УДК 517.956

С. А. Алдашев (Казах. акад. трансп. и коммуникаций, Алматы)

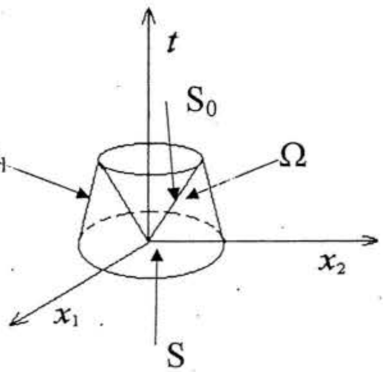
СПЕКТРАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДАРБУ – ПРОТТЕРА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА МНОГОМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

For a multi-dimensional hyperbolic equation with wave operator in the principal part, we show that the spectral Darboux–Protter problem possesses the countable set of eigenfunctions and its conjugate problem is the Volterra problem.

Для багатовимірного гіперболічного рівняння з хвильовим оператором у головній частині показано, що спектральна задача Дарбу – Проттера має зчисленну множину власних функцій, а спряжена до неї – вольтеррова задача.

Двумерные спектральные задачи для гиперболических уравнений в настоящее время интенсивно изучаются [1]. Однако их многомерные аналоги исследованы мало [2].

Пусть Ω — конечная область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1, \ldots, x_m, t)$, ограниченная поверхностями $|x| = t$, $|x| = 1-t$ и плоскостью $t = 0$, где $|x|$ — длина вектора $x = (x_1, \ldots, x_m)$. Части этих поверхностей, образующих границу $\partial\Omega$ области Ω, обозначим через S_0, S_1 и S соответственно (рисунок).



В области Ω рассмотрим взаимно сопряженные многомерные гиперболические уравнения

$$Lu \equiv \Delta_x u - u_{tt} + \sum_{i=1}^{m} a_i(x,t) u_{x_i} + b(x,t) u_t + c(x,t) u = \alpha u, \tag{1}$$

$$L^* v \equiv \Delta_x v - v_{tt} - \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_i v) - \frac{\partial}{\partial t}(bv) + cv = \alpha v, \tag{1*}$$

где Δ_x — оператор Лапласа по переменным $x_1, \ldots, x_m$, $m \geq 2$, α — действительное число.

Рассмотрим следующие спектральные задачи Дарбу–Проттера для уравнений (1) и (1*).

Задача 1. Найти в области Ω решение уравнения (1) из класса $C^1(\overline{\Omega}) \cap \cap C^2(\Omega)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_S = 0, \quad u|_{S_0} = 0, \tag{2}$$

или

$$u_t|_{S_0} = 0, \quad u|_{S_0} = 0. \tag{3}$$

Задача 1*. Найти в области Ω решение уравнения (1*) из класса $C^1(\overline{\Omega}) \cap \cap C^2(\Omega)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$\upsilon|_S = 0, \quad \upsilon|_{S_1} = 0, \tag{2*}$$

или

$$\upsilon_t|_S = 0, \quad \upsilon|_{S_1} = 0. \tag{3*}$$

Далее, от декартовых координат $x_1, \ldots, x_m, t$ перейдем к сферическим $r, \theta_1, \ldots, \theta_{m-1}, t$, сохранив обозначения, использованные в [3, 4].

Пусть $\left\{Y_{n,m}^k(\theta)\right\}$ — система линейно независимых сферических функций порядка n, $1 \le k \le k_n$, $(m-2)!\,n!\,k_n = (n+m-3)!\,(2n+m-2)$, $\theta = (\theta_1, \ldots$ $\ldots, \theta_{m-1})$. Через $\tilde{a}_{in}^k(r,t)$, $\hat{a}_{in}^k(r,t)$, $\tilde{b}_n^k(r,t)$, $\tilde{c}_n^k$, ρ_n^k обозначим коэффициенты разложения ряда по сферическим функциям $\left\{Y_{n,m}^k(\theta)\right\}$ соответственно функций

$$a_i(r,\theta,t)\cdot\rho(\theta), \quad a_1\frac{x_i}{r}\cdot\rho, \quad b(r,\theta,t)\cdot\rho,$$
$$c(r,\theta,t)\cdot\rho, \quad \rho(\theta), \quad i = 1, \ldots, m.$$

