УДК 517.949

Ю. В. Теплінський, Н. А. Марчук (Кам'янець-Поділ. пед. ун-т)

ПРО ДИФЕРЕНЦІЙОВНІСТЬ У СЕНСІ ФРЕШЕ ІНВАРІАНТНИХ ТОРІВ ЗЧИСЛЕННИХ СИСТЕМ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ, ВИЗНАЧЕНИХ НА НЕСКІНЧЕННОВИМІРНИХ ТОРАХ

By using the Green – Samoilenko function method, in the space of bounded number sequences, we construct invariant tori of linear and nonlinear systems of discrete equations defined on infinite-dimensional tori. We find sufficient conditions of the Frechét differentiability of invariant tori.

Методом функції Гріна – Самойленка побудовано інваріантні тори лінійної та нелінійної систем дискретних рівнянь у просторі обмежених числових послідовностей, визначених на нескінченновимірних торах. Знайдено достатні умови диференційовності інваріантних торів у сенсі Фреше.

Відомо, що в теорії дискретних динамічних систем важливе місце займають дослідження інваріантних торів, зокрема властивостей їх гладкості. Останнім часом опубліковано ряд статей, присвячених вивченню інваріантних торів різницевих рівнянь у просторах обмежених числових послідовностей (зчисленних систем різницевих рівнянь). Відмітимо тут лише деякі з них, наприклад [1 – 5]. При цьому питання диференційовності інваріантних торів розглядалося лише у випадку, коли вказані вище рівняння визначались на m-вимірному торі. Така ж ситуація склалася і при вивченні гладкості інваріантних торів зчисленних систем диференціальних рівнянь [6, 7].

У цій роботі ми пропонуємо достатні умови диференційовності за Фреше інваріантного тора зчисленної системи різницевих рівнянь, визначеної на нескінченновимірному торі.

Розглянемо систему рівнянь

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + a(\varphi_n, \mu), \qquad x_{n+1} = P(\varphi_{n+p}, \mu)x_n + c(\varphi_{n+g+1}, \mu), \tag{1}$$

в якій $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3, \ldots) \in \mathfrak{M}$, $x = (x^1, x^2, x^3, \ldots) \in \mathfrak{M}$, де $\mathfrak{M}$ — простір обмежених числових послідовностей з нормою $\|x\| = \sup_i \{|x^i|\}$; функції $a(\varphi, \mu) = \{a_1(\varphi, \mu), a_2(\varphi, \mu), a_3(\varphi, \mu), \ldots\}$, $c(\varphi, \mu) = \{c_1(\varphi, \mu), c_2(\varphi, \mu), c_3(\varphi, \mu), \ldots\}$ і нескінченна матриця $P(\varphi, \mu) = \left[p_{ij}(\varphi, \mu)\right]_{i,j=1}^{\infty}$ дійсні та періодичні по φ^i, $i = 1, 2, 3, \ldots$, з періодом 2π, $n \in Z$, Z — множина цілих чисел; p і g — цілочисельні параметри, які зумовлюють відхилення дискретного аргумента; $\mu \in S \subset \mathfrak{M}$ — параметр, S — відкрита куля в $\mathfrak{M}$.

Інтерпретуючи φ^i як кутові координати, вважатимемо, що система рівнянь (1) визначена на нескінченновимірному торі $\mathcal{T}_\infty$.

Надалі вважатимемо, що при кожному $\mu \in S$ відображення $\Phi(\varphi, \mu) = \varphi + a(\varphi, \mu) : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ оборотне,

$$\|a(\varphi, \mu)\| \le A^0, \quad \|c(\varphi, \mu)\| \le C^0,$$

$$\|P(\varphi, \mu)\| = \sup_i \sum_{j=1}^{\infty} |p_{ij}(\varphi, \mu)| \le P^0,$$

причому A^0, P^0, C^0 — додатні сталі, що не залежать від $\mu \in S$, $\varphi \in \mathcal{T}_\infty$.

***Зауваження* 1.** Якщо розглядати відображення $\Phi(\varphi, \mu) : \mathfrak{M} \times S \to \mathfrak{M}$, то воно не є оборотним навіть тоді, коли виконується вказана вище умова і при кожному $\mu \in \mathfrak{M}$ відображення $\Phi(\varphi, \mu) : S \to \Phi(\varphi, S)$ оборотне.

Через $\varphi_n(\varphi,\mu)$ позначимо розв'язок першого рівняння (1) такий, що $\varphi_0(\varphi,\mu)=\varphi\in\mathcal{T}_\infty$ $\forall\mu\in S$.

Інваріантним тором $\mathcal{T}(p,g,\mu)$ системи рівнянь (1) називають множину точок $x\in\mathfrak{M}$:

$$x = u(p,g,\mu,\varphi) = (u_1(p,g,\mu,\varphi), u_2(p,g,\mu,\varphi),\ldots),\qquad \varphi\in\mathcal{T}_\infty,$$

якщо функція $u(p,g,\mu,\varphi)$ визначена при будь-яких $\{p,g\}\subset Z$, $\mu\in S$, $\varphi\in\mathfrak{M}$, 2π-періодична відносно φ^i, $i=1,2,3,\ldots$, обмежена за нормою $\|\cdot\|$ і при будь-яких $\varphi\in\mathcal{T}_\infty$ задовольняє рівність

$$u(p,g,\mu,\varphi_{n+1}(\varphi,\mu)) = P(\varphi_{n+p}(\varphi,\mu),\mu)\,u(p,g,\mu,\varphi_n(\varphi,\mu)) + \\ + c(\varphi_{n+g+1}(\varphi,\mu),\mu).$$

Тор $\mathcal{T}(p,g,\mu)$ називатимемо диференційовним за Фреше відносно $(\varphi,\mu)\in\Lambda=\mathfrak{M}\times S$, якщо таку властивість має породжуюча його функція $u(p,g,\mu,\varphi)$. Тут $\mathfrak{M}\times S$ — декартовий добуток.

Через $C^1_\Lambda(\varphi,\mu)$ позначимо множину матриць і вектор-функцій, неперервно диференційовних за Фреше відносно φ, μ на Λ, і домовимось надалі під похідною розуміти виключно похідну Фреше.

Через Γ позначимо множину всіх нескінченних матриць, обмежених за матричною нормою $\|\cdot\|$. Зрозуміло, що Γ утворює векторний нормований простір над полем дійсних чисел. Зрозуміло також, що множина Λ є відкритою в множині $\mathfrak{M}\times\mathfrak{M}$, причому під нормою елемента $h=(\varphi,\mu)\in\Lambda$ розумітимемо вираз $\|h\|=\max\{\|\varphi\|,\|\mu\|\}$, де $\|\varphi\|$ і $\|\mu\|$ — норми в просторі $\mathfrak{M}$.

Доведемо спочатку декілька допоміжних тверджень.

Лема 1. *Нехай кожна з матриць $P_i(h)$, $i=\overline{1,n}$, відображує $\Lambda\to\Gamma$ і належить $C^1_\Lambda(h)$. Тоді й добуток $\prod_{i=1}^n P_i(h)\in C^1_\Lambda(h)$.*

Доведення. Розглянемо спочатку випадок $n=2$. Операція множення матриць визначає білінійне відображення $B^2\colon\Gamma\times\Gamma\to\Gamma$. За теоремою 52 з [8, с. 122] відображення B^2 неперервне, оскільки для довільних $\{A_1,A_2\}\subset\Gamma$ виконується нерівність $\|A_1A_2\|\le\|A_1\|\,\|A_2\|$. Тоді за теоремою 12 з [8, с. 236] відображення $P_1(h)P_2(h)\colon\Lambda\to\Gamma$ неперервно диференційовне за Фреше, причому справджується рівність

$$\frac{d(P_1(h)P_2(h))}{dh}(\xi) = \frac{dP_1(h)}{dh}(\xi)\,P_2(h) + P_1(h)\frac{dP_2(h)}{dh}(\xi), \tag{2}$$

де $h\in\Lambda$, $\xi\in\mathfrak{M}\times\mathfrak{M}$.

