УДК 517.5

А. И. Степанец (Ин-т математики НАН Украины, Киев),
В. И. Рукасов (Славян. пед. ун-т)

ПРОСТРАНСТВА S^p С НЕСИММЕТРИЧНОЙ МЕТРИКОЙ

We find exact values of the best approximations and the Kolmogorov widths of q ellipsoids in spaces $S_\varphi^{p,\mu}$ that are defined by an anisotropic metric.

Знайдено точні значення найкращих наближень та поперечників за Колмогоровим q-еліпсоїдів у просторах $S_\varphi^{p,\mu}$, що визначаються анізотропною метрикою.

В настоящей работе обобщаются пространства S_φ^p, рассматриваемые в [1 – 5]. Обобщение заключается в том, что нормы элементов пространств определяются несколько более сложным образом — агрегаты, задающие нормы, включают теперь весовые множители. Это позволяет расширить круг приложений полученных общих результатов. Изложение материала проводится по схеме работ [1 – 4]. Однако полученные здесь основные результаты непосредственно не следуют из отмеченных работ.

1. Пространства $S_\varphi^{p,\mu}$. Пусть $\mathfrak{X}$ — произвольное линейное комплексное пространство и $\varphi = \{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ — фиксированная счетная система в нем. Предположим, что для любой пары $x, y \in \mathfrak{X}$, в которой хотя бы один из векторов принадлежит φ, определено скалярное произведение (x, y), удовлетворяющее условиям:

1) $(x, y) = \overline{(y, x)}$, где $\bar{z}$ — число, комплексно сопряженное с z;
2) $(\lambda x_1 + \nu x_2; y) = \lambda(x_1, y) + \nu(x_2, y)$, λ, ν — произвольные числа;
3) $(\varphi_k, \varphi_l) = \begin{cases} 0, & k \neq l; \\ 1, & k = l. \end{cases}$

Пусть, далее, $\mu = \{\mu_k\}_{k=1}^\infty$ — произвольная система неотрицательных чисел, $\mu_k \geq 0$, $k \in N = \{1, 2, \ldots\}$.

Каждому элементу $f \in \mathfrak{X}$ сопоставим систему чисел $\hat{f}(k) = \hat{f}_\varphi(k)$ посредством равенств

$$\hat{f}(k) = \hat{f}_\varphi(k) = (f, \varphi_k), \quad k \in N,$$

и при данном фиксированном $p \in (0, \infty)$ положим

$$S_\varphi^{p,\mu} = S_\varphi^{p,\mu}(\mathfrak{X}) = \left\{ f \in \mathfrak{X} : \sum_{k=1}^\infty \left| \mu_k \hat{f}_\varphi(k) \right|^p < \infty \right\}. \tag{1}$$

Элементы $x, y \in S_\varphi^{p,\mu}$ считаются тождественными, если при всех $k \in N$ $\hat{x}_\varphi(k) = \hat{y}_\varphi(k)$. Таким образом, множество $S_\varphi^{p,\mu}$ порождается пространством $\mathfrak{X}$, системами φ, μ и числом p. В случае, когда

$$\mu_k \equiv 1, \quad k \in N, \tag{2}$$

множества $S_\varphi^{p,\mu}$ совпадают с множествами S_φ^p, которые введены и изучались в [1 – 5].

Для векторов $x, y \in \mathfrak{X}$ определим расстояние между ними с помощью равенства

© А. И. СТЕПАНЕЦ, В. И. РУКАСОВ, 2003

$$\rho(x, y)_{p,\mu} \stackrel{\text{df}}{=} \| x-y \|_{p,\mu} = \| x-y \|_{p,\mu,\varphi} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left| \hat{x}_\varphi(k) - \hat{y}_\varphi(k) \right|^p \mu_k^p \right)^{1/p}.$$

Нулевым элементом пространства $S_\varphi^{p,\mu}$ называется вектор θ, для которого $\hat{\theta}_\varphi(k) = 0$ при всех $k \in N$. Расстояние $\rho(\theta, x)_{p,\mu}$, $x \in S_\varphi^{p,\mu}$, называется нормой элемента x и обозначается через $\| x \|_{p,\mu}$. Таким образом,

$$\| x \|_{p,\mu} = \| x \|_{p,\mu,\varphi} = \rho(\theta, x)_{p,\mu} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left| \mu_k \hat{x}_\varphi(k) \right|^p \right)^{1/p}, \quad x \in S_\varphi^{p,\mu}. \qquad (3)$$

Множество $S_\varphi^{p,\mu}$ — линейное пространство: операции сложения векторов и умножения их на числа, определенные во всем $\mathfrak{X}$, пригодны и для любой пары $x, y \in S_\varphi^{p,\mu}$. Кроме того, для любых чисел λ и ν $\lambda x + \nu y = z \in S_\varphi^{p,\mu}$. Действительно, поскольку $z \in \mathfrak{X}$, то $\hat{z}(k) = \lambda \hat{x}(k) + \nu \hat{y}(k)$, и если $p \geq 1$, то в силу неравенства Минковского

$$\| z \|_{p,\mu} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda \hat{x}(k) + \nu \hat{y}(k)|^p \mu_k^p \right)^{1/p} \leq |\lambda| \| x \|_{p,\mu} + |\nu| \| y \|_{p,\mu}.$$

Если же $p \in (0, 1)$, то, используя неравенство

$$|a+b|^p \leq |a|^p + |b|^p, \quad 0 \leq p < 1,$$

которое выполняется для любых чисел a и b, имеем

$$\| z \|_{p,\mu} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda \hat{x}(k) + \nu \hat{y}(k)|^p \mu_k^p \right)^{1/p} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda \mu_k \hat{x}(k) + \nu \mu_k \hat{y}(k)|^p \right)^{1/p} \leq$$

$$\leq \left(|\lambda|^p \sum_{k=1}^{\infty} |\hat{x}(k)|^p \mu_k^p + |\nu|^p \sum_{k=1}^{\infty} |\hat{y}(k)|^p \mu_k^p \right)^{1/p} \leq 2^{1/p} (|\lambda| \| x \|_{p,\mu} + |\nu| \| y \|_{p,\mu}).$$

Таким образом, $z \in S_\varphi^{p,\mu}$.