Если

$$a_i(x,t), b(x,t), c(x,t) \in W_2^l(\Omega), \quad i = 1, \ldots, m, \quad l \ge m,$$

то справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Задача* 1 *для каждого* α *имеет счетное множество собственных функций.*

Теорема 2. *Для каждого* α *задача* 1* — *вольтеррова.*

***Доказательство теоремы* 1.** Сначала рассмотрим задачу (1), (2). Решение этой задачи будем искать в виде ряда

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\overline{\upsilon}_n^k(r,t)Y_{n,m}^k(\theta), \tag{4}$$

где $\overline{\upsilon}_n^k(r,t)$ — функции, которые будут определены ниже.

Тогда, как в [4], для $\overline{\upsilon}_n^k$ получим ряд

$$\rho_0^1\overline{\upsilon}_{0rr}^1 - \rho_0^1\overline{\upsilon}_{0tt}^1 + \left(\frac{m-1}{r}\rho_0^1\upsilon + \sum_{i=1}^m \hat{a}_{i0}^1\right)\overline{\upsilon}_{0r}^1 + \tilde{b}_0^1\overline{\upsilon}_{0t}^1 + \tilde{c}_0^1\overline{\upsilon}_0^1 - \alpha\rho_0^1\overline{\upsilon}_0^1 +$$
$$+ \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\left\{\rho_n^k\overline{\upsilon}_{nrr}^k - \rho_n^k\overline{\upsilon}_{ntt}^k + \left(\frac{m-1}{r}\rho_n^k + \sum_{i=1}^m\hat{a}_{in}^k\right)\overline{\upsilon}_{nr}^k + \tilde{b}_n^k\overline{\upsilon}_{nt}^k + \right.$$
$$\left. + \left[\tilde{c}_n^k - \lambda_n\frac{\rho_n^k}{r^2} + \sum_{i=1}^m\left(\tilde{a}_{in-1}^k - n\hat{a}_{in}^k\right)\right]\overline{\upsilon}_n^k - \alpha\rho_n^k\overline{\upsilon}_n^k\right\} = 0, \tag{5}$$
$$\lambda_n = n(n+m-2).$$

Далее, из краевого условия (2) в силу (4) будем иметь

$$\overline{v}_n^k(r,0) = 0, \quad \overline{v}_n^k(r,r) = 0, \quad k = \overline{1,k_n}, \quad n = 0,1,\ldots, \quad 0 \le r \le 1. \tag{6}$$

Теперь рассмотрим бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$\rho_0^1 \overline{v}_{0rr}^1 - \rho_0^1 \overline{v}_{0tt}^1 + \frac{m-1}{r}\rho_0^1 \overline{v}_{0r}^1 = \alpha\rho_0^1 \overline{v}_0^1, \tag{7}$$

$$\rho_1^k \overline{v}_{1rr}^k - \rho_1^k \overline{v}_{1tt}^k + \frac{m-1}{r}\rho_1^k \overline{v}_{1r}^k + \frac{\lambda_1}{r^2}\rho_1^k \overline{v}_1^k =$$

$$= \alpha\rho_1^k \overline{v}_1^k - \frac{1}{k_1}\left(\sum_{i=1}^m \hat{a}_{i0}^1 \overline{v}_{0r}^1 + \tilde{b}_0^1 \overline{v}_{0t}^1 + \tilde{c}_0^1 \overline{v}_0^1\right), \tag{8}$$

$$n = 1, \quad k = \overline{1,k_1},$$

$$\rho_n^k \overline{v}_{nrr}^k - \rho_n^k \overline{v}_{ntt}^k + \frac{m-1}{r}\rho_n^k \overline{v}_{nr}^k + \frac{\lambda_n}{r^2}\rho_n^k \overline{v}_n^k =$$

$$= \alpha\rho_n^k \overline{v}_n^k - \frac{1}{k_n}\sum_{k=1}^{k_{n-1}}\left\{\sum_{i=1}^m \hat{a}_{in-1}^k \overline{v}_{n-1r}^k + \tilde{b}_{n-1}^k \overline{v}_{n-1t}^k + \right.$$

$$\left. + \left[\tilde{c}_{n-1}^k + \sum_{i=1}^m \left(\hat{a}_{in-2}^k - (n-1)\hat{a}_{in-1}^k\right)\right]\overline{v}_{n-1}^k\right\}, \tag{9}$$

$$k = \overline{1,k_n}, \quad n = 2,3,\ldots.$$

Нетрудно показать, что если $\{v_n^k\}$, $k = \overline{1,k_n}$, $n = 0, 1, \ldots$, — решение системы (7) – (9), то оно является решением уравнения (5).