Формулу (2) неважко поширити на випадок мультилінійного відображення $B^n\colon\Gamma^n\to\Gamma$, що визначається добутком n матриць із Γ, і одержати твердження леми 1. При цьому справджується рівність

$$\frac{d(P_1(h)P_2(h)\ldots P_n(h))}{dh}(\xi) = \frac{dP_1(h)}{dh}(\xi)\,P_2(h)\,\ldots\,P_n(h) + \\ + P_1(h)\frac{dP_2(h)}{dh}(\xi)\,P_3(h)\,\ldots\,P_n(h)+\ldots+P_1(h)\ldots P_{n-1}(h)\frac{dP_n(h)}{dh}(\xi). \tag{3}$$

Лема 2. *Нехай $\{a(\varphi,\mu),\Phi^{-1}(\varphi,\mu)\}\subset C^1_\Lambda(\varphi,\mu)$, причому при всіх $(\varphi,\mu)\in\Lambda$ справджуються нерівності*

$$\left\| \frac{da(\varphi, \mu)}{d(\varphi, \mu)} \right\| \leq A^*, \quad \left\| \frac{d\Phi^{-1}(\varphi, \mu)}{d(\varphi, \mu)} \right\| \leq \Phi_*,$$

де A^* *і* Φ_* *— додатні сталі. Тоді при всіх* $n \in Z$ *функція* $\varphi_n(\varphi, \mu) \in \in C^1_\Lambda(\varphi, \mu)$, *причому*

$$\left\| \frac{d\varphi_n(\varphi, \mu)}{d(\varphi, \mu)} \right\| \leq \begin{cases} (1+A^*)^n & \text{при } n \geq 0; \\ \Phi_*^{-n} & \text{при } n < 0, \end{cases}$$

якщо покласти $\Phi_* > 1$.

Доведення. Очевидно, що при $n \in \{0, 1\}$ твердження леми 2 має місце. Дійсно,

$$\frac{d\varphi_0(\varphi, \mu)}{d(\varphi, \mu)}(\varphi^*, \mu^*) = E\varphi^* + 0\mu^*,$$

де $(\varphi, \mu) \in \Lambda$, $(\varphi^*, \mu^*) \in \mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$, E — тотожний оператор, 0 — нульовий оператор;

$$\frac{d\varphi_1(\varphi, \mu)}{d(\varphi, \mu)} = \frac{d\varphi_0(\varphi, \mu)}{d(\varphi, \mu)} + \frac{da(\varphi, \mu)}{d(\varphi, \mu)}.$$

Крім того,

$$\left\| \frac{d\varphi_0(\varphi, \mu)}{d(\varphi, \mu)} \right\| = \sup_{\|(\varphi^*, \mu^*)\| = 1} \left\| E\varphi^* + 0\mu^* \right\| = 1,$$

$$\left\| \frac{d\varphi_1(\varphi, \mu)}{d(\varphi, \mu)} \right\| \leq 1 + A^*.$$

При $n = 2$ маємо $\varphi_2(\varphi, \mu) = \varphi_1(\varphi, \mu) + a(\varphi_1(\varphi, \mu), \mu)$. Функцію $a(\varphi_1(\varphi, \mu), \mu)$ подамо як відображення $a(h): \Lambda \to \mathfrak{M}$, де відображення $h: \Lambda \to \Lambda$ складається з двох компонент: $\varphi_1(\varphi, \mu): \Lambda \to \mathfrak{M}$ та $\mu(\varphi, \mu): \Lambda \to S$ за законом $\mu(\varphi, \mu) = \mu$. Оскільки ці компоненти неперервно диференційовні за Фреше на Λ, то цю ж властивість мають відображення h і $a(\varphi_1(\varphi, \mu), \mu)$, тобто

$$\frac{da(\varphi_1(\varphi, \mu), \mu)}{d(\varphi, \mu)} = \frac{da(h)}{dh}\left(\frac{dh}{d(\varphi, \mu)} \right),$$

причому

$$\frac{da(\varphi_1(\varphi, \mu), \mu)}{d(\varphi, \mu)}(\varphi^*, \mu^*) = \frac{da(h)}{dh}\left(\frac{d\varphi_1(\varphi, \mu)}{d(\varphi, \mu)}(\varphi^*, \mu^*), \frac{d\mu(\varphi, \mu)}{d(\varphi, \mu)}(\varphi^*, \mu^*) \right),$$

де

$$\frac{d\mu(\varphi, \mu)}{d(\varphi, \mu)}(\varphi^*, \mu^*) = \frac{d\mu}{d(\varphi, \mu)}(\varphi^*, \mu^*) = 0\varphi^* + E\mu^* = \mu^*.$$

Тоді

$$\left\| \frac{da(\varphi_1(\varphi, \mu), \mu)}{d(\varphi, \mu)} \right\| \leq$$

$$\leq \left\| \frac{da(h)}{dh} \right\| \sup_{\max\{\|\varphi^*\|, \|\mu^*\|\} = 1} \max\left\{ \left\| \frac{d\varphi_1(\varphi, \mu)}{d(\varphi, \mu)}(\varphi^*, \mu^*) \right\|; \|\mu^*\| \right\} \leq A^*(1+A^*),$$

звідки

$$\left\| \frac{d\varphi_2(\varphi, \mu)}{d(\varphi, \mu)} \right\| \le 1 + A^* + A^*(1+A^*) = (1+A^*)^2.$$

При $n \ge 2$ твердження леми 2 неважко обгрунтувати методом повної математичної індукції.

Для $n < 0$ аналогічні міркування приводять до співвідношень

$$\varphi_{-1}(\varphi, \mu) = \Phi^{-1}(\varphi, \mu), \qquad \left\| \frac{d\varphi_{-1}(\varphi, \mu)}{d(\varphi, \mu)} \right\| \le \Phi_*,$$

$$\left\| \frac{d\varphi_{-2}(\varphi, \mu)}{d(\varphi, \mu)} \right\| = \left\| \frac{d\Phi^{-1}\left(\varphi_{-1}(\varphi, \mu), \mu\right)}{d(\varphi, \mu)} \right\| \le \Phi_* \Phi_* = \Phi_*^2,$$

і так далі. Лему доведено.

Позначимо через $\Omega_l^n(p, \varphi, \mu)$ матрицант рівняння $x_{n+1} = P\left(\varphi_{n+p}(\varphi, \mu), \mu\right) x_n$.

Лема 3. *Припустимо, що для будь-яких* $\mu \in S$ *та* $\varphi \in \mathcal{T}_\infty$ *існує матриця* $P^{-1}(\varphi, \mu)$, *обернена до матриці* $P(\varphi, \mu)$ *і* $\left\| P^{-1}(\varphi, \mu) \right\| \le P_1 = \text{const} > 0$. *Нехай, крім того,* $\{ P^{-1}(\varphi, \mu), c(\varphi, \mu) \} \subset C_\Lambda^1(\varphi, \mu)$, *виконуються умови леми* 2, *причому*

$$\left\| \frac{dP^{-1}(\varphi, \mu)}{d(\varphi, \mu)} \right\| \le P_*, \qquad \left\| \frac{dc(\varphi, \mu)}{d(\varphi, \mu)} \right\| \le C_*,$$

де P_* *і* C_* — *додатні сталі, що не залежать від* $(\varphi, \mu) \in \Lambda$.

Тоді при всіх $l > 0$, $\{p, g\} \subset Z$ *має місце включення*

$$\left\{ \Omega_l^0(p, \varphi, \mu), c\left(\varphi_{l+g}(\varphi, \mu), \mu\right) \right\} \subset C_\Lambda^1(\varphi, \mu)$$

і справджуються нерівності

$$\left\| \frac{dc\left(\varphi_{l+g}(\varphi, \mu), \mu\right)}{d(\varphi, \mu)} \right\| \le \begin{cases} C_*(1+A^*)^{l+g} & \text{при } l+g \ge 0; \\ C_* \Phi_*^{-(l+g)} & \text{при } l+g < 0, \end{cases} \tag{4}$$

$$\left\| \frac{d\Omega_l^0(p, \varphi, \mu)}{d(\varphi, \mu)} \right\| \le \begin{cases} \xi_1(p) P_1^{l-1}(1+A^*)^l & \text{при } p \ge 0; \\ \xi_2(p) P_1^{l-1} & \text{при } p < 0,\ 0 < l < 1-p; \\ P_1^{l-1}\left(\xi_2(p) + \xi_1(p)(1+A^*)^l\right) & \text{при } p < 0,\ l \ge 1-p, \end{cases} \tag{5}$$

де $\xi_1(p)$, $\xi_2(p)$ *не залежать від* l, φ, μ.

