8), (9), (10) и (26), заключаем, что

$$h_{n,r}^{(q'),\lambda}(f;x)=o(1)\ln\frac{ne}{r},\quad n\to\infty, \tag{27}$$

в каждой D_p^*-точке $x\in S^m$ функции $f\in L_p(S^m)$, причем соотношение (27) выполняется равномерно относительно r при условии, что $1/(2r)<h_0$.

Если $1/(2r)\ge h_0$, то на основании соотношения (6) имеем

$$\left|\rho_k^{(\lambda)}(f;x)\right|<\frac{\varepsilon}{\ln(2/h_0)}\ln k$$

для всех k, начиная с некоторого номера n_0. Полагая $n\ge n_0$ $(k_j\ge n_0\ \ \forall j=1,\dots,r)$, находим

$$\left|\rho_{k_j}^{(\lambda)}(f;x)\right|<\frac{\varepsilon}{\ln(2/h_0)}\ln k_j<\frac{\varepsilon}{\ln(2/h_0)}\left(\ln\frac{n}{r}+\ln 2r\right)=o(1)\ln\frac{ne}{r},\quad j=1,\dots,r.$$

Значит, в каждой D_p^*-точке $x\in S^m$

$$h_{n,r}^{(q'),\lambda}(f;x)\le\left\{\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}\left(o(1)\ln\frac{ne}{r}\right)^{q'}\right\}^{1/q'}=o(1)\ln\frac{ne}{r},$$

$$n\to\infty,\quad 1/p'+1/q'=1.$$

Лемма 2 доказана.

3. Следуя определению из [6] обозначим через Φ множество непрерывных на $[0,+\infty)$ функций $\varphi(\cdot)$ таких, что $\varphi(0)=0$, $\varphi(u)>0\ \ \forall u>0$, $\varphi(u)\le e^{Bu}$ $\forall u\in[0,+\infty)$, $\varphi(2u)\le A\varphi(u)\ \ \forall u\in[0,1]$, $A=A(\varphi)$. К данному множеству функций относятся, например, функции $\varphi(u)=u^q$, $q>0$, $\varphi(u)=e^u-1$ и др.

Пусть, далее,

$$\mathscr{E}_l^{(\lambda)}(x)=\mathscr{E}_l^{(\lambda)}(f;x)=\sup_{\substack{n\ge l\\ 1\le r\le n}}\frac{\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}\left|\rho_{k_j}^{(\lambda)}(f;x)\right|}{\ln(ne/r)}. \tag{28}$$

В принятых обозначениях имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $f(x)\in L_p(S^m)$, $m\ge 3$, $1<p\le 2$ *и* $\varphi(\cdot)\in\Phi$. *Тогда в каждой* D_p^**-точке* $x\in S^m$, *т. е. почти всюду на* S^m

a) $$V_n^{\varphi,\lambda}(f;x)=\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\varphi\left(\left|\rho_k^{(\lambda)}(f;x)\right|\right)\le C\varphi\left(\mathscr{E}_n^{(\lambda)}(x)\right),\quad C>0; \tag{29}$$

б)
$$\lim_{n\to\infty} V_n^{\varphi,\lambda}(f;x) = 0. \tag{30}$$

Доказательство. В силу леммы 2, полагая $q=1$, имеем
$$\lim_{m\to\infty} \mathscr{E}_m^{(\lambda)}(x) = 0 \tag{31}$$
в каждой D_p^*-точке $x \in S^m$. Придерживаясь, в общих чертах, схемы рассуждений соответствующего результата работы [6], получаем следующее.

Пусть $\mathscr{E}_n^{(\lambda)}(x)=0$. Тогда $\rho_k^{(\lambda)}(f;x)=0 \ \ \forall k \geq n$ и, значит, с учетом условия $\varphi(0)=0$ получаем утверждения теоремы. Пусть $\mathscr{E}_n^{(\lambda)}(x)>0$, $\sigma \in \mathbb{N}$,
$$B_{n,\sigma}(x) = \left\{ k \in [n, 2n-1] \colon (\sigma-1)\mathscr{E}_n^{(\lambda)}(x) \leq \left|\rho_k^{(\lambda)}(f;x)\right| \leq \sigma\mathscr{E}_n^{(\lambda)}(x) \right\}$$
и $\mu_{n,\sigma}(x)$ — количество всех элементов множества $B_{n,\sigma}(x)$. Тогда
$$V_n^{\varphi,\lambda}(f;x) = \frac{1}{n}\sum_{\sigma=1}^{\infty}\sum_{k\in B_{n,\sigma}(x)} \varphi\left(\left|\rho_k^{(\lambda)}(f;x)\right|\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{\sigma=1}^{\infty}\varphi\left(\sigma\mathscr{E}_n^{(\lambda)}(x)\right)\mu_{n,\sigma}(x), \tag{32}$$
где предполагается, что если при некотором σ $B_{n,\sigma}(x) = \{\varnothing\}$, то $\sum_{k\in B_{n,\sigma}(x)} = 0$.