Таким образом, задача (1), (2) сведена к системе задач Дарбу для уравнений (7) – (9). Будем искать решение этих задач.

Нетрудно заметить, что каждое уравнение системы (7) – (9) можно представить в виде

$$\overline{v}_{nrr}^k - \overline{v}_{ntt}^k + \frac{m-1}{r}\overline{v}_{nr}^k + \frac{\lambda_n}{r^2}\overline{v}_n^k = \alpha\overline{v}_n^k + \bar{f}_n^k(r,t), \tag{10}$$

где $\bar{f}_n^k(r,t)$ определяются из предыдущих уравнений этой системы, при этом $\bar{f}_0^k(r,t) \equiv 0$. В (10), выполнив замену переменных $\overline{v}_n^k(r,t) = r^{(1-m)/2}v_n^k(r,t)$ и положив затем $\xi = (r+t)/2$, $\eta = (r-t)/2$, получим

$$v_{n\xi\eta}^k + \frac{[(m-1)(3-m) - 4\lambda_n]}{4(\xi+\eta)^2}v_n^k = \alpha v_n^k + f_n^k(\xi,\eta), \tag{11}$$

$$f_n^k(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(\xi+\eta)^{\frac{m-1}{2}}\bar{f}_n^k(\xi+\eta,\xi-\eta),$$

при этом краевое условие (6) примет вид

$$v_n^k(\xi,\xi) = \tau_n^k(\xi) = 0, \quad v_n^k(\xi,0) = 0,$$

$$k = \overline{1,k_n}, \quad n = 0,1,\ldots, \quad 0 \le \xi \le \frac{1}{2}. \tag{12}$$

Теперь в области $D \subset E_2$, ограниченной прямыми $\xi = \eta$, $\xi = 1/2$, $\eta = 0$, рассмотрим уравнение

$$Mu \equiv u_{\xi\eta} + c(\xi,\eta)u = f(\xi,\eta), \qquad c(\xi,\eta), f(\xi,\eta) \in C(D).$$

Тогда для произвольных $u(\xi_1,\eta_1), v(\xi_1,\eta_1) \in C^2(D)$ имеет место тождество [5]

$$2[vMu - uMv] = \frac{\partial}{\partial\eta_1}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi_1}v - u\frac{\partial v}{\partial\xi_1}\right) - \frac{\partial}{\partial\xi_1}\left(\frac{\partial u}{\partial\eta_1}v - u\frac{\partial v}{\partial\eta_1}\right). \tag{13}$$

Интегрируя тождество (13) по области D, находим

$$2\iint_D (vMu - uMv)\, d\xi_1\, d\eta_1 = \int_{\partial D}\left(\frac{\partial u}{\partial\eta_1}v - u\frac{\partial v}{\partial\eta_1}\right)d\eta_1 - \int_{\partial D}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi_1}v - u\frac{\partial v}{\partial\xi_1}\right)d\xi_1. \tag{14}$$

Пусть $u(\xi_1,\eta_1)$ — решение уравнения (11), а

$$v(\xi_1,\eta_1) = R(\xi_1,\eta_1,\xi,\eta) = P_\mu\left[\frac{(\xi_1-\eta_1)(\xi-\eta) + 2(\xi_1\eta_1+\xi\eta)}{(\xi_1+\eta_1)(\xi+\eta)}\right] = P_\mu(z)$$