Доведення. Як і при доведенні леми 2, неважко переконатись, що при всіх $n \in Z$ матриця $P^{-1}(\varphi_n(\varphi, \mu), \mu) \in C_\Lambda^1(\varphi, \mu)$, причому

$$\left\| \frac{dP^{-1}(\varphi_n(\varphi, \mu), \mu)}{d(\varphi, \mu)} \right\| \le P_* \sup_{\max\{\|\varphi^*\|, \|\mu^*\|\} = 1} \max\left\{ \left\| \frac{d\varphi_n(\varphi, \mu)}{d(\varphi, \mu)}(\varphi^*, \mu^*) \right\|; \|\mu^*\| \right\} \le$$

$$\le \begin{cases} P_*(1+A^*)^n & \text{при } n \ge 0; \\ P_* \Phi_*^{-n} & \text{при } n < 0,\ \Phi_* > 1. \end{cases}$$

Ті ж самі міркування приводять до нерівностей (4).

Для матриці $\Omega_l^0(p, \varphi, \mu)$ (див., наприклад, [2, с. 42]) при будь-якому $l > 0$ має місце зображення

$$\Omega_l^0(p, \varphi, \mu) = \prod_{i=p}^{l+p-1} P^{-1}(\varphi_i(\varphi, \mu), \mu). \tag{6}$$

Рівність (6) дає можливість записати таку нерівність:

$$\Omega \overset{\text{df}}{=} \left\| \frac{d\Omega_l^0(p, \varphi, \mu)}{d(\varphi, \mu)} \right\| \leq P_1^{l-1} \sum_{i=p}^{p+l-1} \left\| \frac{dP^{-1}(\varphi_n(\varphi, \mu), \mu)}{d(\varphi, \mu)} \right\|.$$

У випадку $p \geq 0$ маємо оцінку

$$\Omega \leq P_1^{l-1} \sum_{i=p}^{p+l-1} P_*(1+A^*)^i < P_1^{l-1} P_* \frac{1}{A^*}(1+A^*)^{p+l} = \xi_1(p) P_1^{l-1}(1+A^*)^l,$$

де $\xi_1(p) = P_*(1+A^*)^p / A^*$.

У випадку $p < 0$, $0 < l < 1-p$ одержуємо

$$\Omega \leq P_1^{l-1} \sum_{i=p}^{p+l-1} P_* \Phi_*^{-i} = P_1^{l-1} P_* \frac{\Phi_*^{-(p+l-1)}\left(\Phi_*^l - 1\right)}{\Phi_* - 1} < \xi_2(p) P_1^{l-1},$$

де

$$\xi_2(p) = \frac{P_* \Phi_*^{-p+1}}{\Phi_* - 1}, \quad \Phi_* > 1.$$

І нарешті, нехай $p < 0$, $l \geq 1-p$. Тоді

$$\Omega \leq P_1^{l-1} P_* \left\{ \sum_{i=1}^{-p} \Phi_*^i + \sum_{k=0}^{p+l-1} (1+A^*)^k \right\} =$$

$$= P_1^{l-1} P_* \left\{ \frac{\Phi_*\left(\Phi_*^{-p} - 1\right)}{\Phi_* - 1} + \frac{(1+A^*)^{l+p} - 1}{A^*} \right\} < P_1^{l-1}\left(\xi_2(p) + \xi_1(p)(1+A^*)^l\right),$$

що завершує доведення оцінок (5), а разом з тим і леми 3.

Використавши леми 1 – 3, доведемо наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай для будь-яких* $\mu \in S$ *та* $\varphi \in \mathcal{T}_\infty$ *існує матриця* $P^{-1}(\varphi, \mu)$, $\| P^{-1}(\varphi, \mu) \| \leq P_1 = \text{const} > 0$ *і справджуються умови:*

1) $\{ a(\varphi, \mu), c(\varphi, \mu), P^{-1}(\varphi, \mu), \Phi^{-1}(\varphi, \mu) \} \subset C_\Lambda^1(\varphi, \mu)$, *причому*

$$\left\| \frac{da(\varphi, \mu)}{d(\varphi, \mu)} \right\| \leq A^*, \quad \left\| \frac{d\Phi^{-1}(\varphi, \mu)}{d(\varphi, \mu)} \right\| \leq \Phi_*,$$

$$\left\| \frac{dP^{-1}(\varphi, \mu)}{d(\varphi, \mu)} \right\| \leq P_*, \quad \left\| \frac{dc(\varphi, \mu)}{d(\varphi, \mu)} \right\| \leq C_*,$$

де A^*, Φ_*, P_*, C_* — *додатні сталі, що не залежать від* $(\varphi, \mu) \in \Lambda$;

2) $P_1 < \dfrac{1}{1+A^*}$.

Тоді при всіх $\{p, g\} \subset Z$ *система рівнянь* (1) *має інваріантний тор, диференційовний за Фреше по* (φ, μ) *на множині* Λ.

Доведення. З умови 2 теореми 1 і рівності (6) випливає оцінка $\left\|\Omega_l^0(p, \varphi, \mu)\right\| \le P_1^l$, де $l > 0$, $P_1 < 1$. У цьому випадку функція Гріна – Самойленка задачі про інваріантний тор (ФГС) системи рівнянь (1) має вигляд

$$G_0(l, p, \mu, \varphi) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } l \le 0; \\ -\Omega_l^0(p, \varphi, \mu), & \text{якщо } l > 0, \end{cases}$$

а функція, породжуюча інваріантний тор $\mathcal{T}(p, g, \mu)$ цієї системи, визначається рівністю

$$u(p, g, \mu, \varphi) = -\sum_{l=1}^{\infty} \Omega_l^0(p, \varphi, \mu) c\big(\varphi_{l+g}(\varphi, \mu), \mu\big). \tag{7}$$

Ряд у правій частині рівності (7) збігається рівномірно відносно $\{p, g\} \subset Z$ та $(\varphi, \mu) \in \Lambda$ за нормою простору $\mathfrak{M}$.

Похідна Фреше

$$u_l \overset{\text{df}}{=} \frac{d\left\{\Omega_l^0(p, \varphi, \mu) c\big(\varphi_{l+g}(\varphi, \mu), \mu\big)\right\}}{d(\varphi, \mu)}$$

існує в кожній точці відкритої в афінному нормованому просторі $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$ множини Λ і здійснює відображення кожної точки $(h_1, h_2) \in \mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$ в $\mathfrak{M}$ за законом

$$u_l(h_1, h_2) = \frac{d\Omega_l^0(p, \varphi, \mu)}{d(\varphi, \mu)}(h_1, h_2) c\big(\varphi_{l+g}(\varphi, \mu), \mu\big) +$$
$$+ \Omega_l^0(p, \varphi, \mu) \frac{dc\big(\varphi_{l+g}(\varphi, \mu), \mu\big)}{d(\varphi, \mu)}(h_1, h_2).$$

З урахуванням рівності (7) і теореми 111 з [8, с. 780] для доведення теореми досить довести рівномірну відносно $(\varphi, \mu) \in \Lambda$ збіжність ряду $\sum_{l=1}^{\infty} \|u_l\|$.

Справджуються нерівності

$$\|u_l\| \le \left\|\frac{d\Omega_l^0(p, \varphi, \mu)}{d(\varphi, \mu)}\right\| \left\|c\big(\varphi_{l+g}(\varphi, \mu), \mu\big)\right\| + \left\|\Omega_l^0(p, \varphi, \mu)\right\| \times$$
$$\times \left\|\frac{dc\big(\varphi_{l+g}(\varphi, \mu), \mu\big)}{d(\varphi, \mu)}\right\| \le \left\|\frac{d\Omega_l^0(p, \varphi, \mu)}{d(\varphi, \mu)}\right\| C^0 + P_1^l \left\|\frac{dc\big(\varphi_{l+g}(\varphi, \mu), \mu\big)}{d(\varphi, \mu)}\right\|.$$

Очевидно, що $\xi_1(p)$ та $\xi_2(p)$ мають сенс при довільних $p \in Z$. Тоді, позначивши через $\eta(p)$ вираз $2(\xi_1(p) + \xi_2(p))$, для всіх $p \in Z$ запишемо оцінку

$$\left\|\frac{d\Omega_l^0(p, \varphi, \mu)}{d(\varphi, \mu)}\right\| \le P_1^{l-1}(1 + A^*)^l \eta(p).$$

У цьому випадку при всіх $p \in Z$ і $g \ge -1$ мають місце нерівності

$$\sum_{l=1}^{\infty} \|u_l\| < \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ C^0 P_1^{l-1}(1 + A^*)^l \eta(p) + P_1^l C_*(1 + A^*)^{l+g} \right\} \le$$
$$\le C^0 P_1^{-1} \eta(p) \sum_{l=1}^{\infty} \big(P_1(1 + A^*)\big)^l + C_*(1 + A^*)^g \sum_{l=1}^{\infty} \big(P_1(1 + A^*)\big)^l.$$

За умовою 2 теореми 1 $P_1(1+A^*)<1$, отже,

$$\sum_{l=1}^{\infty}\|u_l\| < \frac{C^0\eta(p)(1+A^*)}{1-P_1(1+A^*)} + \frac{P_1C_*(1+A^*)^{g+1}}{1-P_1(1+A^*)},$$

тобто останній ряд збігається рівномірно відносно $(\varphi,\mu)\in\Lambda$.

