УДК 517.948

И. В. Воробьев (Харьков. нац. ун-т)

РАЗЛОЖЕНИЕ ПО ОБОБЩЕННЫМ СОБСТВЕННЫМ ВЕКТОРАМ И ДИАГОНАЛИЗАЦИЯ САМОСОПРЯЖЕННОГО АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНОГО СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

We describe the relation between the expansion of a self-adjoint operator in generalized eigenvectors and the direct integral of Hilbert spaces. We perform the explicit diagonalization of a self-adjoint absolutely continuous singular integral operator Y by means of Hermitian nonnegative kernel consisting of boundary values of the determining function of the operator $T=X+iY$ with respect to the resolvent of imaginary part of Y.

Описано зв'язок між розкладанням самоспряженого оператора за узагальненими власними векторами та прямим інтегралом гільбертових просторів. Проведено явну діагоналізацію самоспряженого абсолютно неперервного сингулярного інтегрального оператора Y за допомогою ермітово-невід'ємного ядра, складеного із межових значень визначальної функції оператора $T=$ $=X+iY$ відносно резольвенти уявної частини Y.

В настоящей статье изучаются линейные ограниченные операторы в комплексных сепарабельных гильбертовых пространствах. Под обратимостью оператора понимается существование ограниченного обратного.

Сначала установим связь теории разложений по обобщенным собственным векторам самосопряженного оператора Y [1, 2] с прямым интегралом гильбертовых пространств [3], в котором Y является диагональным. Опишем структуру этого прямого интеграла гильбертовых пространств.

Пусть $Y=\int_{\sigma(Y)} y\,dE(y)$ — спектральное разложение самосопряженного оператора Y, действующего в некотором гильбертовом пространстве H. Тогда существует последовательность циклических векторов [1] $\{k_j\}_{j=1}^{n}$ и разложение пространства H в ортогональную сумму $H=\bigoplus_{j=1}^{n} H_{k_j}$ приводящих оператор Y подпространств $H_{k_j}=\operatorname{span}\{Y^l k_j,\ l\geq 0\}$, [2] для которых при $j=2,\ldots,n$ меры $\|E(\Delta)k_j\|_H^2$, определенные на борелевских подмножествах Δ вещественной оси, абсолютно непрерывны относительно $\|E(\Delta)k_{j-1}\|_H^2$, причем k_1 — элемент максимального типа, т. е. условия $\|E(\Delta)k_1\|_H^2=0$ и $E(\Delta)=0$ равносильны [3] (см. теорему 7 [3, с. 168] и теорему 4 [3, с. 175]). Это означает, что последовательность замкнутых борелевских множеств $\Delta_j=\sigma\left(Y|_{H_{k_j}}\right)$, $j=1,\ldots,n$, являющихся носителями мер $\|E(\Delta)k_j\|_H^2$, имеет свойство $\sigma(Y)=\Delta_1\supset\Delta_2\supset\ldots\supset\Delta_n$. Число $n\leq\infty$ в данном случае называется общей спектральной кратностью оператора Y. Из теоремы Лебега о разложении мер (теорема 5.1 [2, с. 146]) следует, что существует σ-конечная мера $\mu(\Delta)$, эквивалентная $\|E(\Delta)k_1\|_H^2$, такая, что $d\mu(y)=dy+d\nu(y)$, где ν — сингулярная мера. Тогда существует унитарное отображение W, действующее из H на прямой интеграл гильбертовых пространств

---

1 В литературе также употребляется термин „порождающий элемент".

2 Здесь span обозначает замкнутую линейную оболочку.

