УДК 517.983.27

А. Г. Мазко (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ПОЗИТИВНЫЕ И МОНОТОННЫЕ СИСТЕМЫ В ПОЛУУПОРЯДОЧЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

We investigate properties of positive and monotone differential systems with respect to a prescribed cone in a phase space. We formulate criteria of the stability of linear positive systems in terms of monotonically invertible operators. We develope methods of the comparison of systems in a partially ordered spaces.

Досліджуються властивості позитивних і монотонних диференціальних систем відносно заданого конуса у фазовому просторі. Формулюються критерії стійкості лінійних позитивних систем у термінах монотонно оборотних операторів. Розвиваються методи порівняння систем у напівупорядкованому просторі.

1. Введение. Свойство позитивности (монотонности) динамической системы равносильно положительности (монотонности) некоторого оператора, описывающего ее движение, по отношению к заданному конусу фазового пространства [1 – 3]. Дифференциальные уравнения Ляпунова и Риккати являются примерами позитивных систем относительно конуса симметричных неотрицательно определенных матриц. Свойства позитивных и монотонных систем используются в различных задачах анализа и синтеза. Исследование устойчивости класса линейных автономных позитивных систем сводится к решению алгебраических уравнений, определяемых операторными коэффициентами данных систем [4 – 6].

В данной работе изучаются условия позитивности и монотонности дифференциальных систем в полуупорядоченном банаховом пространстве. Предлагаются методы анализа устойчивости линейных позитивных систем, основанные на решении алгебраических уравнений с монотонно обратимыми операторами, а также аналоги систем сравнения в полуупорядоченном пространстве.

2. Операторы в пространстве с конусом. Выпуклое замкнутое множество $\mathcal{K}$ вещественного нормированного пространства $\mathcal{E}$ называется конусом, если $\mathcal{K}\cap-\mathcal{K}=\{0\}$ и $\alpha X+\beta Y\in\mathcal{K}$ для любых $X, Y\in\mathcal{K}$ и $\alpha, \beta\geq 0$. Пространство с конусом полуупорядочено: $X\leq Y$ $(X<Y)$ $\Leftrightarrow$ $Y-X\in\mathcal{K}$ $(Y-X\in\mathcal{K}_0)$, где $\mathcal{K}_0$ — множество внутренних точек $\mathcal{K}$. Конус $\mathcal{K}$ называется нормальным, если $0\leq X\leq Y$ влечет $\|X\|\leq c\|Y\|$, где c — универсальная константа. Если $\mathcal{E}=\mathcal{K}-\mathcal{K}$, то конус $\mathcal{K}$ воспроизводящий.

Пусть в банаховом пространстве $\mathcal{E}_1$ $(\mathcal{E}_2)$ выделен конус $\mathcal{K}_1\subset\mathcal{E}_1$ $(\mathcal{K}_2\subset\mathcal{E}_2)$. Оператор $M:\mathcal{E}_1\to\mathcal{E}_2$ называется монотонным (монотонным на конусе $\mathcal{K}$), если $MX\geq MY$ при $X\geq Y$ $(X\geq Y\geq 0)$. Монотонность линейного оператора равносильна его положительности: $X\geq 0\Rightarrow MX\geq 0$. Неравенство между операторами $M\leq L$ означает, что оператор $L-M$ положительный. Если $M\mathcal{E}_1\subset\mathcal{K}_2$, то оператор M всюду положительный. Линейный оператор M называется монотонно обратимым, если для любого $Y\in\mathcal{K}_2$ уравнение $MX=Y$ имеет решение $X\in\mathcal{K}_1$. Если $\mathcal{K}_2$ — нормальный воспроизводящий конус и $M_1\leq M\leq M_2$, то из монотонной обратимости операторов M_1 и M_2 вытекает монотонная обратимость оператора M, причем $M_2^{-1}\leq M^{-1}\leq M_1^{-1}$ [1].

Выделим класс линейных операторов [5]

$$M = L-P, \quad P\mathcal{K}_1\subset\mathcal{K}_2\subset L\mathcal{K}_1,$$

где $\mathcal{K}_2$ — нормальный воспроизводящий конус. Критерием монотонной обратимости таких операторов является неравенство $\rho(T)<1$, где $\rho(T)$ — спектральный радиус пучка операторов $T(\lambda)=P-\lambda L$. Если конус $\mathcal{K}_2$ телесный, то данное неравенство эквивалентно разрешимости уравнения $MX = Y$ в виде $X \geq 0$ при некотором $Y > 0$.

3. Позитивные и монотонные системы. Пусть $\mathscr{E}$ — банахово пространство, полуупорядоченное конусом $\mathcal{K}$ и $X(t) \in \mathscr{E}$ — состояние динамической системы с непрерывным или дискретным временем $t \geq 0$. Система называется (t, t_0)-позитивной, если из $X(t_0) = X_0 \in \mathcal{K}$ следует $X(t) \in \mathcal{K}$. Система позитивна, если она (t, t_0)-позитивна при любых $t > t_0 \geq 0$. Данное свойство системы равносильно положительности оператора движения системы $V(t, t_0) : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$, определяющего переход из состояния X_0 в состояние $X(t) = V(t, t_0) X_0$ при $t > t_0 \geq 0$. Система называется монотонной (монотонной на конусе $\mathcal{K}$), если ее оператор движения $V(t, t_0)$ монотонный (монотонный на конусе $\mathcal{K}$) при $t > t_0 \geq 0$.