Если в системе μ все числа μ_k отличны от нуля: $\mu_k > 0$, $k \in N$, то равенство $\| x \|_{p,\mu} = 0$ возможно лишь в случае, когда $x = \theta$. Отсюда следует, что при $p \geq 1$ и $\mu_k > 0$, $k \in N$, норма, введенная равенством (3), удовлетворяет всем необходимым аксиомам и тогда $S_\varphi^{p,\mu}$ — линейное нормированное пространство, содержащее ортогональную систему $\varphi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$, причем $\| \varphi_k \|_{p,\mu} = \mu_k$.

Пространства $S_\varphi^{p,\mu}$ подобно пространствам S_φ^p наследуют важнейшие свойства гильбертовых пространств — равенство Парсеваля в виде соотношения (3) и минимальное свойство частных сумм Фурье, которое формулируется следующим образом.

Предложение 1. *Пусть* $\{g_\alpha\}$ — *семейство ограниченных подмножеств множества* N, *зависящих от параметра* α *и таких, что любое число* $n \in N$ *принадлежит всем множествам* g_α *с достаточно большими индексами* α. *Пусть, далее,* $f \in S_\varphi^{p,\mu}$, $p \in (0, \infty)$, *и*

$$S_\alpha(f) = S_{g_\alpha}(f) = \sum_{k \in g_\alpha} \hat{f}(k) \varphi_k$$

— *частная сумма ряда Фурье* $S[f]_\varphi$ *элемента* f,

$$S[f]_\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{f}(k)\varphi_k, \tag{4}$$

соответствующая множеству g_α. *Тогда среди всех сумм вида*

$$\Phi_\alpha = \sum_{k\in g_\alpha} c_k\varphi_k$$

наименее уклоняется от f *в пространстве* $S_\varphi^{p,\mu}$ *частная сумма* $S_\alpha(f)$, *т. е.*

$$\inf_{c_k} \|f-\Phi_\alpha\|_{p,\mu} = \|f-S_\alpha(f)\|_{p,\mu}. \tag{5}$$

При этом

$$\|f-S_\alpha(f)\|_{p,\mu}^p = \|f\|_{p,\mu}^p - \sum_{k\in g_\alpha} \left|\mu_k\hat{f}(k)\right|^p \tag{6}$$

и

$$\lim_{\alpha\to\infty} \|f-S_\alpha(f)\|_{p,\mu} = 0. \tag{7}$$

Доказательство. Согласно (3) имеем

$$\inf_{c_k}\left\| f - \sum_{k\in g_\alpha} c_k\varphi_k\right\|_{p,\mu}^p = \inf_{c_k}\sum_{k=1}^{\infty}\left|\left(\widehat{f - \sum_{k\in g_\alpha} c_k\varphi_k}\right)_\varphi(k)\right|^p \mu_k^p =$$

$$= \inf_{c_k}\left(\sum_{k\in g_\alpha}\left|\hat{f}(k)-c_k\right|^p\mu_k^p + \sum_{k\,\overline{\in}\, g_\alpha}\left|\mu_k\hat{f}(k)\right|^p\right) = \sum_{k\,\overline{\in}\, g_\alpha}\left|\mu_k\hat{f}(k)\right|^p =$$

$$= \|f\|_{p,\mu}^p - \sum_{k\in g_\alpha}\left|\mu_k\hat{f}(k)\right|^p = \|f-S_\alpha(f)\|_{p,\mu}^p,$$

что и доказывает соотношения (5) и (6). Поскольку $f\in S_\varphi^{p,\mu}$, в силу (1) правая часть в (6) стремится к нулю при $\alpha\to\infty$, откуда следует и (7).

Из доказанного утверждения вытекает следующее предложение.

Предложение 1′. *Пусть* $f\in S_\varphi^{p,\mu}$, $p\in(0,\infty)$, *и*

$$S_n(f) = S_n(f)_\varphi = \sum_{k=1}^{n}\hat{f}(k)\varphi_k, \quad n\in N,$$

— *частная сумма ряда* (4). *Тогда среди всех сумм вида*

$$\Phi_n = \sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k$$

при данном $n\in N$ *наименее уклоняется от* f *в пространстве* $S_\varphi^{p,\mu}$ *частная сумма* $S_n(f)$, *т. е.*

$$\inf_{c_k}\|f-\Phi_n\|_{p,\mu} = \|f-S_n(f)\|_{p,\mu}.$$

При этом

$$\|f-S_n(f)\|_{p,\mu}^p = \|f\|_{p,\mu}^p - \sum_{k=1}^{n}\left|\mu_k\hat{f}(k)\right|^p$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \|f - S_n(f)\|_{p,\mu} = 0. \tag{8}$$

Из (8) следует, что для любого элемента $f \in S_\varphi^{p,\mu}$ его ряд Фурье (4) по системе φ сходится к f по норме пространства $S_\varphi^{p,\mu}$, т. е. система φ полна в $S_\varphi^{p,\mu}$ и $S_\varphi^{p,\mu}$ сепарабельно.

2. ψ-Интегралы и характеристические последовательности. Выделим в пространствах $S_\varphi^{p,\mu}$ объекты, для которых в п. 3 изучаются их аппроксимационные характеристики.

Пусть $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ — произвольная система комплексных чисел. Если для данного элемента $f \in \mathfrak{X}$, ряд Фурье которого имеет вид (4), существует элемент $F \in \mathfrak{X}$, для которого

$$S[F]_\varphi = \sum_{k=1}^\infty \psi_k \hat{f}(k)\varphi_k, \tag{9}$$

т. е. когда

$$\hat{F}_\varphi(k) = \psi_k \hat{f}(k), \qquad k \in N, \tag{10}$$

то вектор F называется ψ-интегралом вектора f. В таком случае записываем $F = \mathcal{J}^\psi f$. Если $\mathfrak{N}$ — некоторое подмножество из $\mathfrak{X}$, то через $\psi\mathfrak{N}$ обозначается множество ψ-интегралов всех элементов из $\mathfrak{N}$. В частности, $\psi S_\varphi^{p,\mu}$ — множество ψ-интегралов всех векторов, принадлежащих данному пространству $S_\varphi^{p,\mu}$.