3 Данные рассуждения теряют силу для несепарабельного H (см. сноску в [3, с. 167]).

$$\hat{H} = \bigoplus_{j=1}^{n} L^2(\Delta_j, \mu) = \int_{\sigma(Y)} \oplus \hat{H}(y)\, d\mu(y), \tag{1}$$

такое, что оператор $\hat{Y} = WYW^*$ является диагональным, т. е.

$$(\hat{Y}g)(y) = yg(y) \quad \forall g \in \hat{H} \tag{2}$$

(теорема 1 [3, с. 174]). Здесь $\hat{H}(y) \subset l^2$ $\forall y \in \sigma(Y)$, при этом $\dim \hat{H}(y) = n(y) = j$, если $y \in \Delta_j \backslash \Delta_{j+1}$ $(\Delta_{n+1} = \varnothing)$, и $n(y)$ называется функцией спектральной кратности оператора Y. Если $d\mu(y) = dy$ $(d\mu(y) = d\nu(y))$, то оператор Y называется абсолютно непрерывным (соответственно сингулярным) (ср. с [4]). Из данного построения следует, что спектр сингулярного оператора имеет нулевую меру Лебега.

Следующая теорема обобщает результаты [5] на случай, когда оператор Y не обязательно абсолютно непрерывный, и является аналогом теоремы V.2.2 [1].

Теорема 1. *Пусть $W: H \to \hat{H}$ — указанное выше диагонализирующее отображение и $\omega_j(y) = \dfrac{d}{d\mu(y)} \| E(y)k_j \|_H^2$, $j = 1, \ldots, n$, — производные Радона–Никодима. Тогда для всех $y \in \sigma(Y)$ справедливо тождество*

$$\frac{d}{d\mu(y)} \langle E(y) f_1, f_2 \rangle_H = \langle (Wf_1)(y), (Wf_2)(y) \rangle_{\hat{H}(y)} \quad \forall f_{1,2} \in H, \tag{3}$$

при этом $W = \bigoplus_{j=1}^{n} W_j$, где унитарные отображения $W_j: H_{k_j} \to L^2(\Delta_j, \mu)$ определяются из следующих двух эквивалентных соотношений [4]:

$$(W_j Y^l k_j)(y) = y^l \sqrt{\omega_j(y)} \quad \forall l \ge 0, \quad \forall y \in \Delta_j, \tag{4}$$

$$(W_j f)(y) = [\omega_j(y)]^{-1/2} \frac{d}{d\mu(y)} \langle E(y) f, k_j \rangle_H \quad \forall f \in H, \quad \forall y \in \Delta_j. \tag{5}$$

Поэтому $\varphi_j(y) = [\omega_j(y)]^{-1/2} \dfrac{d}{d\mu(y)} E(y) k_j$ являются системой обобщенных собственных векторов оператора Y для каждого $y \in \sigma(Y)$, определяющих „преобразование Фурье" (5) вектора $f \in H$ и порождающих обобщенное собственное подпространство размерности $n(y)$. [5]

Доказательство. Поскольку из (4) для всех $l, m \ge 0$

$$\langle W_j Y^l k_j, W_j Y^m k_j \rangle_{L^2(\Delta_j, \mu)} = \int_{\Delta_j} y^{l+m} \omega_j(y)\, d\mu(y) = \langle Y^l k_j, Y^m k_j \rangle_H,$$

и для всех $x \in \Delta_j$

$$(W_j Y W_j^*)(y^l \sqrt{\omega_j(y)}) = (W_j Y^{l+1} k_j)(y) = y^{l+1} \sqrt{\omega_j(y)},$$

в силу цикличности векторов k_j и плотности полиномов от y в пространстве $L^2(\Delta_j, \mu)$ отображения W_j из (4) действительно определяют надлежащее диагонализирующее отображение $W = \bigoplus_{j=1}^{n} W_j$.

---

[4] Формулы (3) и (5) также будут иметь место и для неограниченного Y, поскольку вместо Y всегда можно рассмотреть ограниченный оператор $\operatorname{arctg} Y$ и применить к нему последующие рассуждения [6, с. 374].

[5] Аналогичные результаты получены с помощью гильбертовых оснащений в [2, с. 528–530].