— функция Римана уравнения

$$v^k_{n\xi\eta} + \frac{[(m-1)(3-m) - 4\lambda_n]}{4(\xi+\eta)^2}v^k_n = 0,$$

$P_\mu(z)$ — функция Лежандра, $\mu = n + (m-3)/2$. Тогда в силу свойства функции Римана [5] из (14) после интегрирования по частям получим

$$v^k_n(\xi,\eta) = \frac{1}{2}\tau^k_n(\eta)R(\eta,\eta;\xi,\eta) + \frac{1}{2}\tau^k_n(\xi)R(\xi,\xi;\xi,\eta) +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2}}\int_\eta^\xi\left[\nu^k_n(\xi_1)R(\xi_1,\xi_1;\xi,\eta) - \tau^k_n(\xi_1)\frac{\partial}{\partial N}R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)\bigg|_{\xi_1=\eta_1}\right]d\xi_1 +$$

$$+ \int_{1/2}^{\xi}\int_0^{\eta}\left[\alpha v^k_n(\xi_1,\eta_1) + f^k_n(\xi_1,\eta_1)\right]R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)\,d\xi_1\,d\eta_1. \tag{15}$$

Из (15) при $\eta = 0$, использовав краевые условия (12), получим интегральное уравнение Вольтерра первого рода

$$0 = \int_0^\xi \nu^k_n(\xi_1)P_\mu\left(\frac{\xi_1}{\xi}\right)d\xi_1, \quad 0 \le \xi \le \frac{1}{2}. \tag{16}$$

В [3] доказано, что уравнение (16) в классе $C([0,1/2])$ при $\mu \ge 2$ имеет нетривиальные решения вида

$$\nu^k_n(\xi) = \xi^\beta, \quad \beta = \mu - 2(s+1) \ge 0, \quad s = 0,1,\dots, \tag{17}$$

и ненулевое решение, если $-1/2 \le \mu \le 2$. Подставив (17) в (15), будем иметь интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$v^k_n(\xi,\eta) = \alpha\int_{1/2}^{\xi}\int_0^{\eta} v^k_n(\xi_1,\eta_1)P_\mu(z)\,d\xi_1\,d\eta_1 + F^k_n(\xi,\eta),$$

$$F^k_n(\xi,\eta) = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_\eta^\xi \xi_1^\beta P_\mu\left[\frac{\xi_1^2+\xi\eta}{\xi_1(\xi+\eta)}\right]d\xi_1 + \int_{1/2}^{\xi}\int_0^{\eta} f^k_n(\xi_1,\eta_1)P_\mu(z)\,d\xi_1\,d\eta_1. \tag{18}$$

Следовательно, сначала решив задачу (7), (6) $(n = 0)$, а затем (8), (6) $(n = 1)$ и т. д., найдем последовательно все $\overline{v}_n^k(r,t)$, $k = \overline{1, k_n}$, $n = 0, 1, \ldots$, при этом

$$\overline{v}_n^k(r,t) \equiv 0, \qquad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, 2,$$

и

$$\overline{v}_n^k(r,t) \neq 0, \qquad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 3, 4, \ldots .$$

Таким образом, задача (1), (2) имеет нетривиальные решения вида

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=3}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} n^{-l} r^{\frac{1-m}{2}} v_n^k(r,t) Y_{n,m}^k(\theta), \tag{19}$$

где $v_n^k(r,t)$ определяются из (18), причем

$$\beta = \mu - 2(s+1) \geq \frac{m-1}{2}, \quad s = 0, 1, \ldots .$$

Как и в [4], можно показать, что полученное решение (19) принадлежит классу $C^1(\overline{\Omega}) \bigcap C^2(\Omega)$, если $l > 3m/2$.

Далее, используя результаты [3, с. 14] (утверждение 1), можно показать, что задача (1), (3) также имеет ненулевые решения вида (19), где $v_n^k(\xi, \eta)$ определяются из интегрального уравнения (18), в котором функции $F_n^k(\xi, \eta)$ представимы в виде

$$F_n^k(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(\xi^\beta + \eta)^\beta - \frac{\xi - \eta}{2(\xi + \eta)} \int_\eta^\xi \xi_1^\beta P'_\mu \left[\frac{\xi_1^2 + \xi\eta}{\xi_1(\xi + \eta)} \right] d\xi_1 +$$
$$+ \int_{1/2}^{\xi} \int_0^{\eta} f_n^k(\xi_1, \eta_1) P_\mu(z)\, d\xi_1\, d\eta_1, \tag{20}$$
$$\beta = \mu - 2s > \frac{m+3}{2}, \quad s = 0, 1, \ldots .$$

Из (18) – (20) видно, что для каждого α собственные функции задачи 1 образуют счетное множество.