Если f и F связаны соотношением (9) (или (10)), то иногда удобно f называть ψ-производной элемента F и писать $f = D^\psi F = F^\psi$.

В дальнейшем предполагается, что система ψ подчинена условию

$$\lim_{k\to\infty} |\psi_k| = 0. \tag{11}$$

Ясно, что это условие обеспечивает включение $\psi S_\varphi^{p,\mu} \subset S_\varphi^{p,\mu}$ и для такого включения необходимым и достаточным является условие ограниченности множества чисел $|\psi_k|$, $k \in N$.

Пусть

$$U_\varphi^{p,\mu} = \{f \in S_\varphi^{p,\mu} : \|f\|_{p,\mu} \le 1\} \tag{12}$$

— единичный шар в данном пространстве $S_\varphi^{p,\mu}$ и $\psi U_\varphi^{p,\mu}$ — множество ψ-интегралов всех элементов из $U_\varphi^{p,\mu}$. Именно множества $\psi U_\varphi^{p,\mu}$ являются основными объектами, чьи аппроксимационные характеристики изучаются в настоящей работе. Этим объектам в теории приближения функций соответствуют классы функций. Заметим также, что если

$$\psi_k \ne 0 \qquad \forall k \in N,$$

то в силу (10) и (12)

$$\psi U_\varphi^{p,\mu} = \left\{ f \in S_\varphi^{p,\mu} : \sum_{k=1}^\infty \left| \mu_k \frac{\hat{f}(k)}{\psi_k} \right|^p \le 1 \right\},$$

т. е. множество $\psi U_\varphi^{p,\mu}$ является p-эллипсоидом в пространстве $S_\varphi^{p,\mu}$ с полуосями, равными $|\psi_k|$.

3. Приближающие агрегаты и аппроксимационные характеристики. Конструкция агрегатов, используемых для приближения элементов $f \in S_\varphi^{p,\mu}$, определяется характеристическими последовательностями $\varepsilon(\psi)$, $g(\psi)$ и $\delta(\psi)$ системы ψ, которые задаются следующим образом.

Пусть $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ — произвольная система комплексных чисел, удовлетворяющая условию (11). Тогда через $\varepsilon(\psi) = \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ обозначается множество значений величин $|\psi_k|$, упорядоченное по их убыванию, через $g(\psi) = g_1, g_2, \ldots$ — система множеств

$$g_n = g_n^\psi = \{k \in N : |\psi_k| \geq \varepsilon_n\}$$

и через $\delta(\psi) = \delta_1, \delta_2, \ldots$ — последовательность чисел $\delta_n = |g_n|$, где $|g_n|$ — количество чисел $k \in N$, содержащихся в множестве g_n. Последовательности $\varepsilon(\psi)$, $g(\psi)$ и $\delta(\psi)$ называются характеристическими для системы ψ. Заметим, что при таком определении любое число $n^* \in N$ принадлежит всем множествам g_n^ψ с достаточно большими номерами n и

$$\lim_{k \to \infty} \delta_k = \infty.$$

В дальнейшем удобно через $g_0 = g_0^\psi$ обозначать пустое множество и считать, что $\delta_0 = 0$.

Пусть множество $S_\varphi^{p,\mu}$ порождается пространством $\mathfrak{X}$, системами φ, μ и числом p, $p > 0$, и $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ — произвольная система комплексных чисел, удовлетворяющая условию (11).

В качестве приближающих агрегатов для элементов $f \in \psi S_\varphi^{p,\mu}$ будем рассматривать полиномы

$$S_n(f)_{\varphi,\psi} = S_{g_n^\psi}(f) = \sum_{k \in g_n^\psi} \hat{f}(k)\varphi_k, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad S_0(f)_{\varphi,\psi} = \theta, \tag{13}$$

где g_n^ψ — элементы последовательности $g(\psi)$, θ — нулевой вектор пространства $S_\varphi^{p,\mu}$. При этом полагаем

$$\begin{gathered} \mathcal{E}_n(f)_{\psi,p,\mu} = \|f - S_{n-1}(f)_{\varphi,\psi}\|_{p,\mu}, \\ \mathcal{E}_n(\psi U_\varphi^{q,\mu})_{\psi,p,\mu} = \sup_{f \in \psi U_\varphi^{q,\mu}} \mathcal{E}_n(f)_{\psi,p,\mu}, \quad p, q > 0. \end{gathered} \tag{14}$$

Величина $\mathcal{E}_n(f)_{\psi,p,\mu}$ называется приближением элемента $f \in S_\varphi^{p,\mu}$ суммами Фурье, построенными по областям g_{n-1}^ψ, а $\mathcal{E}_n(\psi U_\varphi^{q,\mu})_{\psi,p,\mu}$ — приближением множества $\psi U_\varphi^{q,\mu}$ такими суммами в пространстве $S_\varphi^{p,\mu}$. Пусть, далее,

$$E_n(f)_{\psi,p,\mu} = \inf_{c_k} \left\| f - \sum_{k \in g_{n-1}^\psi} c_k \varphi_k \right\|_{p,\mu}$$

— наилучшее приближение элемента $f \in \psi S_\varphi^{p,\mu}$ полиномами, построенными по областям g_{n-1}^ψ, и

$$E_n(\psi U_\varphi^{q,\mu})_{\psi,p,\mu} = \sup_{f \in \psi U_\varphi^{q,\mu}} E_n(f)_{\psi,p,\mu}, \quad p, q > 0, \tag{15}$$

— наилучшее приближение множества $\psi U_\varphi^{q,\mu}$ такими полиномами.