Проверим эквивалентность определений (4) и (5). Очевидно, что в (5) достаточно рассматривать элементы вида $f = Y^l k_j \quad \forall l \geq 0$. Из спектрального разложения оператора Y и определения $\omega_j(y)$ для любого борелевского подмножества Δ вещественной оси и любого $l \geq 0$ имеем

$$\langle E(\Delta) Y^l k_j, k_j \rangle_H = \int\limits_{\Delta \cap \Delta_j} y^l \omega_j(y) d\mu(y).$$

Это означает, что существует производная Радона – Никодима, причем выполняется тождество $\left[\omega_j(y)\right]^{-1/2} \dfrac{d}{d\mu(y)} \left\langle E(y) Y^l k_j, k_j \right\rangle_H = y^l \sqrt{\omega_j(y)} \quad \forall y \in \Delta_j$. Таким образом, определения (4) и (5) эквивалентны.

Из (4) и (5) следует, что для всех $y \in \Delta_j$, комплексных $c_{1,2}$ и $l, m \geq 0$

$$\frac{d}{d\mu(y)} \left\langle E(y) c_1 Y^l k_j, c_2 Y^m k_j \right\rangle_H = c_1 \overline{c_2}\, y^{l+m} \omega_j(y) =$$

$$= \frac{1}{\omega_j(y)} \frac{d}{d\mu(y)} \left\langle E(y) c_1 Y^l k_j, k_j \right\rangle \overline{\frac{d}{d\mu(y)} \left\langle E(y) c_2 Y^m k_j, k_j \right\rangle_H}.$$

Это соотношение, в свою очередь, означает, что

$$\frac{d}{d\mu(y)} \langle E(y) f_1, f_2 \rangle_H = (W_j f_1)(y) \overline{(W_j f_2)(y)} \qquad \forall f_{1,2} \in H_{k_j}, \quad \forall y \in \Delta_j. \tag{6}$$

Обозначим через P_j ортопроектор из H на H_{k_j}. Тогда

$$\frac{d}{d\mu(y)} \langle E(y) f_1, f_2 \rangle_H = \sum_{j=1}^{n} \frac{d}{d\mu(y)} \left\langle E(y) P_j f_1, P_j f_2 \right\rangle_H \qquad \forall f_{1,2} \in H, \quad \forall y \in \sigma(Y).$$

Из свойства вложения множеств Δ_j, являющихся носителями соответствующих мер, следует $\dfrac{d}{d\mu(y)} \left\langle E(y) P_j f_1, P_j f_2 \right\rangle_H = 0$ для всех $y \in \sigma(Y) \setminus \Delta_j$, т. е. для всех $j > n(y)$. Таким образом, из (6) имеем

$$\frac{d}{d\mu(y)} \langle E(y) f_1, f_2 \rangle_H = \sum_{j=1}^{n(y)} (W_j f_1)(y) \overline{(W_j f_2)(y)} \qquad \forall f_{1,2} \in H, \quad \forall y \in \sigma(Y). \tag{7}$$

Это покомпонентная запись (3). Теорема доказана.

Пусть $\hat{E}(y)$ — спектральная мера оператора $\hat{Y}$ (2). Поскольку для любого борелевского подмножества Δ вещественной оси и любых $g_{1,2} \in \hat{H}$

$$\left\langle \hat{E}(\Delta) g_1, g_2 \right\rangle_{\hat{H}} = \int\limits_{\Delta \cap \sigma(Y)} \langle g_1(y), g_2(y) \rangle_{\hat{H}(y)} d\mu(y),$$

то $\dfrac{d}{d\mu(y)} \left\langle \hat{E}(y) g_1, g_2 \right\rangle_{\hat{H}} = \langle g_1(y), g_2(y) \rangle_{\hat{H}(y)} \quad \forall y \in \sigma(Y)$. Это означает, что $\dfrac{d}{d\mu(y)} \hat{E}(y)$ является оператором умножения на дельта-функцию в пространстве $\hat{H}$ для почти всех вещественных y относительно меры Лебега.