Таким образом, теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Сначала докажем единственность решения задачи (1*), (2*). Для этого построим $u(r, \theta, t)$ — решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_s = \tau(r, \theta) = \overline{\tau}_n^1(r) Y_{n,m}^1(\theta), \quad u|_{s_0} = 0, \quad \overline{\tau}_n^1(r) \in V, \tag{21}$$

где V — множество функций $\overline{\tau}(r)$ из класса $C^1(0 \leq r \leq 1) \bigcap C^2(0 < r < 1)$. Очевидно, что множество V плотно всюду в $L_2((0,1))$. Функцию $u(r, \theta, t)$ будем искать в виде ряда (4). Тогда для функций $v_n^k(\xi, \eta)$ получим уравнение (11) с краевыми условиями

$$\begin{aligned}
&v_n^1(\xi, \xi) = \tau_n^1(\xi), && v_n^1(\xi, 0) = 0, && \\
&v_n^k(\xi, \xi) = 0, && v_n^k(\xi, 0) = 0, && k = \overline{2, k_n}, \\
&v_{n'}^k(\xi, \xi) = 0, && v_{n'}^k(\xi, 0) = 0, && k = \overline{1, k_{n'}}, \quad n' = 0, 1, \ldots,
\end{aligned} \tag{22}$$
$$n' \neq n, \qquad \tau_n^1(\xi) = (2\xi)^{\frac{m-1}{2}} \overline{\tau}_n^1(2\xi).$$

Из уравнения (15) при $\eta = 0$ с учетом краевых условий (22) получим интегральные уравнения Вольтерра первого рода

$$\int_0^{\xi} \nu_n^1(\xi_1) P_\mu\left(\frac{\xi_1}{\xi}\right) d\xi_1 = g_n^1(\xi), \tag{23}$$

$$\int_0^{\xi} \nu_n^k(\xi_1) P_\mu\left(\frac{\xi_1}{\xi}\right) d\xi_1 = 0, \quad k = \overline{2, k_n}, \quad \mu = n + \frac{m-3}{2},$$

$$\int_0^{\xi} \nu_{n'}^k(\xi_1) P_{\mu'}\left(\frac{\xi_1}{\xi}\right) d\xi_1 = 0, \quad \mu' = n' + \frac{m-3}{2}, \tag{16'}$$

$$g_n^1(\xi_1) = -\frac{\tau_n^1(\xi)}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\xi} \frac{\tau_{n'}^1(\xi_1)}{\xi_1} P'_{\mu'}\left(\frac{\xi_1}{\xi}\right) d\xi_1.$$

В [3] доказано, что уравнение (23) в классе $C([0, 1/2])$ имеет бесчисленное множество решений.

Таким образом, все $\nu_n^k(\xi)$ известны, при этом $\nu_n^1(\xi)$ находится из (23), а остальные $\nu_n^k(\xi)$, $k = \overline{2, k_n}$, $\nu_{n'}^k(\xi)$, $k = \overline{1, k_n}$, $n' \neq n$, представимы в виде (17). Следовательно, функция вида (16′) является решением задачи (1), (21), где $v_n^k(r, t)$ определяются из (18).

Решение задачи (1), (20) построено.

Решение задачи (1), (20), в котором $\tau(\tau, \theta) = \overline{\tau}_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta)$, строится аналогично.

Из определения сопряженных операторов [6]

$$vLu - uL^*v = -uP(u) + uP(v) - uvQ,$$

где

$$P(u) = \sum_{i=1}^{m} u_{x_i} \cos(N', x_i) - u_t \cos(N', t),$$

$$Q = \sum_{i=1}^{m} a_i \cos(N', x_i) - b \cos(N', t),$$

а N' — внутренняя нормаль к границе $\partial\Omega$, по формуле Грина имеем

$$\int_\Omega (vLu - uL^*v)\, d\Omega = \int_{\partial\Omega} \left[\left(v\frac{\partial u}{\partial N} - u\frac{\partial v}{\partial N}\right) M + uvQ\right] ds, \tag{24}$$