Рассмотрим линейную дифференциальную систему

$$\dot{X}(t) + M(t)X(t) = G(t), \quad t \geq 0, \tag{1}$$

где $M(t)$ — ограниченный оператор, действующий в полуупорядоченном пространстве $\mathscr{E}$ с конусом $\mathcal{K}$. Предполагаем, что каждое начальное условие $X(t_0) = X_0$ системы (1) определяет единственное решение

$$X(t) = W(t, t_0)X_0 + \int_{t_0}^{t} W(t, s)G(s)\,ds, \tag{2}$$

где $W(t, s) = W(t, t_0)[W(s, t_0)]^{-1}$ — эволюционный оператор, $t \geq t_0 \geq 0$. Линейный оператор $W(t, t_0)$ представим в виде ряда

$$W(t, t_0) = I - \int_{t_0}^{t} M(t_1)\,dt_1 + \int_{t_0}^{t} M(t_2)\int_{t_0}^{t_2} M(t_1)\,dt_1\,dt_2 - \ldots,$$

равномерно сходящегося по операторной норме. Согласно (2) $X(t) \in \mathcal{K}$ при любом начальном условии $X_0 \in \mathcal{K}$, если

$$W(t, t_0) \geq 0, \qquad \int_{t_0}^{t} W(t, s)G(s)\,ds \geq 0. \tag{3}$$

Здесь первое неравенство означает монотонность оператора относительно конуса $\mathcal{K}$, а второе — принадлежность значения функции данному конусу. Обратное утверждение легко устанавливается с учетом замкнутости конуса $\mathcal{K}$. Следовательно, система (1) позитивна в том и только в том случае, когда выполняются соотношения (3) при $t > t_0 \geq 0$.

С помощью формул (2) и (3) устанавливается эквивалентность следующих утверждений:

a) для любой функции $G(t) \geq 0$ система (1) $(t, 0)$-позитивна при $t \geq 0$;

b) система (1) монотонна;

c) оператор $W(t, s)$ монотонный при $t > s \geq 0$;

d) из $\dot{Z}(t) + M(t)Z(t) \geq 0$ и $Z(0) = Z_0 \geq 0$ следует $Z(t) \geq 0$ при $t > 0$.

Если $G(t) \geq 0$, то каждое из утверждений a) – d) эквивалентно позитивности системы (1).

Лемма 1. *Для того чтобы эволюционный оператор $W(t, s)$ был монотонным при $t \geq s \geq 0$, необходимо и достаточно, чтобы экспоненциальный оператор $e^{-M(t)h}$ был монотонным при $t \geq 0$, $h \geq 0$.*

Доказательство. Воспользуемся процедурой представления оператора $W(t, s)$ в виде так называемого мультипликативного интеграла [7]. Разбивая отрезок $[s,t]$ точками $t_{kn}=s+kh_n$, где $h_n=(t-s)/n$, $k=0,\ldots,n$, при больших значениях n имеем

$$W(t,s) = W(t_{nn},t_{n-1n})\,W(t_{n-1n},t_{n-2n})\ldots W(t_{1n},t_{0n}),$$

$$W(t_{kn},t_{k-1n}) = e^{-M(\theta_{kn})h_n} + o(h_n), \quad k=1,\ldots,n,$$

где $\theta_{kn}\in[t_{k-1n},t_{kn}]$ — некоторые промежуточные точки. Поэтому

$$W(t,s) = \lim_{n\to\infty}\left[e^{-M(\theta_{nn})h_n}\ \ldots\ e^{-M(\theta_{1n})h_n}\right].$$

Если $e^{-M(t)h}\ge 0$ при любых $t\ge 0$ и $h\ge 0$, то оператор $W(t,s)$ является пределом некоторой последовательности монотонных операторов и, в силу замкнутости конуса линейных монотонных операторов, должен быть монотонным.

Обратное утверждение доказывается аналогично на основе соотношений

$$W(t,t-h/n) = e^{-M(\theta_n)h/n} + o(1/n),$$

$$e^{-M(t)h} = \lim_{n\to\infty}\left[W(t,t-h/n)\right]^n,$$

где $\theta_n\in[t-h/n,t]$, $n=1,2,\ldots$.

Лемма доказана.

Лемма 2. *Если* $M(t)=M_1(t)+M_2(t)$ *и операторы* $W_{M_1}(t,s)$ *и* $W_{M_2}(t,s)$ *монотонны при* $t\ge s\ge 0$, *то оператор* $W_M(t,s)$ *также является монотонным при* $t\ge s\ge 0$.