Пусть $\mu_{n,\sigma}(x) \geq 1$. В силу определения (28) величины $\mathscr{E}_m^{(\lambda)}(x)$
$$\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}\left|\rho_{k_j}^{(\lambda)}(f;x)\right| \leq \mathscr{E}_n^{(\lambda)}(x)\ln\frac{ne}{r}. \tag{33}$$
Полагая $r=\mu_{n,\sigma}(x)$ и учитывая определение $B_{n,\sigma}(x)$, из (33) находим
$$(\sigma-1)\mathscr{E}_n^{(\lambda)}(x) \leq \frac{1}{\mu_{n,\sigma}(x)}\sum_{k\in B_{n,\sigma}(x)}\left|\rho_k^{(\lambda)}(f;x)\right| \leq \mathscr{E}_n^{(\lambda)}(x)\ln\frac{ne}{\mu_{n,\sigma}(x)}.$$
Отсюда
$$\mu_{n,\sigma}(x) \leq ne^2e^{-\sigma}. \tag{34}$$
Используя неравенство
$$\sum_{\sigma=1}^{\infty}\varphi(u\sigma)e^{-\sigma} \leq C\varphi(u) \quad \forall u \in \left(0, \frac{1}{2AB}\right),$$
установленное в [6], а также (34), из (32) получаем
$$V_n^{\varphi,\lambda}(f;x) \leq C\sum_{\sigma=1}^{\infty}\varphi(\sigma\mathscr{E}_n(x))e^{-\sigma} \leq C\varphi(\mathscr{E}_n(x)) \tag{35}$$
при условии, что $\mathscr{E}_n^{(\lambda)}(x) < 1/(2A)$ $(B=1)$, $\varphi(\cdot)\in\Phi$ $(B=1)$. Но вследствие (31) существует $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $\mathscr{E}_n^{(\lambda)}(x) < 1/(2A)$ $\forall n > n_0$, т. е. условие (35) выполняется.

Неравенство (29) при $n \leq n_0$ выполняется за счет соответствующего выбора константы. Переходя к пределу и принимая во внимание условия теоремы, приходим к соотношению (30).

Отправляясь от утверждения теоремы 1, покажем справедливость следующего утверждения.

Теорема 2. *Пусть* $f(x) \in L_p(S^m)$, $m \ge 3$, $1 < p \le 2$, $\varphi(\cdot) \in \Phi$ *и последовательность* $\alpha = (\alpha_k(u) \ge 0)$, $u \in U$, *не возрастает относительно* $k \in \mathbb{N}$ *при каждом фиксированном* u. *Тогда в каждой* D_p^**-точке* $x \in S^m$

$$H_n^{\varphi,\lambda}(f; \alpha; x) \le K\left\{ n\alpha_n(u)\varphi\left(\mathscr{E}_n^{(\lambda)}(x)\right) + \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k(u)\varphi\left(\mathscr{E}_k^{(\lambda)}(x)\right)\right\}, \tag{36}$$

где K — *положительная постоянная, не зависящая от* $k \in \mathbb{N}$, u, x.

Доказательство. Представим величину $H_n^{\varphi,\lambda}(f; \alpha; x)$ в виде

$$H_n^{\varphi,\lambda}(f; \alpha; x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{k=2^\nu n}^{2^{\nu+1}n-1} \alpha_k(u)\varphi\left(\left|\rho_k^{(\lambda)}(f; x)\right|\right).$$

Используя соотношение (29) и условие доказываемой теоремы, находим

$$H_n^{\varphi,\lambda}(f; \alpha; x) \le K\left\{ \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_{2^\nu n}(u) 2^\nu n \varphi\left(\mathscr{E}_{2^\nu n}^{(\lambda)}(x)\right)\right\} \le$$

$$\le K\left\{ \alpha_n(u) n\varphi\left(\mathscr{E}_n^{(\lambda)}(x)\right) + 2\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_{2^\nu n}(u) 2^{\nu-1} n \varphi\left(\mathscr{E}_{2^\nu n}^{(\lambda)}(x)\right)\right\} \le$$

$$\le K\left\{ \alpha_n(u) n\varphi\left(\mathscr{E}_n^{(\lambda)}(x)\right) + \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k(u)\varphi\left(\mathscr{E}_k^{(\lambda)}(x)\right)\right\}.$$

Из теоремы 2 вытекает такое следствие.

Следствие. *Пусть* $f(x) \in L_p(S^m)$, $m \ge 3$, $1 < p \le 2$, $\varphi(\cdot) \in \Phi$. *Пусть, далее,* $\alpha = \{\alpha_k^{(n)}: \alpha_k^{(n)} \ge 0;\ k, n \in \mathbb{N}\}$ — *бесконечная прямоугольная матрица чисел такая, что для любого фиксированного* $n \in \mathbb{N}$ *числа* $\alpha_k^{(n)}$ *не возрастают относительно* k. *Тогда в каждой* D_p^**-точке* $x \in S^m$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(n)} \varphi\left(\left|\rho_k^{(\lambda)}(f; x)\right|\right) \le K\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(n)} \varphi\left(\mathscr{E}_k^{(\lambda)}(x)\right)\right\}. \tag{37}$$

Неравенство (37) непосредственно следует из (36) при $n = 1$ и $\alpha_k(u) = \alpha_k^{(n)}$.

1. *Топурия С. Б.* Ряды Фурье – Лапласа на сфере. – Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1987. – 356 с.
2. *Хочолава В. В.* О сильной суммируемости рядов Фурье – Лапласа функций класса $L_p(S^k)$, $p > 1$ // Сообщ. АН ГССР. – 1980. – **97**, № 3. – С. 573 – 576.
3. *Totik V.* On the strong approximation by the (c, d)-means of Fourier series. I, II // Anal. Math. – 1980. – **6**, № 1, 2. – P. 57 – 85, 165 – 184.
4. *Kogbetliantz E.* Recherches sur la summabilitié des series ultrasphériques par la méthode des moyennes arithmetiques // J. Math. Pure and Appl. – 1924. – **9**, № 3. – P. 107 – 187.
5. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2 т. – М.: Мир, 1965. – Т. 2. – 537 с.
6. *Totik V.* On the strong approximation of Fourier series // Acta math. Acad. sci. hung. – 1980. – **35**. – P. 157 – 172.

Получено 21.06.2001