Как обычно,

$$d_n(\mathfrak{M}; Y) = \inf_{F_n \in \mathcal{F}_n} \sup_{x \in \mathfrak{M}} \inf_{u \in F_n} \|x - u\|_Y$$

— поперечник по Колмогорову множества $\mathfrak{M}$ в пространстве Y. Здесь $\mathcal{F}_n$ — множество всех подпространств размерности $n \in N$ пространства Y. Согласно неравенству Иенсена, для любой неотрицательной последовательности $a = \{a_k\}_{k=1}^\infty$, $a_k \geq 0$,

$$\left(\sum_{k=1}^\infty a_k^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^\infty a_k^q\right)^{1/q}, \quad 0 < q \leq p.$$

Поэтому справедливы включения

$$S_\varphi^{q,\mu} \subset S_\varphi^{p,\mu}, \quad 0 < q \leq p, \tag{16}$$

и

$$\psi U_\varphi^{q,\mu} \subset \psi U_\varphi^{p,\mu}, \quad 0 < q \leq p. \tag{17}$$

Отсюда, в частности, заключаем, что величины (14) и (15) корректно определены по крайней мере для всех систем ψ, удовлетворяющих условию (11), в предположении, что $0 < q \leq p$.

4. Наилучшие приближения и поперечники q-эллипсоидов. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ — система чисел, удовлетворяющая условию* (11). *Тогда при любых $n \in N$ и $0 < q \leq p < \infty$ выполняются соотношения*

$$E_n(\psi U_\varphi^{q,\mu})_{\psi,p,\mu} \leq \mathscr{E}_n(\psi U_\varphi^{q,\mu})_{\psi,p,\mu} \leq \varepsilon_n. \tag{18}$$

Если при этом

$$\mu_k \neq 0 \quad \text{и} \quad \psi_k \neq 0 \qquad \forall k \in N, \tag{19}$$

то в (18) *знаки неравенств заменяются знаками равенств. Величина ε_n — n-й член характеристической последовательности $\varepsilon(\psi)$.*

Построенные по областям g_n^ψ частные суммы вида (13) являются оптимальным аппаратом приближения элементов из множеств $\psi U_\varphi^{q,\mu}$ в смысле колмогоровских поперечников. Точнее, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть системы $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ и $\mu = \{\mu_k\}_{k=1}^\infty$ удовлетворяют условиям* (11) *и* (19) *и*

$$d_\nu(\psi U_\varphi^{p,\mu})_{p,\mu} = d_\nu(\psi U_\varphi^{p,\mu}; S_\varphi^{p,\mu}) =$$

$$= \inf_{F_n \in \mathcal{F}_n} \sup_{f \in \psi U_\varphi^{p,\mu}} \inf_{u \in F_n} \|f - u\|_{p,\mu}, \quad \nu = 0, 1, \ldots,$$

— поперечники по Колмогорову множеств $\psi U_\varphi^{p,\mu}$ в пространстве $S_\varphi^{p,\mu}$. Тогда при любых $p \in [1, \infty)$ и $n \in N$ выполняются равенства

$$d_{\delta_{n-1}}(\psi U_\varphi^{p,\mu})_{p,\mu} = d_{\delta_{n-1}+1}(\psi U_\varphi^{p,\mu})_{p,\mu} = \ldots = d_{\delta_n - 1}(\psi U_\varphi^{p,\mu})_{p,\mu} = \varepsilon_n,$$

в которых δ_s и ε_s, $s = 1, 2, \ldots,$ — элементы характеристических последовательностей $\delta(\psi)$ и $\varepsilon(\psi)$ системы ψ, а $\delta_0 = 0$.

Утверждения теорем 1 и 2 будут следовать из доказанных ниже теорем 1′ и 2′. Пусть теперь наряду с числами p, q и последовательностью $\mu = \{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ задана последовательность $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ неотрицательных чисел, среди которых имеется хотя бы одно отличное от нуля. По данному пространству $\mathfrak{X}$ и системе φ построим множества $S_{\varphi}^{p,\mu}$ и $S_{\varphi}^{q,\lambda}$. Если $0 < q \le p$ и последовательности λ и μ совпадают, то справедливы включения (16) и (17). Ясно также, что при любом $p \in (0, \infty)$ будет выполняться включение

$$S_{\varphi}^{p,\lambda} \subset S_{\varphi}^{p,\mu}$$

при условии, что

$$\lambda_k \ge C\mu_k \qquad \forall\, k \in N,$$

где C — любая положительная постоянная. Поэтому справедливо включение

$$S_{\varphi}^{q,\lambda} \subset S_{\varphi}^{p,\mu} \qquad \forall\, p, q, \quad 0 < q \le p, \quad \lambda_k \ge C\mu_k \qquad \forall\, k \in N. \tag{20}$$

Получим аналоги теорем 1 и 2 в случае, когда приближаемые элементы находятся в пространстве $S_{\varphi}^{q,\lambda}$, а приближение ищется в пространстве $S_{\varphi}^{p,\mu}$. В этом случае приближающие агрегаты будут строиться опять согласно формулам (13), только на этот раз в качестве последовательности ψ, входящей в определение областей g_n^{ψ} и последовательности $\varepsilon(\psi)$, будет выступать последовательность

$$\psi' = \{\psi'_k\}_{k=1}^{\infty} = \left\{\psi_k \frac{\mu_k}{\lambda_k}\right\}_{k=1}^{\infty}, \tag{21}$$

в которой числа ψ_k, $k \in N$, те же, что и в определении приближаемых множеств $\psi U_{\varphi}^{q,\lambda}$.