Доказательство вытекает из леммы 1 и соотношений [5]

$$e^{-(M_1+M_2)\tau} = \lim_{k\to\infty}\left[E(\tau/k)\right]^k, \qquad E(h) = \frac{1}{2}\left(e^{-M_1h}e^{-M_2h}+e^{-M_2h}e^{-M_1h}\right).$$

Свойство позитивности системы может быть использовано при оценке ее решений. Если функции $X_1(t)$ и $X_2(t)$ удовлетворяют неравенствам

$$\dot X_1(t) + M(t)X_1(t) \le G_1(t), \quad \dot X_2(t) + M(t)X_2(t) \ge G_2(t), \quad X_1(t_0)\le X_2(t_0),$$

то при условиях (3) выполняются соотношения

$$X_2(t)-X_1(t) \ge W(t,t_0)\left[X_2(t_0)-X_1(t_0)\right] + \int_{t_0}^{t} W(t,s)G(s)\,ds \ge 0,$$

где $G(t)=G_2(t)-G_1(t)$. Отсюда вытекает следующее утверждение.

Лемма 3. *Пусть* $X(t)$ — *решение позитивной системы* (1), *а функции* $X_1(t)$ *и* $X_2(t)$ *удовлетворяют неравенствам*

$$\dot X_1(t) + M(t)X_1(t) \le \alpha G(t), \qquad \dot X_2(t) + M(t)X_2(t) \ge \beta G(t),$$

где $\alpha\le 1$, $\beta\ge 1$. *Тогда из* $X_1(t_0)\le X(t_0)\le X_2(t_0)$ *следует* $X_1(t)\le X(t)\le X_2(t)$ *при* $t\ge t_0$.

Если $\alpha=0$, то в данном утверждении нижняя оценка $X_1(t)$ решения системы (1) не зависит от ее правой части $G(t)$. В случае $\alpha=\beta=1$ утверждение леммы 3 справедливо при условии $W(t,s)\ge 0$, $t\ge s\ge t_0$.

Обобщим дифференциальную систему (1) в виде

$$\dot X + M(t)X = G(X,t), \quad t\ge 0, \tag{4}$$

где G — нелинейный оператор. Свойство позитивности (монотонности) системы (4) равносильно положительности (монотонности) оператора сдвига по траекториям $X(t)=V(t,t_0)X_0$. Решения системы (4) удовлетворяют интегральному уравнению

$$X(t) = W(t,t_0)X_0 + \int_{t_0}^{t} W(t,s)G(X(s),s)ds, \tag{5}$$

где $W(t,s)$ — эволюционный оператор линейной системы (1). Из (5) следует, что система (4) является позитивной, если оператор $G(X,t)$ всюду положительный, а оператор $W(t,s)$ монотонный при $t \ge s \ge 0$.

Пусть оператор $W(t,s)$ монотонный относительно телесного конуса $\mathcal{K}$, $\mathcal{F}_0$ и $\mathcal{F}$ — семейства операторов G, определяемые соответствующими условиями

$$X \ge 0, \quad \varphi \in \mathcal{K}^*, \quad \varphi(X) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi(G(X,t)) \ge 0,$$

$$X \ge Y, \quad \varphi \in \mathcal{K}^*, \quad \varphi(X-Y) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi(G(X,t) - G(Y,t)) \ge 0,$$

где $\mathcal{K}^*$ — сопряженный конус линейных функционалов. Тогда свойство позитивности (монотонности) системы (4) можно установить при $G \in \mathcal{F}_0$ $(G \in \mathcal{F})$.

Лемма 4. *Пусть $X(t)$ — решение системы* (4) *с монотонным оператором $W(t,s)$, а функции $X_1(t)$ и $X_2(t)$ удовлетворяют соотношениям*

$$\dot{X}_1 + M(t)X_1 = G_1(X_1,t), \qquad \dot{X}_2 + M(t)X_2 = G_2(X_2,t),$$

$$G_1(X,t) \le G(X,t) \le G_2(X,t), \qquad G_1,\ G_2 \in \mathcal{F}, \qquad t \ge t_0.$$

Тогда из $X_1(t_0) \le X(t_0) \le X_2(t_0)$ следует $X_1(t) \le X(t) \le X_2(t)$ при $t \ge t_0$.

Примеры. Нелинейная дифференциальная система

$$\dot{x} + A(t)x = g(x,t), \qquad x \in R^n, \quad t \ge 0,$$

где $A(t)$ — матрица с неположительными внедиагональными элементами, является позитивной относительно конуса неотрицательных векторов $\mathcal{K}$, если вектор-функция $g(x,t)$ удовлетворяет условиям [2]

$$x \ge 0, \qquad x_i = 0 \quad \Rightarrow \quad g_i(x,t) \ge 0, \quad i = 1,\ldots,n,$$

и монотонной относительно того же конуса, если $g(x,t)$ — квазимонотонная неубывающая по x (условие Важевского), т. е.

$$x \le y, \qquad x_i = y_i \quad \Rightarrow \quad g_i(x,t) \le g_i(y,t), \quad i = 1,\ldots,n.$$

Если выполняются оба ограничения на $g(x,t)$ при $0 \le x \le y$, то данная система является монотонной на конусе $\mathcal{K}$.