где $\partial / \partial N$ — конормаль к $\partial\Omega$, а

$$M^2 = \sum_{i=1}^{m} \cos^2(N', x_i) + \cos^2(N', t).$$

Из (24), принимая во внимание граничные условия (2*) и тот факт, что на характеристических конусах S_0 и S_1 конормальные производные $\partial / \partial N$ совпадают с производной по касательному направлению [6], получаем

$$\int_S \tau(r, \theta) v_t(r, 0, \theta)\, dS = 0. \tag{25}$$

Поскольку линейная оболочка системы функций $\left\{\bar{\tau}_n^k(r)Y_{n,m}^k(\theta)\right\}$ плотна в $L_2(S)$, то из (25) заключаем, что $\upsilon_t(x, 0) = 0 \;\; \forall\, x \in S$. Следовательно, в силу единственности решения задачи Коши $\upsilon(x, 0) = 0$, $\upsilon_t(x, 0) = 0$ для уравнения (1*) будем иметь $\upsilon(x, t) = 0 \;\; \forall\,(x, t) \in \Omega$.

Таким образом, единственность решения задачи (1*), (2*) доказана. Единственность решения задачи (1*), (3*) устанавливается аналогично.

Теперь перейдем к построению решения задачи 1*.

Если решение задачи (1*), (2*) искать в виде ряда (4), то она сведется к задаче Дарбу в области D для уравнения (11) с данными

$$\upsilon_n^k(\xi, \xi) = 0, \qquad \upsilon_n^k\left(\frac{1}{2}, \eta\right) = \psi_n^k(\xi) = 0, \tag{26}$$

$$0 \le \xi \le \frac{1}{2}, \qquad 0 \le \eta \le \frac{1}{2},$$

решение которой имеет вид [7]

$$\upsilon_n^k(\xi, \eta) = -\int_\xi^{1/2} d\xi_1 \int_\eta^{\xi_1}\left[\alpha \upsilon_n^k(\xi_1, \eta_1) + f_n^k(\xi_1, \eta_1)\right] G_n(\xi, \eta; \xi_1, \eta_1)\, d\xi_1\, d\eta_1, \tag{27}$$

$$G_n(\xi, \eta; \xi_1, \eta_1) = P_\mu\left[\frac{2(\xi\eta + \xi_1\eta_1) + (\xi - \eta)(\xi_1 - \eta_1)}{(\xi_1 + \eta_1)(\xi + \eta)}\right] +$$

$$+ \frac{1 - \operatorname{sgn}(\xi - \eta_1)}{2} P_\mu\left[\frac{2(\xi\eta + \xi_1\eta_1) - (\xi - \eta)(\xi_1 - \eta_1)}{(\xi_1 + \eta_1)(\xi + \eta)}\right],$$

$$G_n(\xi, \eta; \xi_1, \eta_1) \in C(D^2), \qquad D^2 = \overline{D} \times \overline{D}.$$

Если $n = 0$, $k = 1$, $f_0^1(\xi_1, \eta_1) \equiv 0$, то из (27) имеем однородное интегральное уравнение второго рода

$$\upsilon_0^1(\xi, \eta) = -\alpha \int_\xi^{1/2} d\xi_1 \int_\eta^{\xi_1} \upsilon_0^1(\xi_1, \eta_1) G_0(\xi, \eta; \xi_1, \eta_1)\, d\xi_1\, d\eta_1. \tag{28}$$

Уравнение (28) удобно записать в виде

$$\upsilon_0^1 = F\left(\upsilon_0^1\right). \tag{29}$$

Интегральный оператор F осуществляет отображение полного метрического пространства $C(\overline{D})$ с нормой $\left\|\upsilon_0^1\right\| = \max\limits_{\overline{D}}\left|\upsilon_0^1(\xi, \eta)\right|$ в себя. Легко видеть, что для υ_0^1 справедлива оценка

$$\left|F\left(\upsilon_0^1\right)\right| = \left|\alpha \int_\xi^{1/2}\int_\eta^{\xi_1} \upsilon_0^1(\xi_1, \eta_1) G_0(\xi, \eta; \xi_1, \eta_1)\, d\xi_1\, d\eta_1\right| \le$$

$$\le |\alpha| M \left\|\upsilon_0^1\right\| \left|\frac{1}{2} - \xi\right| \left|\frac{1}{2} - \eta\right|,$$

$$M = \max_{D^2}\left|G_0(\xi, \eta; \xi_1, \eta_1)\right|.$$

Далее, ясно, что

$$\left|F^2\left(\upsilon_0^1\right)\right| \le |\alpha|^2 M^2 \frac{\left|\frac{1}{2} - \xi\right|^2 \left|\frac{1}{2} - \eta\right|^2}{2!} \left\|\upsilon_0^1\right\|.$$