Теорема 1′. *Пусть* $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\mu = \{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ *и* $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — *фиксированные последовательности, подчиняющиеся условию*

$$\lim_{k\to\infty} \psi_k \frac{\mu_k}{\lambda_k} = 0. \tag{22}$$

Тогда при любых $n \in N$ *и* $0 < q \le p$ *выполняются соотношения*

$$E_n(\psi U_{\varphi}^{q,\lambda})_{\psi',p,\mu} \le \mathcal{E}_n(\psi U_{\varphi}^{q,\lambda})_{\psi',p,\mu} \le \varepsilon'_n, \tag{23}$$

где

$$E_n(\psi U_{\varphi}^{q,\lambda})_{\psi',p,\mu} = \sup_{f\in\psi U_{\varphi}^{q,\lambda}} E_n(f)_{\psi',p,\mu},$$

$$E_n(f)_{\psi',p,\mu} = \inf_{c_k} \left\| f - \sum_{k\in g_{n-1}^{\psi'}} c_k\varphi_k \right\|_{p,\mu},$$

и

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_n(\psi U_{\varphi}^{q,\lambda})_{\psi',p,\mu} &= \sup_{f\in\psi U_{\varphi}^{q,\lambda}} \mathcal{E}_n(f)_{\psi',p,\mu}, \\ \mathcal{E}_n(f)_{\psi',p,\mu} &= \|f - S_{n-1}(f)_{\varphi,\psi'}\|_{p,\mu}, \end{aligned} \tag{24}$$

ε'_n *и* $g_{n-1}^{\psi'}$ — *члены характеристической последовательности системы* (21).

Если при этом выполнены условия (19), *то в* (23) *знаки неравенств заменяются знаками равенств.*

Доказательство. В силу соотношений (24), (6), (10) и (20) для любого элемента $f \in \psi U_\varphi^{q,\lambda}$, полагая $\|\cdot\|_{p,\mu} = \|\cdot\|$, имеем

$$\mathscr{E}_n(f)_{\psi',p,\mu} = \left\| \sum_{k \bar{\in} g_{n-1}^{\psi'}} \hat{f}_\varphi(k)\varphi_k \right\| = \left\| \sum_{k \bar{\in} g_{n-1}^{\psi'}} \psi_k \hat{f}_\varphi^\psi(k)\varphi_k \right\| =$$

$$= \left(\sum_{k \bar{\in} g_{n-1}^{\psi'}} |\psi'_k|^p \left|\hat{f}_\varphi^\psi(k)\right|^p |\lambda_k|^p \right)^{1/p} \le \varepsilon'_n \left\| f^\psi \right\|_{p,\lambda} \le \varepsilon'_n \left\| f^\psi \right\|_{q,\lambda} = \varepsilon'_n.$$

Таким образом,

$$\mathscr{E}_n(f)_{\psi',p,\mu} \le \varepsilon'_n \qquad \forall f \in \psi U_\varphi^{q,\lambda},$$

откуда и следуют оценки (23).

Пусть теперь выполнены условия (19) и k' — любая точка из множества $\gamma' = g_n^{\psi'} \setminus g_{n-1}^{\psi'}$. Положим $f_* = \dfrac{\psi_{k'}}{\lambda_{k'}} \varphi_{k'}$, так что $f_*^\psi = \dfrac{\varphi_{k'}}{\lambda_{k'}}$. Видим, что $\left\| f_*^\psi \right\|_{q,\lambda} = 1$. Следовательно, $f_* \in \psi U_\varphi^{q,\lambda}$. В то же время

$$\|f_*\| = \|f_*\|_{p,\mu,\varphi} = \left| \frac{\psi_{k'}\mu_{k'}}{\lambda_{k'}} \right| = \varepsilon'_n.$$

Значит,

$$E_n(f_*)_{\psi',p,\mu} = \|f_*\|_{p,\mu,\varphi} = \varepsilon'_n.$$

Поэтому с учетом (23) будем иметь

$$E_n(\psi U_\varphi^{q,\lambda})_{\psi',p,\mu} = \mathscr{E}_n(\psi U_\varphi^{q,\lambda})_{\psi',p,\mu} = \varepsilon'_n, \tag{25}$$

что и завершает доказательство теоремы.

Теорема 2′. *Пусть системы* $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ *и* $\mu = \{\mu_k\}_{k=1}^\infty$ *удовлетворяют условиям* (11) *и* (19). *Тогда для любой последовательности* $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$, *для которой выполняется условие* (22), *при любых* $p \in [1, \infty)$ *и* $n \in N$ *справедливы равенства*

$$d_{\delta'_{n-1}}(\psi U_\varphi^{p,\lambda})_{p,\mu} = d_{\delta'_{n-1}+1}(\psi U_\varphi^{p,\lambda})_{p,\mu} = \ldots = d_{\delta'_n-1}(\psi U_\varphi^{p,\lambda})_{p,\mu} = \varepsilon'_n, \tag{26}$$

в которых δ'_s *и* ε'_s, $s = 1, 2, \ldots,$ — *элементы характеристических последовательностей* $\delta(\psi')$ *и* $\varepsilon(\psi')$ *системы* (21), *а* $\delta'_0 = 0$.

Доказательство. Подпространство $\Phi_{n-1}^{\psi'}$ полиномов

$$\Phi'_{n-1} = \sum_{k \in g_{n-1}^{\psi'}} a_k \varphi_k$$

имеет размерность δ'_{n-1}. Поэтому с учетом (25) имеем

$$\varepsilon'_n = E_n(\psi U_\varphi^{p,\lambda})_{\psi',p,\mu} \ge d_{\delta'_{n-1}}(\psi U_\varphi^{p,\lambda})_{p,\mu} \ge$$

$$\ge d_{\delta'_{n-1}+1}(\psi U_\varphi^{p,\lambda})_{p,\mu} \ge \ldots \ge d_{\delta'_n-1}(\psi U_\varphi^{p,\lambda})_{p,\mu}$$

и для доказательства равенств (26) остается показать, что

$$d_{\delta'_n - 1}(\psi U_\varphi^{p,\lambda})_{p,\mu} \geq \varepsilon'_n, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Для этого с учетом известной теоремы Тихомирова о поперечнике шара достаточно убедиться, что множество

$$\varepsilon'_n U^{\psi}_{n,\Phi'} = \{\Phi'_n \in \Phi_n^{(\psi')} : \|\Phi'_n\|_{p,\mu} \leq \varepsilon'_n\} \tag{27}$$

содержится в множестве $\psi U_\varphi^{p,\lambda}$.