Якщо ж $g<-1$, то

$$\sum_{l=1}^{\infty}\|u_l\| < \sum_{l=1}^{-g-1}\left\{C^0P_1^{l-1}(1+A^*)^l\eta(p)+P_1^lC_*\Phi_*^{-l-g}\right\}+$$

$$+\sum_{l=-g}^{\infty}\left\{C^0P_1^{l-1}(1+A^*)^l\eta(p)+P_1^lC_*(1+A^*)^{l+g}\right\}.$$

Одержуємо аналогічний результат, оскільки в правій частині останньої нерівності містяться скінченна сума та збіжний ряд.

Теорему доведено.

Зауважимо, що при всіх невід'ємних p і $g\ge -1$ не потрібно вимагати диференційовності відображення $\Phi^{-1}(\varphi,\mu)$ на Λ.

Має місце таке твердження.

***Наслідок* 1.** *Нехай справджується умова* 2 *теореми* 1,

$$\left\{a(\varphi,\mu),c(\varphi,\mu),P^{-1}(\varphi,\mu)\right\}\subset C_{\Phi}^1(\varphi,\mu),$$

причому

$$\left\|\frac{da(\varphi,\mu)}{d(\varphi,\mu)}\right\|\le A^*,\qquad \left\|\frac{dP^{-1}(\varphi,\mu)}{d(\varphi,\mu)}\right\|\le P_*,\qquad \left\|\frac{dc(\varphi,\mu)}{d(\varphi,\mu)}\right\|\le C_*,$$

де A^*, P_*, C_* *— додатні сталі, що не залежать від* $(\varphi,\mu)\in\Lambda$.

Тоді при всіх $\{p\ge 0,\ g\ge -1\}\subset Z$ *система рівнянь* (1) *має інваріантний тор, диференційовний за Фреше по* (φ,μ) *на множині* Λ.

Припустимо тепер, що матриця $P(\varphi,\mu)$ або не є оборотною на Λ, або умова 2 теореми 1 не виконується. Сформулюємо наступне твердження.

Теорема 2. *Нехай справджується умова* 1 *теореми* 1, *в якій матрицю* $P^{-1}(\varphi,\mu)$ *замінено матрицею* $P(\varphi,\mu)$, *і*

$$P^0<\frac{1}{\Phi_*},\quad \Phi_*>1. \tag{8}$$

Тоді при всіх $\{p,g\}\subset Z$ *система рівнянь* (1) *має інваріантний тор, диференційовний за Фреше по* (φ,μ) *на множині* Λ.

Доведення. При всіх $l<0$ покладемо [2, с. 42]

$$\Omega_l^0(p,\varphi,\mu)=\prod_{i=p-1}^{l+p}P(\varphi_i(\varphi,\mu),\mu),$$

звідки, враховуючи (8), маємо нерівності

$$\left\|\Omega_l^0(p,\varphi,\mu)\right\|\le\prod_{i=p-1}^{l+p}\|P(\varphi_i(\varphi,\mu),\mu)\|\le(P^0)^{-l}.$$

Тоді функція Гріна – Самойленка системи рівнянь (1) має вигляд

$$G_0(l,p,\mu,\varphi)=\begin{cases}\Omega_l^0(p,\varphi,\mu), & \text{якщо } l\le 0;\\ 0, & \text{якщо } l>0,\end{cases}$$

і, відповідно,

$$u(p, g, \mu, \varphi) = \sum_{l=-\infty}^{0} \Omega_l^0(p, \varphi, \mu) c\left(\varphi_{l+g}(\varphi, \mu), \mu\right).$$

Як і при доведенні теореми 1, переконуємось у виконанні нерівностей

$$\left\| \frac{d\Omega_l^0(p, \varphi, \mu)}{d(\varphi, \mu)} \right\| \leq (P^0)^{-l-1} P_* \sum_{i=p-1}^{p+l} \left\| \frac{d\varphi_i(\varphi, \mu)}{d(\varphi, \mu)} \right\| <$$

$$< \begin{cases} \xi_2(p)(P^0)^{-l-1}\Phi_*^{-l} & \text{при } p \leq 0,\ l < 0; \\ \xi_1(p)(P^0)^{-l-1} & \text{при } p > 0,\ -p \leq l < 0; \\ (P^0)^{-l-1}\left(\xi_1(p) + \xi_2(p)\Phi_*^{-l}\right) & \text{при } p > 0,\ l < -p \end{cases} <$$

$$< (P^0)^{-l-1}\Phi_*^{-l}\eta(p), \quad l < 0, \quad p \in Z.$$

Тоді при всіх $p \in Z$ і $g < 1$ ряд

$$\sum_{l=-\infty}^{-1} \| u_l \| < \sum_{l=-\infty}^{-1} \left\{ C^0 (P^0)^{-l-1} \Phi_*^{-l} \eta(p) + (P^0)^{-l} C_* \Phi_*^{-(l+g)} \right\}$$

збігається рівномірно відносно $(\varphi, \mu) \in \Phi$, оскільки з умови (8) випливає $P^0 \Phi_* < 1$.

Якщо ж $g \geq 1$, то нерівність

$$\sum_{l=-\infty}^{-1} \| u_l \| < \sum_{l=-\infty}^{-g-1} \left\{ C^0 (P^0)^{-l-1} \Phi_*^{-l} \eta(p) + (P^0)^{-l} C_* \Phi_*^{-(l+g)} \right\} +$$

$$+ \sum_{l=-g}^{-1} \left\{ C^0 (P^0)^{-l-1} \Phi_*^{-l} \eta(p) + (P^0)^{-l} C_* (1 + A^*)^{l+g} \right\}$$

містить у правій частині збіжний ряд і скінченну суму. Отже, при всіх $\{p, g\} \subset \subset Z$ ряд $\sum_{l=-\infty}^{0} \| u_l \|$ збігається рівномірно відносно $(\varphi, \mu) \in \Lambda$, що завершує доведення теореми 2.

Зауважимо, що в умовах теорем 1, 2 диференційовність інваріантного тора системи рівнянь (1) визначається обмеженнями, які накладаються лише на функції $a(\varphi, \mu)$, $P(\varphi, \mu)$, $c(\varphi, \mu)$. У загальному випадку це зробити не вдається.

Дійсно, нехай умови теорем 1 та 2 не виконуються, але функція Гріна – Самойленка системи рівнянь (1) існує. Це означає, що існує 2π-періодична по φ^i, $i = 1, 2, 3, \ldots$, обмежена за нормою нескінченна матриця $C(\varphi, \mu)$ така, що функція

$$G_0(l, p, \mu, \varphi) = \begin{cases} \Omega_l^0(p, \varphi, \mu) C\left(\varphi_{l+p}(\varphi, \mu), \mu\right), & \text{якщо } l \leq 0; \\ \Omega_l^0(p, \varphi, \mu)\left[C\left(\varphi_{l+p}(\varphi, \mu), \mu\right) - E \right], & \text{якщо } l > 0, \end{cases} \tag{9}$$

задовольняє нерівність $\| G_0(l, p, \mu, \varphi) \| \leq M\lambda^{|l|}$ для всіх $\{p, l\} \subset Z$, $\mu \in S$, $\varphi \in \mathcal{T}_\infty$, де M і $\lambda < 1$ — додатні сталі, не залежні від p, l, φ, μ, E — нескінченна одинична матриця.