Позитивными относительно конуса симметричных неотрицательно определенных матриц являются дифференциальные уравнения Ляпунова, Риккати и более общее уравнение

$$\dot{X} - A(t)X - XA(t)^T - \sum_k B_k(t)XB_k(t)^T = X\,C(t)X + D(t),$$

где $A(t)$, $B_k(t)$, $C(t) = C(t)^T \ge 0$ и $D(t) = D(t)^T \ge 0$ — заданные матрицы. В случае $C(t) \equiv 0$ данная система имеет также свойство монотонности. В рассматриваемом примере оператор $M(t)$ имеет следующую структуру:

$$M(t) = L(t) - P(t), \quad L(t)X = -A(t)X - XA(t)^T, \quad P(t)X = \sum_k B_k(t)XB_k(t)^T.$$

При этом монотонность эволюционного оператора $W_M(t,s)$ вытекает из леммы 2 и соотношений

$$W_L(t,s)X = \Omega(t,s)X\Omega(t,s)^T \ge 0, \qquad W_{-P}(t,s)X \ge 0 \quad \forall X = X^T \ge 0,$$

где $\Omega(t,s)$ — матрицант системы $\dot{x} = A(t)x$, $t \ge s \ge 0$.

Линейное матричное дифференциальное уравнение вида

$$\dot{X} - A(t)X - XA(t)^T - \sum_k B_k(t)XB_k(t)^T = 0$$

известно как уравнение вторых моментов для стохастической системы Ито

$$dx(t) - A(t)x(t)\,dt = \sum_k B_k(t)\,x(t)\,dw_k(t),$$

где w_k — компоненты стандартного винеровского процесса. Данное уравнение имеет свойства позитивности и монотонности и используется в теории устойчивости стохастических систем.

4. Устойчивость линейных позитивных систем. Пусть в фазовом пространстве линейной автономной системы

$$\dot{Z}(t) + MZ(t) = 0, \quad t \geq 0, \tag{6}$$

с ограниченным оператором M выделен нормальный воспроизводящий конус $\mathcal{K}$. Свойство позитивности данной системы равносильно монотонности оператора e^{-Mt} относительно конуса $\mathcal{K}$ при $t \geq 0$. Поэтому при изучении условий устойчивости позитивной системы (6) можно использовать свойства однопараметрических позитивных полугрупп [3].

Определим границу роста операторной экспоненты и спектральную грань

$$\gamma_M = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \left\| e^{-Mt} \right\| < \infty, \qquad \alpha_M = \inf\{\mathrm{Re}\lambda : \lambda \in \sigma(M)\}.$$

Из теоремы об отображении спектра ограниченного оператора следует $\gamma_M = -\alpha_M$. Спектральный радиус монотонного линейного оператора является точкой его спектра (теоремы Крейна – Бонсалла – Карлина [1]). Поэтому для позитивной системы (6) $\alpha_M \in \sigma(M)$.

Лемма 5. *Если система* (6) *позитивна, то соотношения* $(M+\gamma I)^{-1} \geq 0$ *и* $\gamma > \gamma_M$ *эквивалентны. Если* $(M+\gamma I)^{-1} \geq 0$ *при каждом* $\gamma \geq \gamma_0$, *то система* (6) *позитивна и* $\gamma_0 > \gamma_M$.

Доказательство. Если система (6) позитивна, то для любого $\gamma > \gamma_M$ выполняется соотношение

$$(M+\gamma I)^{-1} = \int_0^\infty e^{-\gamma t} e^{-Mt}\,dt \geq 0.$$

Обратно, если оператор $M+\gamma I$ монотонно обратим при каждом значении $\gamma \geq \gamma_0$, где γ_0 — некоторое вещественное число, то

$$e^{-Mt} = \lim_{k\to\infty} \left[t_k (M + t_k I)^{-1} \right]^k \geq 0, \qquad t_k = \frac{k}{t}, \quad t \geq 0.$$

Покажем, что для позитивной системы (6) оператор $M+\gamma I$ не является монотонно обратимым при $\gamma \leq \gamma_M$. Предположим, что для некоторых чисел γ_1 и γ_2, $\gamma_1 < \gamma_M < \gamma_2$, операторы $M_1 = M + \gamma_1 I$ и $M_2 = M + \gamma_2 I$ монотонно обратимы. Тогда из соотношения $M_1 \leq M + \gamma_M I \leq M_2$ и теоремы о двусторонней оценке монотонно обратимых операторов следует, что оператор $M + \gamma_M I$ также должен быть монотонно обратимым [1]. Однако это противоречит условию $\alpha_M = -\gamma_M \in \sigma(M)$.

Следовательно, при условии позитивности системы (6) оператор $M+\gamma I$ монотонно обратим лишь при $\gamma > \gamma_M$.

Лемма доказана.

Лемма 6. *Если* $(M-\alpha I)^{-1} \geq 0$ *при каждом* $\alpha \leq \alpha_0$, *то спектр оператора* M *расположен в полуплоскости* $\mathrm{Re}\,\lambda > \alpha_0$.