Если $\Phi'_n \in \varepsilon'_n U^{\psi}_{n,\Phi'}$, то для ψ-производной элемента Φ'_n с учетом (27) имеем

$$\|(\Phi'_n)^{\psi}\|_{p,\lambda} = \left\| \sum_{k \in g_n^{\psi'}} \frac{a_k}{\psi_k} \varphi_k \right\|_{p,\lambda} =$$

$$= \left(\sum_{k \in g_n^{\psi'}} \frac{|a_k|^p}{|\psi_k|^p} |\lambda_k|^p \right)^{1/p} = \left(\sum_{k \in g_n^{\psi'}} \frac{|a_k|^p |\lambda_k|^p |\mu_k|^p}{|\mu_k|^p |\psi_k|^p} \right)^{1/p} \leq$$

$$\leq \sup_{k \in g_n^{\psi'}} \frac{|\lambda_k|}{|\mu_k \psi_k|} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k \mu_k|^p \right)^{1/p} \leq 1.$$

Таким образом, действительно $\varepsilon'_n U^{\psi}_{n,\Phi'} \subset \psi U_\varphi^{p,\lambda}$, что завершает доказательство теоремы при $n > 1$. При $n = 1$ ее доказательство не изменяется, если принять, что Φ_0^{ψ} состоит из элемента θ и его размерность равна нулю.

5. Величины $\sigma_n(\psi U_\varphi^{q,\lambda})_{p,\mu}$. Пусть $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ — произвольная последовательность комплексных чисел, $\varepsilon(x) = \{\varepsilon_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, $g(x) = \{g_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ и $\delta(x) = \{\delta_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ — ее характеристические последовательности. Обозначим через $\bar{x} = \{\bar{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$ перестановку последовательности $\{|x_k|\}_{k=1}^{\infty}$ в убывающем порядке. Ясно, что значения $\bar{x}_k$, $k \in N$, можно определить согласно формулам

$$\bar{x}_k = \varepsilon_n(x), \quad k \in (\delta_{n-1}(x), \delta_n(x)], \quad n \in N, \quad \delta_0 = 0.$$

В этих обозначениях равенство (26) принимает вид

$$d_n(\psi U_\varphi^{p,\lambda})_{p,\mu} = \overline{\psi}'_n, \quad n \in N, \tag{26$'$}$$

где $\overline{\psi}'_n$ — n-й член последовательности $\overline{\psi}'$. Пусть, далее, γ_n — любой набор из n натуральных чисел и $\mathcal{F}_n$ — множество всех полиномов вида

$$P_{\gamma_n} = \sum_{k \in \gamma_n} c_k \varphi_k, \tag{28}$$

где c_k — некоторые комплексные числа. В силу определения понятия поперечника из (26$'$) заключаем, что всегда

$$\inf_{\gamma_n} \sup_{f \in \psi U_\varphi^{p,\lambda}} \inf_{P_{\gamma_n} \in \mathcal{F}_n} \|f - P_{\gamma_n}\|_{p,\mu} \geq \overline{\psi}'_{n+1}, \tag{29}$$

а из теоремы 1$'$ следует, что при выполнении условий (19) соотношение (29) на самом деле является равенством.

В принятых здесь обозначениях для любого подмножества $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{X}$ положим

$$\sigma_n(\mathfrak{N})_{p,\mu} = \inf_{\gamma_n} \sup_{f \in \mathfrak{N}} \inf_{P_{\gamma_n} \in \mathcal{F}_n} \|f - P_{\gamma_n}\|_{p,\mu}. \tag{30}$$

Тогда доказанное соотношение можно записать в виде

$$\sigma_n(\psi U_\varphi^{q,\lambda})_{p,\mu} = \overline{\Psi}'_{n+1}, \quad p = q.$$

Оказывается, что это соотношение остается в силе и при $0 < q < p$. Точнее, справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть* $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^\infty$, $\mu = \{\mu_k\}_{k=1}^\infty$ *и* $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ — *произвольные системы комплексных чисел, удовлетворяющих условию*

$$\left|\frac{\psi_k\mu_k}{\lambda_k}\right| \le C, \quad k \in N, \tag{31}$$

где C — *некоторая положительная константа.*

Пусть, далее, γ_n — *любой набор из* n *натуральных чисел,* q *и* p — *любые положительные числа,* $0 < q \le p$. *Тогда при любом* $n \in N$

$$\sigma_n(\psi U_\varphi^{q,\lambda})_{p,\mu} = \inf_{\gamma_n} \sup_{f \in \psi U_\varphi^{q,\lambda}} \inf_{P_{\gamma_n} \in \mathcal{F}_n} \|f - P_{\gamma_n}\|_{p,\mu} = \overline{\Psi}'_{n+1},$$

где $\overline{\Psi}'_{n+1}$ — $(n+1)$*-й член последовательности* $\overline{\Psi}' = \{\overline{\Psi}_k\}_{k=1}^\infty$, *являющейся перестановкой в убывающем порядке последовательности*

$$|\psi'_k| = \left|\frac{\psi_k\mu_k}{\lambda_k}\right|, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Доказательство. Согласно соотношению (30) и предложению 1 имеем

$$\sigma_n^p(\psi U_\varphi^{q,\lambda})_{p,\mu} = \inf_{\gamma_n} \sup_{f \in \psi U_\varphi^{q,\lambda}} \left\| f - \sum_{k \in \gamma_n} \hat{f}(k)\varphi_k \right\|_{p,\mu} =$$

$$= \inf_{\gamma_n} \sup_{\|f^\psi\|_{q,\lambda} \le 1} \sum_{k \overline{\in} \gamma_n} |\psi_k|^p \left|\hat{f}^\psi(k)\right|^p |\mu_k|^p. \tag{32}$$

Пусть

$$R_{\gamma_n} = \sup_{\|f^\psi\|_{q,\lambda} \le 1} \sum_{k \overline{\in} \gamma_n} |\psi_k|^p \left|\hat{f}^\psi(k)\right|^p |\mu_k|^p. \tag{33}$$

Если далее положить

$$\left|\hat{f}^\psi(k)\right|^q |\lambda_k|^q = m_k, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

то (33) можно записать в виде

$$R_{\gamma_n} = \sup_{\sum m_k \le 1} \sum_{k \overline{\in} \gamma_n} \frac{|\psi_k|^p |\mu_k|^p}{|\lambda_k|^p} m_k^r, \quad r = \frac{p}{q}. \tag{34}$$