Теорема 3. *Нехай справджуються такі умови:*

1) *існує функція Гріна – Самойленка системи рівнянь* (1);

2) $\left\{a(\varphi,\mu), c(\varphi,\mu), \Phi^{-1}(\varphi,\mu), G_0(l,p,\mu,\varphi)\right\} \subset C^1_\Lambda(\varphi,\mu)$, *причому*

$$\left\|\frac{da(\varphi,\mu)}{d(\varphi,\mu)}\right\| \le A^*, \quad \left\|\frac{d\Phi^{-1}(\varphi,\mu)}{d(\varphi,\mu)}\right\| \le \Phi_*, \quad \left\|\frac{dc(\varphi,\mu)}{d(\varphi,\mu)}\right\| \le C_*,$$

де A^*, Φ_*, C_* — *додатні сталі, що не залежать від* $(\varphi,\mu) \in \Lambda$;

3) $\lambda < \min\left\{\dfrac{1}{\Phi_*}; \dfrac{1}{1+A^*}\right\}$;

4) *ряд* $\sum_{l=-\infty}^{\infty} \left\|\dfrac{dG_0(l,p,\mu,\varphi)}{d(\varphi,\mu)}\right\|$ *збігається рівномірно відносно* $(\varphi,\mu) \in \Lambda$.

Тоді при всіх $\{p, g\} \subset Z$ *система рівнянь* (1) *має інваріантний тор, диференційовний за Фреше по* (φ,μ) *на множині* Λ.

Доведення. Оскільки в умовах теореми 3

$$u(p,g,\mu,\varphi) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} G_0(l,p,\varphi,\mu) c\big(\varphi_{l+g}(\varphi,\mu),\mu\big),$$

то, як видно із доведень теорем 1 і 2, для правильності включення $u(p,g,\mu,\varphi) \in C^1_\Lambda(\varphi,\mu)$ досить, щоб рівномірно по $(\varphi,\mu) \in \Lambda$ збігалися ряди

$$I_1 = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left\|\frac{dG_0(l,p,\varphi,\mu)}{d(\varphi,\mu)}\right\| \left\|c\big(\varphi_{l+g}(\varphi,\mu),\mu\big)\right\|,$$

$$I_2 = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \|G_0(l,p,\varphi,\mu)\| \left\|\frac{dc\big(\varphi_{l+g}(\varphi,\mu),\mu\big)}{d(\varphi,\mu)}\right\|.$$

Для ряду I_1 ця вимога, очевидно, виконується. Для ряду I_2 запишемо нерівності, поклавши $\Phi_* > 1$:

$$I_2 \le \sum_{l=-\infty}^{\infty} M\lambda^{|l|} \left\|\frac{dc\big(\varphi_{l+g}(\varphi,\mu),\mu\big)}{d(\varphi,\mu)}\right\| \le$$

$$\le MC_*\Phi_*^{-g} \sum_{l=-\infty}^{-g-1} \lambda^{|l|}\Phi_*^{-l} + MC_*(1+A^*)^g \sum_{l=-g}^{\infty} \lambda^{|l|}(1+A^*)^l.$$

Неважко переконатися, що при всіх $g \in Z$ ряди $\sum_{l=-\infty}^{-g-1} \lambda^{|l|}\Phi_*^{-l}$ та $\sum_{l=-g}^{\infty} \lambda^{|l|}(1+A^*)^l$ збігаються, оскільки $\lambda\Phi_* < 1$ та $\lambda(1+A^*) < 1$.

Теорему доведено.

Розглянемо тепер нелінійну систему дискретних рівнянь

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1} &= \varphi_n + a(\varphi_n,\mu), \\ x_{n+1} &= P(\varphi_{n+p},\mu)x_n + c(\varphi_{n+g+1},\mu,x_{n+1}), \quad n \in Z, \end{aligned} \tag{10}$$

де функція $c(\varphi,\mu,x)$ визначена на множині $\mathfrak{M} \times S \times D$, $D = \{x \in \mathfrak{M} \mid \|x\| \le d = \mathrm{const} > 0\}$, і на цій множині $\|c(\varphi,\mu,x)\| \le C^0$.

Будемо говорити, що функція $u(p, g, \mu, \varphi)$ породжує інваріантний тор $\mathcal{T}(p, g, \mu)$ системи рівнянь (10), якщо вона при будь-яких $\{p, g\} \subset Z$, $\mu \in S$ є 2π-періодичною відносно φ^i, $i = 1, 2, 3, \dots$, обмеженою за нормою $\|\cdot\|$ і задовольняє рівність

$$u(p, g, \mu, \varphi_{n+1}(\varphi, \mu)) = P(\varphi_{n+p}(\varphi, \mu), \mu)\, u(p, g, \mu, \varphi_n(\varphi, \mu)) + \\ + c(\varphi_{n+g+1}(\varphi, \mu), \mu, u(p, g, \mu, \varphi_{n+1}(\varphi, \mu))) \tag{11}$$

при будь-яких $\varphi \in \mathcal{T}_\infty$.

Теорема 4. *Нехай існує функція Гріна – Самойленка, визначена рівністю* (9), *і*

$$\| c(\varphi, \mu, x) - c(\varphi, \mu, x_1) \| \le K \| x - x_1 \|,$$

де K — додатна стала, що не залежить від $\{\varphi, \mu\} \in \mathfrak{M} \times S$, $\{x, x_1\} \subset D$. Якщо справджуються нерівності

$$C^0 \le \frac{d(1-\lambda)}{1+\lambda}, \qquad MK\frac{1+\lambda}{1-\lambda} < 1,$$

то система рівнянь (10) *має інваріантний тор.*

Доведення. Складемо послідовність функцій

$$u_{i+1}(p, g, \mu, \varphi) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} G_0(l, p, \mu, \varphi) c\big(\varphi_{l+g}(\varphi, \mu), \mu, u_i(p, g, \mu, \varphi_l(\varphi, \mu))\big), \tag{12}$$

$$i = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

де $u_0(p, g, \mu, \varphi)$ породжує інваріантний тор $\mathcal{T}_0(p, g, \mu)$ системи рівнянь

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + a(\varphi_n, \mu), \qquad x_{n+1} = P(\varphi_{n+p}, \mu)x_n + c(\varphi_{n+g+1}, \mu, 0),$$

причому

$$\| u_0(p, g, \mu, \varphi) \| \le \sum_{l=-\infty}^{\infty} \big\| G_0(l, p, \mu, \varphi) c\big(\varphi_{l+g}(\varphi, \mu), \mu, 0\big) \big\| \le d.$$

Покажемо, що функція $u_{i+1}(p, g, \mu, \varphi)$ при всіх $i \in \{1, 2, 3, \dots\}$ породжує інваріантний тор $\mathcal{T}_{i+1}(p, g, \mu)$ системи рівнянь

$$\begin{gathered} \varphi_{n+1} = \varphi_n + a(\varphi_n, \mu), \\ x_{n+1} = P(\varphi_{n+p}, \mu)x_n + c(\varphi_{n+g+1}, \mu, u_i(p, g, \mu, \varphi_{n+1})). \end{gathered} \tag{13}$$

Очевидно, що при всіх натуральних i $\| u_i(p, g, \mu, \varphi) \| \le d$, і функція $u_i(p, g, \mu, \varphi)$ 2π-періодична по φ^j, $j = 1, 2, 3, \dots$.

Функція

$$x_n = u_{i+1}(p, g, \mu, \varphi_n(\varphi, \mu)) =$$

$$= \sum_{l=-\infty}^{\infty} G_n(l, p, \mu, \varphi) c\big(\varphi_{l+g}(\varphi, \mu), \mu, u_i(p, g, \mu, \varphi_l(\varphi, \mu))\big)$$

визначає сім'ю обмежених розв'язків системи рівнянь (13).