В случае, когда Y имеет изолированное собственное значение y,

$$[\mu(y) - \mu(y-0)] \frac{d}{d\mu(y)} E(y) = E(y) - E(y-0)$$

является ортопроектором на собственное подпространство оператора Y, порожденное собственными векторами, соответствующими y (см. [6, с. 384]). Это обстоятельство позволяет записать разложение произвольного ограниченного самосопряженного оператора Y с чисто точечным спектром, состоящим из не более чем счетного числа собственных значений λ_l, в терминах полной ортонормированной системы его собственных векторов $Y = \sum_l \lambda_l \varphi_l \langle \cdot, \varphi_l \rangle_H$ [6] (см. [6, с. 385]). Сходимость данного ряда тривиально следует из ограниченности последовательности $\{\lambda_l\}$ и канонического разложения произвольного вектора $f \in H$ по ортонормированному базису [2, с. 236].

Пусть теперь пространство H имеет вид

$$H = \int\limits_{\sigma(X)} \oplus H(x)\,dx, \tag{8}$$

где $H(x) \subset l^2$ $\forall x \in \sigma(X)$, и X является самосопряженным абсолютно непрерывным оператором умножения на независимую переменную

$$(Xf)(x) = xf(x) \qquad \forall f \in H. \tag{9}$$

Тогда, используя указанное выше разложение, легко видеть, что любой самосопряженный оператор $C: H \to H$ с чисто точечным спектром может быть представлен в виде [7]

$$(Cf)(x) = \frac{1}{\pi}\alpha^*(x)\sigma \int\limits_{\sigma(X)} \alpha(t) f(t)\,dt \qquad \forall f \in H, \tag{10}$$

где $\alpha_{lj}(t) = (\pi|\lambda_l|)^{1/2}\overline{\varphi_{lj}(t)}$ — компоненты матрицы $\alpha(t)$ и $\sigma = \operatorname{diag}(\operatorname{sign}\lambda_l)$. Если мы введем отображение K, действующее из пространства $D \subset l^2$ ($\dim D = \operatorname{Rank} C$) в H, полагая

$$(Ka)(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\alpha^*(x)a \qquad \forall a \in D, \tag{11}$$

то легко видеть, что сопряженное отображение $K^*: H \to D$ имеет вид

$$K^* f = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\sigma(X)} \alpha(t) f(t)\,dt \qquad \forall f \in H, \tag{12}$$

при этом из (10) получим $C = K\sigma K^*$.

Поскольку оператор $|C|$ имеет те же собственные функции $\varphi_l(x)$ и его собственные значения равны $|\lambda_l|$, то $|C| = KK^*$. Из тождества $\left\| |C|^{1/2} f \right\|_H^2 = \left\| K^* f \right\|_D^2$ $\forall f \in H$ следует $\| |C| \|_H = \left\| |C|^{1/2} \right\|_H^2 = \left\| K^* \right\|_D^2$. Таким образом, непосредственно из определения $\|K\|_H$ получаем

$$\| |C| \|_H = \|K\|_H^2 = \left\| K^* \right\|_D^2 = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\sigma(X)} \|\alpha(t)\|_{l^2}^2\,dt < \infty. \tag{13}$$

Из (13) и неравенства Коши – Буняковского имеем оценку

[6] В случае компактного оператора Y этот ряд также называют рядом Шмидта [7].