В силу (31) всегда существует величина

$$\nu(n) = \sup_{k \overline{\in} \gamma_n} \left|\frac{\psi_k\mu_k}{\lambda_k}\right|^p.$$

Поэтому согласно (34) имеем

$$R_{\gamma_n} \le \nu(n). \tag{35}$$

Покажем, что последнее соотношение всегда является равенством. Предположим сначала, что существует число $k' \in N \backslash \gamma_n$, для которого

$$\left|\frac{\psi_{k'}\mu_{k'}}{\lambda_{k'}}\right|^p = \nu(n). \tag{36}$$

Тогда, рассматривая последовательность $m' = \{m'_k\}_{k=1}^{\infty}$, где

$$m'_k = \begin{cases} 1, & k = k'; \\ 0, & k \in N \setminus (\gamma_n \cup k'), \end{cases}$$

видим, что

$$\sum_{k \overline{\in} \gamma_n} \left|\frac{\psi_k \mu_k}{\lambda_k}\right|^p m'_k = \nu(n),$$

т. е. в этом случае выполняется равенство

$$R_{\gamma_n} = \nu(n). \tag{37}$$

Если же не существует такого числа k', для которого выполняется (36), то в силу ограниченности множества $\left\{\dfrac{\psi_k \mu_k}{\lambda_k}\right\}$ имеем

$$\nu(n) = \sup_{k \overline{\in} \gamma_n} \left\{\left|\frac{\psi_k \mu_k}{\lambda_k}\right|^p\right\} \overset{\text{df}}{=} g_n.$$

При этом существует последовательность k_i, $i \in N$, $k_i \overline{\in} \gamma_n$, такая, что числа

$$s_i = \left|\frac{\psi_{k_i} \mu_{k_i}}{\lambda_{k_i}}\right|^p, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

не убывая, стремятся к g_n. Положим $m^{(i)} = \{m_k^{(i)}\}_{k=1}^{\infty}$, где

$$m_k^{(i)} = \begin{cases} 1, & k = k_i; \\ 0, & k \in N - (\gamma_n \cup k_i). \end{cases}$$

В таком случае

$$\sum_{k \overline{\in} \gamma_n} \left|\frac{\psi_k \mu_k}{\lambda_k}\right|^p m_k^{(i)} = s_i, \quad i = 1, 2, \ldots.$$

Отсюда заключаем, что при любом $i \in N$ справедливо неравенство $R_{\gamma_n} > s_i$, что вместе с (35) дает равенство (37) и в рассматриваемом случае.

Подставляя полученное значение величины R_{γ_n} в (32), находим

$$\sigma_n^p(\psi U_\varphi^{q,\lambda})_{p,\mu} = \inf_{\gamma_n} \sup_{k \overline{\in} \gamma_n} \left|\frac{\psi_k \mu_k}{\lambda_k}\right|^p = \inf_{\beta_n} \sup_{k \overline{\in} \beta_n} \{(\overline{\psi}'_k)^p\}, \tag{38}$$

где через $\{\overline{\psi}'_k\}$ обозначено множество значений последовательности $\overline{\psi}'$, а β_n — любой набор из n натуральных чисел.

Последовательность $\overline{\psi}'$ убывает, поэтому

$$\sup_{k \overline{\in} \beta_n} \{\overline{\psi}'_k\} = \overline{\psi}'_{k_n},$$

где k_n — наименьшее из натуральных чисел, не принадлежащих к β_n. Ясно, что величина $\inf\limits_{\beta_n} \overline{\psi}'_{k_n}$ достигается, когда $\beta_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ и, следовательно, равна $\overline{\psi}'_{n+1}$. Подставляя это значение в (38), получаем (33), что и завершает доказательство теоремы.

Замечание. Из доказательства теоремы видно, что внутренняя нижняя грань в (30) реализуется полиномами вида (28) при $c_k = \hat{f}(k)$, а внешняя — множеством $\gamma_n^* = \{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$, где значения i_k, $k = \overline{1, n}$, такие, что $|\psi'_{i_k}| = \overline{\psi}'_k$. Поэтому справедлива следующая теорема.

Теорема 3′. *Пусть выполняются все условия теоремы* 3. *Тогда при любом* $n \in N$

$$\sigma_n(\psi U_\varphi^{q,\lambda})_{p,\mu} = \sup_{f \in \psi U_\varphi^{q,\lambda}} \left\| f - \sum_{k \in \gamma_n^*} \hat{f}(k)\varphi_k \right\|_{p,\mu} = \overline{\psi}'_{n+1}, \tag{39}$$

где $\gamma_n^* = \{i_k\}_{k=1}^n$ *и значения* i_k, $k = \overline{1, n}$, *такие, что*

$$\left| \frac{\psi_{i_k}\mu_{i_k}}{\lambda_{i_k}} \right| = \overline{\psi}'_k.$$

Заметим также, что равенства (26) можно записать в виде

$$d_n(\psi U_\varphi^{p,\lambda})_{p,\mu} = \overline{\psi}'_{n+1}, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{40}$$

Объединяя (39) и (40), видим, что значения поперечников $d_n(\psi U_\varphi^{p,\lambda})_{p,\mu}$ в случае приближения элементов $f \in \psi U_\varphi^{p,\lambda}$ в пространстве $S_\varphi^{p,\mu}$ реализуются суммами Фурье, построенными именно по областям γ_n^*.

6. Случай, когда $\mathfrak{X} = L(R^m)$. Пусть R^m, $m \geq 1$, — m-мерное евклидово пространство, $x = (x_1, \ldots, x_m)$ — его элементы, Z^m — целочисленная решетка в R^m — множество векторов $\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_m)$ с целочисленными координатами, $\boldsymbol{xy} = x_1 y_1 + \ldots + x_m y_m$, $|x| = \sqrt{(xx)}$ и, в частности, $\boldsymbol{kx} = k_1 x_1 + \ldots + k_m x_m$, $|k| = \sqrt{k_1^2 + \ldots + k_m^2}$.