Дійсно, справджуються рівності

$$V_1 = \Omega_l^{n+1}(p, \varphi, \mu) C\big(\varphi_{p+l}(\varphi, \mu), \mu\big) c\big(\varphi_{l+g}(\varphi, \mu), \mu, u_i(p, g, \mu, \varphi_l(\varphi, \mu))\big) =$$
$$= P\big(\varphi_{n+p}(\varphi, \mu), \mu\big) \Omega_l^n(p, \varphi, \mu) C\big(\varphi_{p+l}(\varphi, \mu), \mu\big) c\big(\varphi_{l+g}(\varphi, \mu), \mu, u_i(p, g, \mu, \varphi_l(\varphi, \mu))\big),$$
$$V_2 = \Omega_l^{n+1}(p, \varphi, \mu) \big[C\big(\varphi_{p+l}(\varphi, \mu), \mu\big) - E \big] c\big(\varphi_{l+g}(\varphi, \mu), \mu, u_i(p, g, \mu, \varphi_l(\varphi, \mu))\big) =$$
$$= P\big(\varphi_{n+p}(\varphi, \mu), \mu\big) \Omega_l^n(p, \varphi, \mu) \big[C\big(\varphi_{p+l}(\varphi, \mu), \mu\big) - E \big] \times$$
$$\times\, c\big(\varphi_{l+g}(\varphi, \mu), \mu, u_i(p, g, \mu, \varphi_l(\varphi, \mu))\big).$$

Тоді

$$x_{n+1} = \sum_{l=-\infty}^{n+1} V_1 + \sum_{l=n+2}^{\infty} V_2 = \sum_{l=-\infty}^{n} V_1 + \sum_{l=n+1}^{\infty} V_2 +$$
$$+ C\big(\varphi_{n+p+1}(\varphi, \mu), \mu\big) c\big(\varphi_{n+g+1}(\varphi, \mu), \mu, u_i(p, g, \mu, \varphi_{n+1}(\varphi, \mu))\big) -$$
$$- \big[C\big(\varphi_{n+p+1}(\varphi, \mu), \mu\big) - E \big] c\big(\varphi_{n+g+1}(\varphi, \mu), \mu, u_i(p, g, \mu, \varphi_{n+1}(\varphi, \mu))\big) =$$
$$= P\big(\varphi_{n+p}(\varphi, \mu), \mu\big) x_n + c\big(\varphi_{n+g+1}(\varphi, \mu), \mu, u_i(p, g, \mu, \varphi_{n+1}(\varphi, \mu))\big).$$

Індуктивні міркування приводять до ланцюжка нерівностей

$$\| u_{i+1}(p, g, \mu, \varphi) - u_i(p, g, \mu, \varphi) \| \le \sum_{l=-\infty}^{\infty} M \lambda^{|l|} K \| u_i(p, g, \mu, \varphi_l(\varphi, \mu)) -$$
$$- u_{i-1}(p, g, \mu, \varphi_l(\varphi, \mu)) \| \le \sum_{l=-\infty}^{\infty} M K \lambda^{|l|} \sum_{k=-\infty}^{\infty} M K \lambda^{|k-l|} \times$$
$$\times \| u_{i-1}(p, g, \mu, \varphi_k(\varphi, \mu)) - u_{i-2}(p, g, \mu, \varphi_k(\varphi, \mu)) \| \le$$
$$\le \sum_{l=-\infty}^{\infty} M K \lambda^{|l|} \sum_{k=-\infty}^{\infty} M K \lambda^{|k-l|} \sum_{s=-\infty}^{\infty} M K \lambda^{|s-k|} \ldots \sum_{r=-\infty}^{\infty} M K \lambda^{|r-\rho|} \times$$
$$\times \| u_1(p, g, \mu, \varphi_r(\varphi, \mu)) - u_0(p, g, \mu, \varphi_r(\varphi, \mu)) \| \le$$
$$\le 2d (MK)^i \sum_{l=-\infty}^{\infty} \lambda^{|l|} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda^{|k-l|} \ldots \sum_{r=-\infty}^{\infty} \lambda^{|r-\rho|} = 2d \left(MK \frac{1+\lambda}{1-\lambda} \right)^i. \qquad (14)$$

У цьому випадку оцінка

$$\| u_{s+m}(p, g, \mu, \varphi) - u_s(p, g, \mu, \varphi) \| \le \sum_{l=1}^{m} \| u_{s+i}(p, g, \mu, \varphi) - u_{s+i-1}(p, g, \mu, \varphi) \| \le$$
$$\le 2d \sum_{i=1}^{\infty} \left(MK \frac{1+\lambda}{1-\lambda} \right)^{s+i-1} = 2d \frac{\left(MK \frac{1+\lambda}{1-\lambda} \right)^s}{1 - MK \frac{1+\lambda}{1-\lambda}} \to 0$$

при $s \to \infty$ доводить фундаментальність послідовності $\{ u_i(p, g, \mu, \varphi) \}_{i=0}^{\infty} \subset \mathfrak{M}$. Вона є збіжною до деякої функції $u(p, g, \mu, \varphi)$, оскільки простір $\mathfrak{M}$ повний.

Переходячи до границі при $i \to \infty$ в рівності

$$u_{i+1}(p, g, \mu, \varphi_{n+1}(\varphi, \mu)) = P\big(\varphi_{n+p}(\varphi, \mu), \mu\big) u_{i+1}(p, g, \mu, \varphi_n(\varphi, \mu)) +$$
$$+ c\big(\varphi_{n+g+1}(\varphi, \mu), \mu, u_i(p, g, \mu, \varphi_{n+1}(\varphi, \mu))\big),$$

одержуємо рівність (11), що завершує доведення теореми 4, оскільки інваріантний тор системи рівнянь (10) породжується функцією $u(p, g, \mu, \varphi)$.

Позначимо через D_ρ і D_0 множини $\{x \in \mathfrak{M} \mid \|x\| < d + \rho\}$ і $\mathfrak{M} \times S \times D_\rho$ відповідно. Тут ρ — як завгодно мала додатна стала. Очевидно, що множина D_0 відкрита в $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$, якщо покласти $\|(\varphi, \mu, x) \in D_0\| = \max\{\|\varphi\|, \|\mu\|, \|x\|\}$, де в правій частині останньої рівності знак $\|\cdot\|$ означає норму в $\mathfrak{M}$.

Наступне твердження наводить достатні умови диференційовності інваріантного тора системи рівнянь (10) в сенсі Фреше.

Теорема 5. *Нехай виконуються такі умови:*

1) *існує функція Гріна – Самойленка, визначена рівністю* (9);

2) $\{a(\varphi, \mu), \Phi^{-1}(\varphi, \mu), G_0(l, p, \mu, \varphi)\} \subset C^1_\Lambda(\varphi, \mu)$, $c(\varphi, \mu, x) \in C^1_{D_0}(\varphi, \mu, x)$, *причому*

$$\left\|\frac{da(\varphi, \mu)}{d(\varphi, \mu)}\right\| \le A^*, \quad \left\|\frac{d\Phi^{-1}(\varphi, \mu)}{d(\varphi, \mu)}\right\| \le \Phi_*, \quad \left\|\frac{dc(\varphi, \mu, x)}{d(\varphi, \mu, x)}\right\| \le C_*,$$

$$\left\|\frac{dG_0(l, p, \mu, \varphi)}{d(\varphi, \mu)}\right\| \le M_1(p)\lambda_1^{|l|}, \tag{15}$$

$$\left\|\frac{dc(\varphi, \mu, x)}{d(\varphi, \mu, x)} - \frac{dc(\varphi, \mu, \bar{x})}{d(\varphi, \mu, \bar{x})}\right\| \le L_0\|x - \bar{x}\|,$$

де $A^*, \Phi_* > 1$, C_*, $M_1(p)$, L_0 — *додатні сталі, що не залежать від* $(\varphi, \mu) \in \Lambda$, $\{x, \bar{x}\} \subset D_\rho$, $0 < \lambda_1 = \text{const} < 1$ *і не залежить від* l, p, μ, φ;

3) $C_0 \le d(1-\lambda)/(1+\lambda)$, $\max\{MC_*(1+\delta\lambda)/(1-\delta\lambda); \delta\lambda\} < 1$, *де* $\delta = \max\{\Phi_*, 1 + A^*\}$.

Тоді система рівнянь (10) *має інваріантний тор* $\mathcal{T}(p, g, \mu)$, *породжуюча функція якого* $u(p, g, \mu, \varphi) \in C^1_\Lambda(\varphi, \mu)$ *при всіх* $\{p, g\} \subset Z$.

Доведення. Легко бачити, що при умовах сформульованої теореми справджуються теорема 3, якщо покласти $c(\varphi, \mu, 0) = c(\varphi, \mu)$, і теорема 4, якщо покласти в ній $K = C_*$.