[7] Это стандартное представление, которое ранее использовалось, например, в [7 – 9], $\varphi_{lj}(t)$ — j-я компонента собственной функции $\varphi_l(t)$, $j = 1, \ldots, \dim H(t)$. Требование абсолютной непрерывности X в данном случае несущественно.

$$\left(\int_{\sigma(X)} \|\alpha(t)f(t)\|_{l^2}\,dt\right)^2 \le \left(\int_{\sigma(X)} \|\alpha(t)\|_{l^2}\|f(t)\|_{l^2}\,dt\right)^2 \le$$

$$\le \int_{\sigma(X)} \|\alpha(t)\|_{l^2}^2\,dt \int_{\sigma(X)} \|f(t)\|_{l^2}^2\,dt = \pi\||C\||_H\|f\|_H^2 \quad \forall f\in H,$$

которая означает, что $\|\alpha(t)f(t)\|_{l^2} \in L^1(\sigma(X))$, т. е. $\alpha(t)f(t)$ интегрируема по Бохнеру (теорема 3.1 [2, с. 323]). [8]

Далее с помощью техники, разработанной в [9] для пары некоммутирующих самосопряженных операторов X и Y, построим унитарное отображение W, диагонализирующее самосопряженный абсолютно непрерывный сингулярный интегральный оператор

$$(Yf)(x) = \beta(x)f(x) + \alpha^*(x)\sigma(P(\alpha f))(x) \quad \forall f\in H, \tag{14}$$

в терминах его операторнозначных коэффициентов $\alpha(x)$ и $\beta(x)$, где

$$(Pf)(x) = \underset{\varepsilon\to -0}{\mathrm{l.i.m.}}\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma(X)} \frac{f(t)\,dt}{(x+i\varepsilon)-t} = \frac{f(x)}{2} + \frac{1}{2\pi i}\,\mathrm{v.p.}\int_{\sigma(X)} \frac{f(t)\,dt}{x-t}; \tag{15}$$

символ v.p. означает главное значение сингулярного интеграла (см. [10], гл. III, п. 1.4). При этом будем считать, что коэффициенты $\beta(x) = \beta^*(x)\colon H(x)\to$ $\to H(x)$ и $\alpha(x)\colon H(x)\to D$ являются измеримыми существенно ограниченными оператор-функциями на $\sigma(X)$, $\ker\alpha(x) = \{0\}$ для почти всех $x\in\sigma(X)$, и σ, как и ранее, диагональная инволюция в D. Из (9) и (14) следует, что самокоммутатор $C = [T^*, T] = 2i[X, Y]$ оператора $T = X + iY$ имеет вид (10), и очевидно, что T является вполне ненормальным, т. е. не существует приводящего T подпространства, на котором T индуцирует нормальный оператор.

Следует отметить, что ранее такая диагонализация была проведена в [8] для случая, когда T — когипонормальный ($C\le 0$) и C — ядерный оператор. Заметим также, что в зависимости от своих коэффициентов оператор Y (14) может быть как абсолютно непрерывным, так и сингулярным. Например, если $\sigma = \pm I_D$, то из дополнения [11] следует, что Y должен быть абсолютно непрерывным. С другой стороны, пусть $\alpha^*(x) = [1+ix, x+i]$, $\beta(x) = 0$ и $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$. Тогда $\alpha^*(x)\sigma\alpha(t) = 2i(x-t)$, а значит, $(Yf)(x) = \dfrac{1}{\pi}\int_{\sigma(X)} f(t)\,dt$, т. е. Y является ядерным интегральным оператором (предложение 2 [7, с. 147]). Поэтому Y в этом случае будет сингулярным.

Теперь заметим, что теорема 2 [9] о том, что любой оператор с абсолютно непрерывной вещественной частью и ядерным самокоммутатором унитарно эквивалентен оператору $T = X + iY$ вида (9), (14), обобщается на случай, когда самокоммутатор имеет чисто точечный спектр.

Действительно, если мы унитарным преобразованием отобразим данный оператор в пространство H (8), в котором его вещественная часть имеет вид (9), то из изложенного выше получим, что самокоммутатор будет иметь вид (10). Далее определим самосопряженный оператор S:

$$(Sf)(x) = \alpha^*(x)\sigma(P(\alpha f))(x) \quad \forall f\in H,$$

---

[8] Эти же рассуждения останутся в силе, если в прямом интеграле гильбертовых пространств H (8) содержится сингулярная мера. В этом случае получим $\|\alpha(t)\,f(t)\|_{l^2}\in$ $\in L^1(\sigma(X),\mu)$.