Пусть, далее, $L = L(R^m)$ — множество всех 2π-периодических по каждой из переменных функций $f(x) = f(x_1, \ldots, x_m)$, суммируемых на кубе периодов Q_m:

$$Q_m = \{x \in R^m, -\pi \leq x_k \leq \pi, \ k = 1, 2, \ldots, m\}.$$

Если $f \in L$, то через $S[f]$ обозначается ряд Фурье функции f по тригонометрической системе

$$(2\pi)^{-m/2} e^{ikx}, \quad k \in Z^m, \tag{41}$$

т. е.

$$S[f] = (2\pi)^{-m/2} \sum_{k \in Z^m} \hat{f}(k) e^{ikx}, \quad \hat{f}(\boldsymbol{k}) = (2\pi)^{-m/2} \int_{Q_m} f(t) e^{-ikt}\, dt.$$

Будем отождествлять функции, эквивалентные относительно меры Лебега. В таком случае в качестве $\mathfrak{X}$ можно взять пространство $L(R^m)$, а в качестве φ — тригонометрическую систему $\tau = \{\tau_s\}$, $s \in N$, где

$$\tau_s = (2\pi)^{-m/2} e^{ik_s x}, \quad \boldsymbol{k}_s \in Z^m, \quad s = 1, 2, \ldots,$$

полученную из системы (41) путем произвольной фиксированной нумерации ее элементов; скалярное произведение в этом случае задается известным образом:

$$(f, \tau_s) = (2\pi)^{-m/2} \int\limits_{Q_m} f(t) e^{-ik_s t}\, dt = \hat{f}(k_s) = \hat{f}_\tau(k_s). \tag{42}$$

Получающиеся при этом множества $S_\varphi^{p,\mu}$ будем обозначать через $S_{\tau_s}^{p,\mu}$. В случае, когда выполняются условия (2), объекты $S_{\tau_s}^{p,\mu}$ подробно рассматривались в работах [1 – 5], где, в частности, получены следствия из утверждений, соответствующих теоремам 1′ и 2′, для пространств S_τ^p. Понятно, что аналогичные следствия из теорем 1′ и 2′ имеют место и в общем случае для пространств $S_{\tau_s}^{p,\mu}$, формулировки которых легко воспроизвести.

Принципиально новым здесь является тот факт, что полиномы, осуществляющие наилучшее приближение функции $f \in \psi U_{\tau_s}^{q,\lambda}$ в пространствах $S_{\tau_s}^{p,\mu}$, будут строится по областям $g_{n-1}^{\psi'}$, где последовательность ψ' определяется равенством (21).

В [1 – 5] отмечалась связь между пространствами S_τ^p и пространствами $L_p = L_p(R^m)$, $p \in [1, \infty)$, функций $f \in L$ с конечной нормой $\|\cdot\|_{L_p}$,

$$\|f\|_{L_p} = \left(\int\limits_{Q_m} |f(t)|^p\, dt \right)^{1/p}.$$

Такая связь устанавливается с помощью известной теоремы Хаусдорфа – Юнга. Наличие при определении множеств $S_\tau^{p,\mu}$ отличных от констант множителей μ_k дает дополнительную возможность установления связей между пространствами $S_\tau^{p,\mu}$ и L_p. Эта связь может реализоваться благодаря следующей теореме Харди и Литтлвуда (см. например, [6], § XII.3).

Теорема Харди – Литтлвуда. 1. *Пусть $f \in L_p(R^1)$ и*

$$S[f] = \sum_{k \in Z^1} c_k e^{ikx}$$

— ее ряд Фурье. Тогда

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^p (|k|+1)^{p-2} \le A_p \int\limits_0^{2\pi} |f(t)|^p\, dt, \quad 1 < p \le 2.$$

2. *Пусть $\ldots, c_{-1}, c_0, c_1, \ldots$ — такие комплексные числа, что*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^q (|k|+1)^{q-2} < \infty, \quad q \ge 2. \tag{43}$$

Тогда числа c_k являются коэффициентами Фурье для некоторой функции f из $L_q(R^1)$ и

$$\int\limits_0^{2\pi} |f(t)|^q\, dt \le A_p \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^q (|k|+1)^{q-2}, \tag{43′}$$

A_p — величина, возможно зависящая только от p.

Возьмем в качестве $\mathfrak{X}$ пространство $L_1(R^1)$, а в качестве системы φ систему

$$1,\ e^{it},\ e^{-it},\ e^{i2t},\ e^{-i2t}, \ldots,$$

которую обозначим через τ, и скалярное произведение зададим формулой (42). При данном $p \in (0, \infty)$ выберем систему μ' в виде

$$1, 2^{1-2/p}, 2^{1-2/p}, 3^{1-2/p}, 3^{1-2/p}, \ldots$$

и определим пространства $S_\tau^{p,\mu'}$ согласно равенству (1):

$$S_\tau^{p,\mu'} = \left\{ f \in L_1(R^1) \colon \sum_{k=1}^{\infty} \left| \hat{f}_\tau(k) \right|^p (k+1)^{p-2} < \infty \right\}. \tag{44}$$

Объединяя соотношения (43) – (44), заключаем, что

если $1 < p \le 2$, то $L_p(R^1) \subset S_\tau^{p,\mu'}$;

если $2 \le p < \infty$, то $S_\tau^{p,\mu'} \subset L_p(R^1)$.

1. *Степанец А. И.* Аппроксимационные характеристики пространств S_φ^p // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 3. – С. 392 – 416.
2. *Степанец А. И.* Аппроксимационные характеристики пространств S_φ^p в разных метриках // Там же. – № 8. – С. 1121 – 1146.
3. *Степанец А. И.* Аппроксимационные характеристики пространств S^p. – Киев, 2001. – 85 с. – (Препринт / НАН Украины. Ин-т математики; 2001.2).
4. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2 т. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Т. 1. – 468 с.
5. *Степанец А. И., Сердюк А. С.* Прямые и обратные теоремы приближения функций в пространстве S^p // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 1. – С. 106 – 124.
6. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2-х т. – М.: Мир, 1965. – Т. 2. – 538 с.

Получено 04.11.2002