Покажемо спочатку, що при всіх $n = 0, 1, 2, \ldots$ $u_n(p, g, \mu, \varphi) \in C^1_\Lambda(\varphi, \mu)$, причому

$$\left\|\frac{du_n(p, g, \mu, \varphi_l(\varphi, \mu))}{d(\varphi, \mu)}\right\| \le Z_n \delta^{|l|},$$

де Z_n — додатна стала, що не залежить від $(\varphi, \mu) \in \Lambda$, $l \in Z$. Для цього використаємо метод повної математичної індукції, врахувавши, що за лемою 2 $\left\|\frac{d\varphi_l(\varphi, \mu)}{d(\varphi, \mu)}\right\| \le \delta^{|l|}$ при всіх $l \in Z$. При $n = 0$ $\left\|\frac{du_0(p, g, \mu, \varphi)}{d(\varphi, \mu)}\right\| \le Z_0$, що випливає з доведення теореми 3. Тоді

$$\left\|\frac{du_0(p, g, \mu, \varphi_l(\varphi, \mu))}{d(\varphi, \mu)}\right\| \le$$

$$\le \left\|\frac{du_0(p, g, \mu, \varphi)}{d(\varphi, \mu)}\right\| \sup_{\max\{\|\varphi^*\|, \|\mu^*\|\}=1} \max\left\{\left\|\frac{d\varphi_l(\varphi, \mu)}{d(\varphi, \mu)}(\varphi^*, \mu^*)\right\|, \|\mu^*\|\right\} \le Z_0\delta^{|l|},$$

$$(\varphi^*, \mu^*) \in \mathfrak{M} \times \mathfrak{M}.$$

Припустимо тепер, що сформульоване твердження правильне при $n \le i$, і доведемо, що воно справджується при $n = i + 1$.

Функція $c\big(\varphi_{l+g}(\varphi, \mu), \mu, u_i(p, g, \mu, \varphi_l(\varphi, \mu))\big)$ є відображенням $c(h): D_0 \to \to \mathfrak{M}$, яке складається з трьох компонент $\varphi_{l+g}(\varphi, \mu): \Lambda \to \mathfrak{M}$, $\mu(\varphi, \mu) = = \mu : \Lambda \to S$ та $u_i(p, g, \mu, \varphi_l(\varphi, \mu)) : \Lambda \to D_\rho$. Кожна з них неперервно диференційовна за Фреше на множині Λ. Тоді $c\big(\varphi_{l+g}(\varphi, \mu), \mu, u_i(p, g, \mu, \varphi_l(\varphi, \mu))\big) \in \in C^1_\Lambda(\varphi, \mu)$, причому

$$\left\| \frac{dc\big(\varphi_{l+g}(\varphi, \mu), \mu, u_i(p, g, \mu, \varphi_l(\varphi, \mu))\big)}{d(\varphi, \mu)} \right\| \le \left\| \frac{dc(h)}{dh} \right\| \max\left\{ \left\| \frac{d\varphi_{l+g}(\varphi, \mu)}{d(\varphi, \mu)} \right\|, 1, \right.$$

$$\left. \left\| \frac{du_i(p, g, \mu, \varphi_l(\varphi, \mu))}{d(\varphi, \mu)} \right\| \right\} \le C_* \max\left\{ \delta^{|l+g|}, Z_i \delta^{|l|} \right\} \le \delta^{|l|} r_i,$$

де $r_i = C_* \max\left\{ \delta^{|g|}, Z_i \right\}$.

Враховуючи нерівності

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} \left\| \frac{dG_0(l, p, \varphi, \mu)}{d(\varphi, \mu)} \right\| \left\| c\big(\varphi_{l+g}(\varphi, \mu), \mu, u_i(p, g, \mu, \varphi_l(\varphi, \mu))\big) \right\| \le \sum_{l=-\infty}^{\infty} M_1(p) \lambda_1^{|l|} C^0,$$

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} \| G_0(l, p, \varphi, \mu) \| \left\| \frac{dc\big(\varphi_{l+g}(\varphi, \mu), \mu, u_i(p, g, \mu, \varphi_l(\varphi, \mu))\big)}{d(\varphi, \mu)} \right\| \le$$

$$\le \sum_{l=-\infty}^{\infty} M \lambda^{|l|} \delta^{|l|} r_i = M r_i \sum_{l=-\infty}^{\infty} (\lambda\delta)^{|l|}, \tag{16}$$

рівність (12) і оцінку $\lambda\delta < 1$, приходимо до висновку, що $u_{i+1}(p, g, \mu, \varphi) \in \in C^1_\Lambda(\varphi, \mu)$, причому

$$\left\| \frac{du_{i+1}(p, g, \mu, \varphi_l(\varphi, \mu))}{d(\varphi, \mu)} \right\| \le Z_{i+1} \delta^{|l|},$$

де

$$Z_{i+1} = M_1(p) C^0 \frac{1 + \lambda_1}{1 - \lambda_1} + M r_i \frac{1 + \lambda\delta}{1 - \lambda\delta},$$

що й доводить сформульоване вище твердження.

Залишається довести рівномірну відносно $(\varphi, \mu) \in \Lambda$ збіжність послідовності функцій $\left\{ \dfrac{du_i(p, g, \mu, \varphi)}{d(\varphi, \mu)} \right\}_{i=0}^{\infty}$, визначених на Λ, зі значеннями в просторі лінійних операторів $\mathbf{L}(\mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \to \mathfrak{M})$. Оскільки вказаний простір повний, досить показати, що ця послідовність фундаментальна.

Введемо позначення

$$\bar{u}_{i+1} = \frac{du_{i+1}(p, g, \mu, \varphi)}{d(\varphi, \mu)} - \frac{du_i(p, g, \mu, \varphi)}{d(\varphi, \mu)}.$$

Беручи до уваги рівність (12) та нерівності (16), одержуємо співвідношення

$$\| \bar{u}_{i+1} \| \le \sum_{l=-\infty}^{\infty} M_1(p) \lambda_1^{|l|} \left\| c\big(\varphi_{l+g}(\varphi, \mu), \mu, u_i(p, g, \mu, \varphi_l(\varphi, \mu))\big) - \right.$$

$$- c\big(\varphi_{l+g}(\varphi,\mu),\mu,u_{i-1}(p,g,\mu,\varphi_l(\varphi,\mu))\big)\big\| + \sum_{l=-\infty}^{\infty} M\lambda^{|l|} \times$$

$$\times \left\| \frac{dc\big(\varphi_{l+g}(\varphi,\mu),\mu,u_i(p,g,\mu,\varphi_l(\varphi,\mu))\big)}{d(\varphi,\mu)} - \frac{dc\big(\varphi_{l+g}(\varphi,\mu),\mu,u_{i-1}(p,g,\mu,\varphi_l(\varphi,\mu))\big)}{d(\varphi,\mu)} \right\| \leq$$

$$\leq \sum_{l=-\infty}^{\infty} M_1(p)\lambda_1^{|l|} C_* \| u_i(p,g,\mu,\varphi_l(\varphi,\mu)) - u_{i-1}(p,g,\mu,\varphi_l(\varphi,\mu)) \| +$$

$$+ MC_* \sum_{l=-\infty}^{\infty} \| \overline{u}_{il} \| \lambda^{|l|} +$$

$$+ \sum_{l=-\infty}^{\infty} ML_0 \lambda^{|l|} \delta^{|l|} \max\left\{ \delta^{|g|}, Z_i \right\} \| u_i(p,g,\mu,\varphi_l(\varphi,\mu)) - u_{i-1}(p,g,\mu,\varphi_l(\varphi,\mu)) \|,$$

де

$$\overline{u}_{il} = \frac{du_i(p,g,\mu,\varphi_l(\varphi,\mu))}{d(\varphi,\mu)} - \frac{du_{i-1}(p,g,\mu,\varphi_l(\varphi,\mu))}{d(\varphi,\mu)}.$$

Для довільних точок $(\varphi^*,\mu^*) \in \mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$

$$\| \overline{u}_{il} \| = \sup_{\max\{\|\varphi^*\|,\|\mu^*\|\}=1} \left\| \overline{u}_i\left(\frac{d\varphi_l(\varphi,\mu)}{d(\varphi,\mu)}(\varphi^*,\mu^*),\mu^* \right) \right\| \leq$$

$$\leq \sup_{\max\{\|\varphi^*\|,\|\mu^*\|\}=1} \| \overline{u}_i \|_0 \max\left\{ \left\| \frac{d\varphi_l(\varphi,\mu)}{d(\varphi,\mu)}(\varphi^*,\mu^*) \right\|, \|\mu^*\| \right\} \leq \| \overline{u}_i \|_0 \, \delta^{|l|}.$$