Доказательство. Из обратимости оператора $M - \alpha I$ следует, что оператор

M не имеет вещественных точек спектра в интервале $(-\infty, \alpha_0]$. Спектральный радиус монотонного оператора $(M-\alpha I)^{-1}$ равен $1/(\alpha_*-\alpha)$, где α_* — вещественная точка спектра $\sigma(M)$ такая, что $|\lambda-\alpha| \geq \alpha_*-\alpha > 0 \quad \forall \lambda \in \sigma(M)$. При этом $\alpha_* > \alpha_0 \geq \alpha$ и α_* не зависит от α. Если $\operatorname{Re}\lambda \leq \alpha_0$, то можно подобрать такое значение α, чтобы выполнялось противоположное неравенство $|\lambda-\alpha| < \alpha_*-\alpha$. Следовательно, $\operatorname{Re}\lambda > \alpha_0$ при $\lambda \in \sigma(M)$. При этом α_* совпадает с α_M.

Лемма доказана.

Если $\alpha_M > 0$, то система (6) экспоненциально устойчива, т. е.

$$\|Z(t)\| \leq \beta e^{-\gamma(t-t_0)}\|Z_0\|, \quad t \geq t_0,$$

где γ и β — положительные константы, не зависящие от выбора решения, причем $\gamma < \alpha_M$. Для позитивной системы (6), имеющей частное решение $Z(t) = e^{-\alpha_M(t-t_0)}V$, где $V \neq 0$, верно и обратное утверждение. Учитывая леммы 5 и 6 при $\gamma_0 = \alpha_0 = 0$, сформулируем следующее утверждение.

Теорема 1. *Если оператор $M+\gamma I$ монотонно обратим при любом $\gamma \geq 0$, то система* (6) *позитивна и экспоненциально устойчива. Если система* (6) *позитивна, то она экспоненциально устойчива в том и только в том случае, когда оператор M монотонно обратим.*

Отметим, что экспоненциальная устойчивость системы (6) следует из монотонной обратимости двух операторов M и $M+\gamma_0 I$, где $\gamma_0 > 0$ — достаточно большое число. Действительно, каждый оператор $M+\gamma I$ при $\gamma \in [0, \gamma_0]$ должен быть монотонно обратимым, причем $|\lambda+\gamma_0| \geq \alpha_M+\gamma_0 > 0 \quad \forall \lambda \in \sigma(M)$ (см. доказательства лемм 5 и 6). Отсюда при достаточно большом γ_0 следует неравенство $\alpha_M > 0$, при котором система (6) экспоненциально устойчива.

Тот факт, что монотонная обратимость оператора M является необходимым условием экспоненциальной устойчивости позитивной системы (6), можно установить также с помощью работы [6]. Если оператор M монотонно обратим относительно телесного конуса $\mathcal{K}$, то существуют элементы $X > 0$ и $Y > 0$, удовлетворяющие уравнению $MX = Y$, и позитивная система (6) должна быть экспоненциально устойчивой [6, с. 38]. Следствиями теоремы 1 являются известные критерии асимптотической устойчивости в среднеквадратическом стохастических систем Ито (см. п. 3).

Перейдем к рассмотрению неавтономных систем

$$\dot{X}(t) + M(t)X(t) = 0, \quad t \geq 0. \tag{7}$$

Система (7) называется позитивно приводимой, если существует преобразование Ляпунова $X(t) = Q(t)Z(t)$, приводящее к позитивной автономной системе (6). В данном определении $Q(t)$ — равномерно ограниченный дифференцируемый оператор, имеющий равномерно ограниченный обратный $Q^{-1}(t)$ и удовлетворяющий операторному дифференциальному уравнению

$$\dot{Q}(t) + M(t)Q(t) - Q(t)M = 0, \quad t \geq 0.$$

При этом условия устойчивости систем (6) и (7) равносильны [7]. Следовательно, позитивно приводимая система (7) экспоненциально устойчива в том и только в том случае, когда оператор M монотонно обратим.

Приводимыми являются ω-периодические системы (7), для которых

$$M(t+\omega) = M(t), \qquad W(t+\omega) = W(t)W(\omega),$$

$$Q(t) = W(t)e^{Mt}, \qquad M = -\omega^{-1}\ln W(\omega)$$

и спектр оператора монодромии $W(\omega) = W(\omega, 0)$ не окружает нуль.

Рассмотрим подкласс систем (7), описываемых функционально коммутативным оператором $M(t)$, т. е.

$$M(t)M(\tau) \equiv M(\tau)M(t), \quad t \geq 0, \quad \tau \geq 0. \tag{8}$$

В этом случае эволюционный оператор определяется соотношениями [8]

$$W(t, s) = e^{-N(t,s)}, \quad N(t, s) = \int_s^t M(\tau)d\tau, \quad t \geq s. \tag{9}$$

Предположим, что существует предельный ограниченный оператор

$$M = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{\varphi(t)} \int_{t_0}^t M(\tau)d\tau, \tag{10}$$

где $\varphi(t) > 0$ — некоторая функция такая, что $\varphi(t) \to \infty$ при $t \to \infty$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (8) *и система* (6) *с оператором* (10) *позитивна. Тогда из монотонной обратимости оператора* (10) *вытекает асимптотическая устойчивость системы* (7).