где P имеет вид (15). Легко проверить, что $2i[X,S]=C$. Поскольку также $2i[X,S]=C$, то оператор $A=Y-S$ будет коммутировать с X и, следовательно, может быть представлен как $(Af)(x)=\beta(x)f(x)\ \ \forall f\in H$, где $\beta(x)$ — некоторая самосопряженная измеримая оператор-функция (теорема 3 [3, с. 163] и теорема 5 [3, с. 165]). Вычисляя символы $S_X^{\pm}(Y)=s-\lim\limits_{t\to\pm\infty} e^{itX}Ye^{-itX}$ оператора Y относительно X, получаем $(S_X^{-}(Y)f)(x)=\beta(x)f(x)$, $(S_X^{+}(Y)f)(x)=[\beta(x)+$ $+\alpha^*(x)\sigma\alpha(x)]f(x)\ \ \forall f\in H$ (см. [9, с. 23] или [10], теорема III.1.6). В силу ограниченности символы являются операторами умножения на существенно ограниченные оператор-функции. Таким образом, оператор $T=X+iY$ имеет требуемый вид (9), (14). Заметим, что, вообще говоря, мы не показали существенную ограниченность $\alpha(x)$, однако это не будет сказываться на дальнейших рассмотрениях.

Кроме того, из этих соображений также следует, что в случае абсолютно непрерывной мнимой части и самокоммутатора с чисто точечным спектром с помощью унитарного преобразования любой оператор можно привести к виду $\hat{T}=\hat{X}+i\hat{Y}$, где $\hat{Y}$ имеет вид (2) и

$$(\hat{X}g)(y)=\hat{\beta}(y)g(y)-\hat{\alpha}^*(y)\sigma(P(\hat{\alpha}g))(y)\qquad\forall g\in\hat{H}. \tag{16}$$

Здесь коэффициенты $\hat{\beta}(y)$ и $\hat{\alpha}^*(y)\sigma\hat{\alpha}(y)$ являются измеримыми существенно ограниченными оператор-функциями и

$$\hat{H}=\int\limits_{\sigma(Y)}\oplus\hat{H}(y)\,dy. \tag{17}$$

Теорема 2. *Предположим, что оператор $T=X+iY$ (9), (14), действующий в пространстве H (8), вполне ненормальный, имеет самокоммутатор с чисто точечным спектром и самосопряженные операторы X и Y абсолютно непрерывны. Тогда существует унитарное отображение W из H на $\hat{H}$ (17), которое переводит Y (14) в оператор умножения $\hat{Y}$ (2). Кроме того, если существует другое диагонализирующее унитарное отображение $\hat{W}:H\to\hat{H}$, то оно имеет вид $\hat{W}=UW$, где $(Ug)(y)=u(y)g(y)\ \ \forall g\in\hat{H}$ — оператор умножения в $\hat{H}$ на некоторую измеримую унитарную оператор-функцию $u(y)$.*

Доказательство. Используя (3), зададим сначала рассматриваемое диагонализирующее отображение на линейной оболочке векторов из H вида $\dfrac{\alpha^*(x)}{x-z}a$ для всех $a\in D$ и всех невещественных z. Посредством этой линейной оболочки определим ядро $D_y(z_1,z_2):D\to D$ следующим образом:

$$\langle D_y(z_1,z_2)a_1,a_2\rangle_D=\frac{\partial}{\partial y}\left\langle E(y)\frac{\alpha^*(\cdot)}{(\cdot)-z_1}a_1,\ \frac{\alpha^*(\cdot)}{(\cdot)-z_2}a_2\right\rangle_H\qquad\forall a_{1,2}\in D. \tag{18}$$