Продолжая процесс, получаем

$$\left|F^p\left(v_0^1\right)\right| \le |\alpha|^p M^p \frac{\left|\frac{1}{2}-\xi\right|^p \left|\frac{1}{2}-\eta\right|^p}{p!} \left\|v_0^1\right\|,$$

где F^p — p-я степень оператора F. Отсюда видно, что можно подобрать такое p, что

$$\left|F^p\left(v_0^1\right)\right| \le C\left\|v_0^1\right\|, \quad C = \text{const} < 1. \tag{30}$$

Неравенство (30) означает, что оператор F^p является сжимающим. Следовательно, оператор F [8] имеет единственную неподвижную точку. Эта неподвижная точка и есть решение уравнения (29), т. е. (28).

Решая уравнение (28), находим $v_0^1(\xi,\eta) \equiv 0$, откуда следует $f_1^k(\xi,\eta) \equiv 0$, $n = 1$, $k = \overline{1, k_1}$. Теперь, рассматривая (27) при $n = 1$, $k = \overline{1, k_1}$, аналогично получаем $v_1^k(\xi,\eta) \equiv 0$, $k = \overline{1, k_1}$, и т. д.

Таким образом, доказано, что решение задачи (11), (26)

$$v_n^k(\xi,\eta) \equiv 0, \quad k = \overline{1, k_1}, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

означает, что решение задачи (1*), (2*) в виде (4) $u(r,\theta,t) \equiv 0$.

Перейдем к решению задачи (1*), (3*). Если его искать в виде ряда (4), то получим задачу Дарбу в области D для уравнения (11) с краевыми условиями

$$\left.\left(\frac{\partial v_n^k}{\partial\xi} - \frac{\partial v_n^k}{\partial\eta}\right)\right|_{\xi=\eta} = 0, \quad v_n^k\left(\frac{1}{2},\eta\right) = 0, \quad 0 \le \eta \le \frac{1}{2}, \tag{31}$$

решение которой представимо в виде (27), где в $G_n(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)$ вместо $(\mathrm{sgn}(\xi - \eta_1) - 1)/2$ взято $(1 - \mathrm{sgn}(\xi - \eta_1))/2$.

Следовательно, как и в случае задачи (11), (26), устанавливаем, что решение задачи (11), (31) $v_n^k(\xi,\eta) \equiv 0$, $k = \overline{1, k_n}$, $n = 0, 1, \ldots$, а значит, и решение задачи (1*), (3*) в виде (4) $u(r,\theta,t) \equiv 0$.

Теорема 2 доказана.

1. *Моисеев Е. И.* Уравнения смешанного типа со спектральным параметром. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988. – 150 с.
2. *Кукенов Г. М., Садыбеков М. А.* Спектральные свойства одной краевой задачи для двумерного уравнения // Тез. докл. научн. конф. „Краевые задачи и их спектральные вопросы для дифференциальных уравнений" (Алма-Ата, 22 – 25 мая 1991 г.) – Алма-Ата, 1991. – С. 127.
3. *Алдашев С. А.* Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений. – Алматы: Гылым, 1994. – 170 с.
4. *Алдашев С. А.* О задачах Дарбу для одного класса многомерных гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. – 1998. – **34**, № 1. – С. 1 – 5.
5. *Бицадзе А. В.* Уравнения смешанного типа. – М.: Изд-во АН СССР, 1959. – 164 с.
6. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики: В 5 т. – М.: Наука, 1981. – Т. 4. – 550 с.
7. *Ли В.* О некоторых пространственных задачах типа Гурса: Дис. ... канд.-физ-мат. наук. – Алматы, 1996. – 81 с.
8. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977. – 741 с.

Получено 12.03.2001