Доказательство. Из (8) – (10) вытекают соотношения

$$M(t)N(t, \tau) = N(t, \tau)M(t), \quad MN(t, t_0) = N(t, t_0)M,$$

$$M\Delta(t, t_0) = \Delta(t, t_0)M, \quad \Delta(t, t_0) = \frac{1}{\varphi(t)}N(t, t_0) - M,$$

причем $\Delta(t, t_0) \to 0$ при $t \to \infty$. Поэтому произвольное решение системы (7) с учетом (9) можно представить в виде

$$X(t) = e^{-\varphi(t)[M+\Delta(t,t_0)]}X_0 = e^{-\varphi(t)M}e^{-\varphi(t)\Delta(t,t_0)}X_0.$$

Из монотонной обратимости оператора M позитивной системы (6) следует, что $\alpha_M > 0$ (см. доказательство леммы 5). Для любого $\varepsilon > 0$ существует такой момент времени $t_1 \geq t_0$, что $\|\Delta(t, t_0)\| < \varepsilon$ при $t > t_1$. При этом справедлива оценка

$$\|X(t)\| \leq \beta e^{-\varphi(t)(\alpha_M-\varepsilon)}e^{\varphi(t)\varepsilon}\|X_0\| = \beta e^{-\varphi(t)(\alpha_M-2\varepsilon)}\|X_0\|,$$

где $\beta > 0$ — некоторая константа. Полагая $\varepsilon < \alpha_M/2$ и учитывая, что $\varphi(t) \to \infty$, получаем $\|X(t)\| \to 0$ при $t \to \infty$. Следовательно, система (7) асимптотически устойчива.

Теорема доказана.

Пример. Рассмотрим матричную систему (7), положив

$$M(t) = \begin{bmatrix} a(t) & -b(t) \\ -b(t) & a(t) \end{bmatrix},$$

где $a(t)$ и $b(t)$ — заданные функции. Очевидно, матрица $M(t)$ удовлетворяет условию функциональной коммутативности (8). Предположим, что

$$\varphi(t) = \int_{t_0}^t b(s)ds \to \infty, \quad \frac{1}{\varphi(t)}\int_{t_0}^t a(s)ds \to c, \quad t \to \infty.$$

Тогда предельная матрица (10) имеет вид

$$M = \begin{bmatrix} c & -1 \\ -1 & c \end{bmatrix}.$$

Автономная система (6) с матрицей M является позитивной относительно конуса неотрицательных векторов (см. п. 2). Условие монотонной обратимости матрицы M сводится к неравенству $c > 1$. При этом согласно теореме 2 исходная система (7) асимптотически устойчива.

5. Робастная устойчивость. В прикладных исследованиях важной является задача об устойчивости заданного семейства систем с неопределенными параметрами. Рассмотрим семейство дифференциальных систем вида

$$\dot{X} + M(t)X = G(X,t), \quad \underline{M}(t) \le M(t) \le \overline{M}(t), \quad t \ge 0, \tag{11}$$

$$G_1(t) - M_1(t)X \le G(X,t) \le G_2(t) - M_2(t)X. \tag{12}$$

Выделим в данном семействе две линейные системы

$$\dot{X}_1 + \left[\overline{M}(t) + M_1(t)\right]X_1 = G_1(t), \quad t \ge 0, \tag{13}$$

$$\dot{X}_2 + \left[\underline{M}(t) + M_2(t)\right]X_2 = G_2(t), \quad t \ge 0. \tag{14}$$

Лемма 7. *Пусть эволюционный оператор системы* (13) *монотонный, а неравенства* (12) *выполняются при* $X \in \mathcal{K}$. *Тогда решения* $X(t) \ge 0$ *каждой системы* (11), (12) *ограничены решениями систем* (13) *и* (14), *т. е.*

$$X_1(t_0) \le X(t_0) \le X_2(t_0) \;\Rightarrow\; X_1(t) \le X(t) \le X_2(t), \quad t \ge t_0.$$

Если неравенства (12) *выполняются при* $X \in \mathcal{E}$, *то из позитивности системы* (13) *вытекает позитивность каждой системы* (11), (12), *причем*

$$0 \le X_1(t_0) \le X(t_0) \le X_2(t_0) \;\Rightarrow\; 0 \le X_1(t) \le X(t) \le X_2(t), \quad t \ge t_0.$$

Доказательство. Вычитая (13) из (11) и (11) из (14), с учетом (12) получаем дифференциальные неравенства

$$\dot{H}_1(t) + \left[\overline{M}(t) + M_1(t)\right]H_1(t) \ge \left[\overline{M}(t) - M(t)\right]X(t),$$

$$\dot{H}_1(t) + \left[M(t) + M_1(t)\right]H_1(t) \ge \left[\overline{M}(t) - M(t)\right]X_1(t),$$

$$\dot{H}_2(t) + \left[M(t) + M_2(t)\right]H_2(t) \ge \left[M(t) - \underline{M}(t)\right]X_2(t),$$

$$\dot{H}_2(t) + \left[\underline{M}(t) + M_2(t)\right]H_2(t) \ge \left[M(t) - \underline{M}(t)\right]X(t),$$