Из спектрального разложения и абсолютной непрерывности оператора Y легко видеть, что (18) равно выражению

$$\frac{1}{2\pi i}\left\langle\left[(Y-(y+i0)I_H)^{-1}-(Y-(y-i0)I_H)^{-1}\right]\frac{\alpha^*(\cdot)}{(\cdot)-z_1}a_1,\ \frac{\alpha^*(\cdot)}{(\cdot)-z_2}a_2\right\rangle_H=$$

$$=\left\langle\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma(X)}\frac{\alpha(x)}{x-\overline{z_2}}\left\{\left[(Y-(y+i0)I_H)^{-1}-(Y-(y-i0)I_H)^{-1}\right]\frac{\alpha^*(\cdot)}{(\cdot)-z_1}a_1\right\}(x)dx,\ a_2\right\rangle_D. \tag{19}$$

Из теоремы 7 [9] (которая естественным образом обобщается на рассматриваемый случай) следует, что при сделанных предположениях для всех невещественных z и w существует D-значная оператор-функция, называемая определяющей функцией оператора T, вида

$$E(z, w) = \sigma + \frac{1}{2i} K^*(X - zI_H)^{-1}(Y - wI_H)^{-1} K \tag{20}$$

(напомним, что здесь $\sigma = \sigma^* = \sigma^{-1}$), которая является единственным решением следующей задачи Римана – Гильберта на $\sigma(X)$:

$$E(x + i0, w) = S_X(x, w)E(x - i0, w), \quad E(\infty, w) = \sigma, \tag{21}$$

где $S_X(x, w) = I_D + \alpha(x)(\beta(x) - w I_{H(x)})^{-1} \alpha^*(x)\sigma$ — вещественная характеристическая функция оператора T. Из формул (33) и (35) [9] получаем, что $E(z, w)$ имеет следующее свойство:

$$E(\overline{z}_2, w)\sigma E^*(\overline{z}_1, \overline{w}) - \sigma =$$

$$= \frac{\overline{z}_2 - z_1}{2i} K^*(X - \overline{z}_2 I_H)^{-1} (Y - wI_H)^{-1} (X - z_1 I_H)^{-1} K. \tag{22}$$

Поэтому из (11), (12), (18), (19) и (22) находим

$$D_y(z_1, z_2) = \frac{E(\overline{z}_2, y + i0)\sigma E^*(\overline{z}_1, y - i0) - E(\overline{z}_2, y - i0)\sigma E^*(\overline{z}_1, y + i0)}{\overline{z}_2 - z_1}. \tag{23}$$

Из теоремы 7 [9] также следует, что $E(z, w)$ удовлетворяет следующей двойственной задаче Римана – Гильберта:

$$E(z, y + i0) = E(z, y - i0)S_Y(z, y) \quad \forall y \in \sigma(Y), \tag{24}$$

где $S_Y(z, y) = I_D + \sigma\hat{\alpha}(y)(\hat{\beta}(y) - \hat{\alpha}^*(y)\sigma\hat{\alpha}(y) - zI_{\hat{H}(y)})^{-1}\hat{\alpha}^*(y)$ — мнимая характеристическая функция оператора T. Из (24) следует

$$E(z, y - i0) = E(z, y + i0)S_Y(z, y)^{-1} \quad \forall y \in \sigma(Y), \tag{25}$$

где $S_Y(z, y)^{-1} = I_D - \sigma\hat{\alpha}(y)(\hat{\beta}(y) - zI_{\hat{H}(y)})^{-1}\hat{\alpha}^*(y)$. Таким образом, с учетом (25) ядро (23) можно переписать в виде

$$D_y(z_1, z_2) = \frac{E(\overline{z}_2, y + i0)}{\overline{z}_2 - z_1}\left[\sigma S_Y^*(\overline{z}_1, y)^{-1} - S_Y(\overline{z}_2, y)^{-1}\sigma\right] \times$$

$$\times E^*(\overline{z}_1, y + i0) = D_y^*(z_2) D_y(z_1), \tag{26}$$

где $D_y(z) = (\hat{\beta}(y) - zI_{\hat{H}(y)})^{-1}\hat{\alpha}^*(y)\sigma E^*(\overline{z}, y + i0)$, т. е. ядро $D_y(z_1, z_2)$ является эрмитово-неотрицательным.