Введемо такі позначення:

$$\gamma_1 = 2dC_* M_1(p)\frac{1+\lambda_1}{1-\lambda_1} + ML_0 \max\left\{ \delta^{|g|}, Z^* \right\} 2d\frac{1+\delta\lambda}{1-\delta\lambda},$$

$$\gamma_2 = MC_*\frac{1+\lambda}{1-\lambda}, \qquad \gamma_3 = MC_*\frac{1+\delta\lambda}{1-\delta\lambda} \qquad \left(\gamma_3 > \gamma_2,\ Z^* = \sup_{i\in Z_0^+}\{Z_i\} \right),$$

і, врахувавши (14), (15), випишемо індуктивну нерівність

$$\| \overline{u}_{i+1} \|_0 \leq \gamma_1\gamma_2^{i-1} + \gamma_3 \| \overline{u}_i \|_0, \quad i = 1, 2, 3, \ldots,$$

яка дозволяє одержати співвідношення

$$\| \overline{u}_{i+1} \| \leq \gamma_1 \left\{ \gamma_2^{i-1}\gamma_3^0 + \gamma_2^{i-2}\gamma_3 + \ldots + \gamma_2^0\gamma_3^{i-1} \right\} + \gamma_3^i (Z_0 + Z_1) <$$

$$< \gamma_1 \frac{\gamma_2^{i-1}(\gamma_3/\gamma_2)^i \gamma_2}{\gamma_3 - \gamma_2} + \gamma_3^i (Z_0 + Z_1) = F\sigma^i.$$

Тут покладено $\sigma = \gamma_3$, $F = \gamma_1/(\gamma_3 - \gamma_2) + Z_0 + Z_1$.

Оскільки $\sigma = \text{const} < 1$, а F не залежить від $(\varphi,\mu) \in \Lambda$, то оцінка

$$\left\| \frac{du_{s+m}(p,g,\mu,\varphi)}{d(\varphi,\mu)} - \frac{du_s(p,g,\mu,\varphi)}{d(\varphi,\mu)} \right\| \leq \sum_{i=1}^{\infty} F\sigma^{s+i-1} = F\frac{\sigma^s}{1-\sigma} \to 0$$

при $s \to \infty$ доводить фундаментальність послідовності $\left\{ \dfrac{du_i(p, g, \mu, \varphi)}{d(\varphi, \mu)} \right\}_{i=0}^{\infty}$, а разом з тим і теорему 5.

Випишемо систему різницевих рівнянь

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1} &= \varphi_n + a(\varphi_n, \mu), \\ x_{n+1} &= P(\varphi_{n+p}, \mu)x_n + c(\varphi_{n+g}, \mu, x_n), \quad n \in Z, \end{aligned} \tag{17}$$

яка задовольняє ті ж вимоги, що і система (10).

Задамо функцію Гріна – Самойленка, як і раніше, рівністю (9). Неважко переконатись, що функція

$$u_0(p, g, \mu, \varphi) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} G_0(l, p, \mu, \varphi)c\big(\varphi_{l+g-1}(\varphi, \mu), \mu, 0\big)$$

породжує інваріантний тор системи рівнянь

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + a(\varphi_n, \mu), \qquad x_{n+1} = P(\varphi_{n+p}, \mu)x_n + c(\varphi_{n+g}, \mu, 0),$$

а функція

$$u_{i+1}(p, g, \mu, \varphi) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} G_0(l, p, \mu, \varphi)c\big(\varphi_{l+g-1}(\varphi, \mu), \mu, u_i(p, g, \mu, \varphi_{l-1}(\varphi, \mu))\big)$$

— інваріантний тор системи рівнянь

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + a(\varphi_n, \mu),$$

$$x_{n+1} = P(\varphi_{n+p}, \mu)x_n + c\big(\varphi_{n+g}, \mu, u_i(p, g, \mu, \varphi_n)\big)$$

при всіх $i \in \{1, 2, 3, \dots\}$.

Як і при доведенні теореми 4, переконуємось, що послідовність $\{u_i(p, g, \mu, \varphi)\}$ при $i \to \infty$ збігається до функції, яка породжує інваріантний тор системи рівнянь (17), причому в умовах теореми 5 цей тор диференційовний на Λ в сенсі Фреше відносно (φ, μ) при всіх $\{p, g\} \subset Z$.

***Зауваження* 2.** В умовах теорем 1 і 2 нерівність (15) справджується автоматично. Наприклад, доведення теореми 1 дозволяє покласти $\lambda_1 = P_1(1 + A^*)$, $M_1(p) = \eta(p) / P_1$. Для існування функції Гріна – Самойленка, визначеної рівністю (9), при всіх $p \in Z$ досить існування її при $p = 0$. Стала M від $p \in Z$ не залежить.

Відзначимо, що достатні умови існування функції Гріна – Самойленка для систем різницевих рівнянь, визначених на торах, наведено, наприклад, у роботах [1, 9].

Застосування одержаних результатів можливе як допоміжний апарат у дослідженні математичних моделей, пов'язаних з рівняннями з частинними похідними, розв'язування яких потребує дослідження зчисленних систем звичайних диференціальних рівнянь (див., наприклад, [10]). Якщо в правій частині лінійної зчисленної диференціальної системи стоять майже періодичні функції вигляду $P(t)$ та існує частотний базис $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$ такий, що $P(t) = P_*(\varphi(t))$, $\varphi(t) = \omega t$, $P_*(\varphi)$ — 2π-періодична по φ^i, $i = 1, 2, 3, \dots$, функція, то цю систему можна вважати визначеною на нескінченновимірному торі, і рівняння, розглянуті в цій статті, є її дискретними аналогами.

На завершення відмітимо, що одержані результати є новими навіть у випадку, коли $x \in R^n$, $\mu \in [\mu_1, \mu_2] \subset R^1$, а p і g дорівнюють нулеві.

1. *Самойленко А. М., Теплинский Ю. В.* Инвариантные торы линейных счетных систем дискретных уравнений, заданных на бесконечномерном торе // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 2. – С. 244 – 251.
2. *Самойленко А. М., Теплинский Ю. В.* Предельные теоремы в теории систем разностных уравнений. – Киев, 1998. – 60 с. – (Препринт // НАН Украины. Ин-т математики; 98.3).
3. *Теплінський Ю. В., Марчук Н. А.* Метод укорочення в дослідженні гладкості інваріантного тора зчисленної системи різницевих рівнянь з параметрами // Зб. наук. праць Кам'янець-Поділ. пед. ун-ту. Сер. мат. – 2000. – Вип. 5. – С. 117 – 126.
4. *Мартинюк Д. І., Верьовкіна Г. В.* Інваріантні множини зліченних систем різницевих рівнянь // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. фіз.-мат. наук. – 1997. – Вип. 1. – С. 117 – 127.
5. *Верьовкіна Г. В.* Про введення локальних координат для зліченної дискретної системи в околі інваріантного тору // Там же. – Вип. 4. – С. 23 – 29.
6. *Самойленко А. М., Теплинский Ю. В.* Счетные системы дифференциальных уравнений. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1993. – 308 с.
7. *Самойленко А. М., Теплинский Ю. В.* О гладкости инвариантного тора счетного линейного расширения динамической системы на m-мерном торе // Дифференц. уравнения. – 1994. – **30**, № 5. – С. 781 – 790.
8. *Шварц Л.* Анализ: В 2 т. – М.: Мир, 1972. – Т. 1. – 824 с.
9. *Латушкин Ю. Д., Степин А. М.* Операторы взвешенного сдвига и линейные расширения динамических систем // Успехи мат. наук. – 1991. – **48**, вып. 2. – С. 85 – 143.
10. *Илюхин А. Г.* Приближенный метод решения смешанной задачи для нелинейного уравнения в частных производных гиперболического типа, содержащего малый параметр // Укр. мат. журн. – 1962. – **14**, № 3. – С. 250 – 259.

Одержано 25.04.2001,
після доопрацювання — 14.02.2002