где $H_1(t) = X(t) - X_1(t)$, $H_2(t) = X_2(t) - X(t)$. При этом выполнены соотношения

$$\overline{M}(t) + M_1(t) \ge M(t) + M_1(t) \ge M(t) + M_2(t) \ge \underline{M}(t) + M_2(t).$$

Если система (13) позитивна, то согласно (3) ее эволюционный оператор $W_{\overline{M}+M_1}(t,s)$ должен быть монотонным. Из монотонности оператора $W_{\overline{M}+M_1}(t,s)$ вытекает монотонность операторов $W_{M+M_1}(t,s)$, $W_{M+M_2}(t,s)$ и $W_{\underline{M}+M_2}(t,s)$ (см. п. 2).

Если $X(t) \ge 0$ или $X_1(t) \ge 0$, то из $H_1(t_0) \ge 0$ следует $H_1(t) \ge 0$, т. е. $X_1(t) \le X(t)$ при $t \ge t_0$. Аналогично, если $X(t) \ge 0$ или $X_2(t) \ge 0$, то из $H_2(t_0) \ge 0$ следует $H_2(t) \ge 0$, т. е. $X(t) \le X_2(t)$ при $t \ge 0$. Поэтому из позитивности системы (13) вытекает позитивность каждой системы семейства (11), (12). В случае $X(t) \ge 0$ неравенства (12) выше используются лишь при $X \in \mathcal{K}$.

Лемма доказана.

Теорема 3. *Если система* (14) *асимптотически устойчива, а система* (13) *позитивна, то каждая линейная система из семейства* (11), (12) *асимптотически устойчива и позитивна.*

Доказательство проводится с помощью леммы 7 с учетом свойств нормального воспроизводящего конуса.

Отметим, что для стационарных систем из монотонной обратимости операторов $\underline{M}$ и $\overline{M}$ вытекает монотонная обратимость каждого оператора M из отрезка $\underline{M} \le M \le \overline{M}$. Из теорем 1 и 3, в частности, следует, что оператор M монотонно обратим, если выполнены соотношения $e^{-\overline{M}t} \ge 0$ и $\operatorname{Re}\lambda > 0$ для любых $t \ge 0$, $\lambda \in \sigma(\underline{M})$.

6. Системы сравнения. В теории устойчивости применяются методы сравнения, основанные на отображении пространства состояний исходной системы в пространства состояний вспомогательных изученных систем. В качестве систем сравнения можно использовать классы позитивных и монотонных систем, в частности системы, удовлетворяющие условиям теорем типа Чаплыгина и Важевского [9 – 11]. При этом могут оказаться полезными утверждения теорем 1 – 3 и лемм 3, 4 и 7.

Рассмотрим дифференциальную систему

$$\dot{x} = f(x, t), \quad x \in \mathcal{X}, \quad t \geq 0, \tag{15}$$

где f — оператор, обеспечивающий существование и единственность решений $x(t)$. В пространстве $\mathcal{E}$, полуупорядоченном нормальным воспроизводящим конусом $\mathcal{K}$, построим системы вида

$$\dot{X} = F(X, t), \quad X \in \mathcal{E}, \quad t \geq 0, \tag{16}$$

используемые в качестве систем сравнения для системы (15).

Через Σ_+ обозначим класс систем (16), между множествами решений которых и решений дифференциальных неравенств

$$\dot{Z} \leq F(Z, t), \quad Z \in \mathcal{E}, \quad t \geq 0,$$

можно установить такое соответствие, что из $X(t_0) \geq Z(t_0)$ следует $X(t) \geq Z(t)$ при $t > t_0 \geq 0$. Пусть $E(x, t)$ — оператор, непрерывно отображающий некоторую окрестность точки $x = 0 \in \mathcal{X}$ при $t \geq t_0$ в пространство $\mathcal{E}$. Если выражение $E(x, t)$ и его обобщенная производная в силу системы (15) удовлетворяют соотношению

$$D_t E(x, t)\big|_{(15)} \leq F(E(x, t), t), \tag{17}$$

то система (16) класса Σ_+ является верхней системой сравнения для системы (15), т. е.

$$E(x(t_0), t_0) \leq X(t_0) \quad \Rightarrow \quad E(x(t), t) \leq X(t), \quad t \geq t_0. \tag{18}$$

В (17) производную в силу системы (15) можно определить в виде

$$D_t E(x, t)\big|_{(15)} = \limsup_{h \to 0+} \frac{1}{h}\left[E(x + hf(x, t),\, t + h) - E(x, t)\right].$$

Аналогично определяются класс систем Σ_- и нижние системы сравнения, при этом все используемые знаки неравенств в пространстве $\mathcal{E}$ заменяются на противоположные. Очевидно, каждая система класса Σ_+ при условии $F(0, t) \geq$ ≥ 0 должна быть позитивной, а каждая система из $\Sigma_+ \bigcup \Sigma_-$ — монотонной.