Для каждого фиксированного $y \in \sigma(Y)$ на рассматриваемой линейной оболочке определим отображение $W(y): H \to \hat{H}(y)$ следующим образом:

$$W\left[\frac{\alpha^*(\cdot)}{(\cdot) - z} a\right](y) = D_y(z)a \quad \forall a \in D, \quad \forall z \neq \overline{z}. \tag{27}$$

Тогда из (18), (26) и (27) следует, что после замыкания данной линейной оболочки относительно скалярного произведения

$$\frac{\partial}{\partial y}\left\langle E(y)\frac{\alpha^*(\cdot)}{(\cdot)-z_1}a_1, \frac{\alpha^*(\cdot)}{(\cdot)-z_2}a_2\right\rangle_H = \left\langle W\left[\frac{\alpha^*(\cdot)}{(\cdot)-z_1}a_1\right](y), W\left[\frac{\alpha^*(\cdot)}{(\cdot)-z_2}a_2\right](y)\right\rangle_{\hat{H}(y)}$$

и факторизации по ядру данной метрики получим гильбертово пространство $\hat{H}(y)$. Поскольку мы предположили, что оператор T — вполне ненормальный, то из теоремы 5 [9] и теоремы 1, а также из (9), (11), (27) и соответствующих разложений по степеням следует, что диагонализирующее отображение W можно продолжить до унитарного отображения из всего пространства H на все пространство $\hat{H}$ следующим образом:

$$W[Y^l X^m Ka](y) = y^l W[X^m Ka](y) \quad \forall l, m \geq 0, \quad \forall a \in D.$$

Очевидно, что любое другое диагонализирующее унитарное отображение $\hat{W} : H \to \hat{H}$ может быть выбрано в виде $\hat{W} = UW$, где U — некоторый унитарный оператор в $\hat{H}$. Поскольку в этом случае $\hat{Y} = WYW^* = UWYW^*U^*$, то $U\hat{Y} = \hat{Y}U$, а значит, из теоремы 3 [3, с. 163] и теоремы 5 [3, с. 165] следует, что U является оператором умножения на некоторую измеримую унитарную оператор-функцию $u(y)$. Теорема доказана.

Автор выражает благодарность В. А. Золотареву за внимание и полезные замечания к работе.

1. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1965. – 800 с.
2. *Березанский Ю. М., Ус Г. Ф., Шефтель З. Г.* Функциональный анализ. – Киев: Выща шк., 1990. – 600 с.
3. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве: Уч. пос. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980. – 264 с.
4. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. – М.: Мир, 1972. – 740 с.
5. *Pincus J. D.* Commutators, generalized eigenfunction expansions and singular integral operators // Trans. Amer. Math. Soc. – 1966. – **121**. – P. 358–377.
6. *Рисс Ф., С.-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. – М.: Мир, 1979. – 587 с.
7. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. – М.: Наука, 1965. – 448 с.
8. *Pincus J. D.* Commutators and systems of singular integral equations. I // Acta Math. – 1968. – **121**. – P. 219–249.
9. *Воробьев И. В.* Функциональные модели, унитарные инварианты, мозаики и принципальные функции для операторов с ядерным самокоммутатором // Мат. физика, анализ, геометрия. – 2002. – **9**, № 1. – С. 18–47.
10. *Xia Daoxing.* Spectral theory of hyponormal operators // Operator Theory: Adv. and Appl. – 1983. – **10**. – 242 p.
11. *Putnam C. R.* Commutators, absolutely continuous spectra, and singular integral operators // Amer. J. Math. – 1964. – **86**. – P. 310–316.

Получено 27.02.2001,
после доработки — 22.03.2002