Если в (17) выполняется равенство

$$D_t E(x, t)\big|_{(15)} = F(E(x, t), t), \tag{19}$$

то из определения свойства монотонности системы (16) получаем

$$X_1(t_0) \leq E(x(t_0), t_0) \leq X_2(t_0) \Rightarrow X_1(t) \leq E(x(t), t) \leq X_2(t), \quad t \geq t_0, \tag{20}$$

где $X_1(t)$ и $X_2(t)$ — некоторые решения данной системы. Это означает, что монотонная система (16) при условии (19) является одновременно нижней и верхней системами сравнения для системы (15).

Оценки (18) и (20) можно использовать для сравнения динамических свойств систем (15) и (16). Например, если оператор E выбран так, что $E(x, t) \leq 0$ лишь при $x = 0$, то из (18) и $X(t) \to 0$ следует $x(t) \to 0$, $t \to \infty$. При построении позитивных или монотонных на конусе систем сравнения оператор E можно выбрать всюду положительным. Например, для линейной системы $\dot{x} = A(t)x$, полагая $E(x, t) = xx^T \geq 0$, согласно (17) имеем верхнюю матричную систему сравнения

$$\dot{X} - A(t)X - XA^T(t) = G(X, t) \geq 0, \quad X \in R^{n \times n}. \tag{21}$$

Данная система позитивна относительно конуса неотрицательно определенных матриц. Из асимптотической устойчивости матричного уравнения (21) вытекает асимптотическая устойчивость исходной системы.

Нижние и верхние системы сравнения вида (16) можно строить одновременно в разных полуупорядоченных пространствах $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$. При этом свойства соответствующих операторов $E_1(x, t)$ и $E_2(x, t)$, а также отношений порядка, определяемых конусами $\mathcal{K}_1 \subset \mathscr{E}_1$ и $\mathcal{K}_2 \subset \mathscr{E}_2$ в соотношениях

$$E_1(x(t), t) \geq X_1(t); \quad E_2(x(t), t) \leq X_2(t),$$

должны быть согласованы с целью изучения определенных характеристик исходной системы (15). Например, можно потребовать, чтобы система неравенств $E_1(x, t) \geq 0$, $E_2(x, t) \leq 0$ выполнялась лишь при $x = 0$. В этом случае следует ожидать, что $x(t) \to 0$ при $t \to \infty$, если $X_1(t) \to 0$ и $X_2(t) \to 0$. Если операторы E_1 и E_2 совпадают, то данное свойство вытекает из леммы о двух милиционерах в полуупорядоченном пространстве [1].

Задача сравнения систем (15) и (16) усложняется без требования о единственности решений. В [9, 10] рассматриваются системы сравнения вида (16) в полуупорядоченном пространстве R^n при использовании понятия максимального и минимального решений, а также обобщенные производные Дини вектор-функции $E(x, t)$ на решениях исходной системы (15). При этом $E(x, t)$ должна быть локально липшицевой функцией по x, а вектор-функция $F(X, t)$ — квазимонотонно неубывающей по X относительно конуса $\mathcal{K} \subset R^n$, т. е. $F \in \mathcal{F}$. Данное свойство обеспечивает принадлежность системы (16) классам Σ_+ и Σ_-, а в случае конуса неотрицательных векторов сводится к условиям Важевского (см. п. 3).

1. *Красносельский М. А., Лифшиц Е. А., Соболев А. В.* Позитивные линейные системы. – М.: Наука, 1985. – 256 с.
2. *Красносельский М. А.* Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1966. – 332 с.
3. *Клемент Ф., Хейманс Х., Ангенент С., ван Дуйн К., де Пахтер Б.* Однопараметрические полугруппы. – М.: Мир, 1992. – 352 с.
4. *Мазко А. Г.* Устойчивость линейных позитивных систем // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 3. – С. 323–330.
5. *Мазко А. Г.* Локализация спектра и устойчивость динамических систем // Пр. Ін-ту математики НАН України. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1999. – **28**. – 216 с.
6. *Мильштейн Г. Н.* Экспоненциальная устойчивость положительных полугрупп в линейном топологическом пространстве // Изв. вузов. Математика. – 1975. – № 9. – С. 35–42.
7. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 535 с.
8. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 472 с.
9. *Матросов В. М., Анапольский Л. Ю., Васильев С. Н.* Метод сравнения в математической теории систем. – Новосибирск: Наука, 1980. – 480 с.
10. *Лакшмикантам В., Лила С., Мартынюк А. А.* Устойчивость движения: метод сравнения. – Киев: Наук. думка, 1991. – 248 с.
11. *Постников Н. С., Сабаев Е. Ф.* Матричные системы сравнения и их приложения к задачам автоматического регулирования // Автоматика и телемеханика. – 1980. – № 4. – С. 24–34.

Получено 27.04.2001