УДК 517.927.6

О. Г. Мулявка, О. М. Габрель (Тернопіл. пед. ун-т)

НАБЛИЖЕНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ВАЛЛЕ ПУССЕНА ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПУ ПРОЕКЦІЙНО-ІТЕРАТИВНИМ МЕТОДОМ

We solve the Vallée Poussin problem for functional-differential equation by using the projection-iterative method. We construct an algorithm, establish sufficient conditions of the convergence of method, and present a computational scheme.

Розв'язано задачу Валле Пуссена для функціонально-диференціального рівняння проекційно-ітеративним методом. Побудовано алгоритм, встановлено достатні умови збіжності методу і наведено обчислювальну схему.

Розглянемо багатоточкову задачу: знайти розв'язок лінійного функціонально-диференціального рівняння n-го порядку

$$x^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} p_i(t)x^{(n-i)}(t) = f(t) + \sum_{j=0}^{n} q_j(t)x^{(n-j)}(t-\Delta), \qquad t \in (a, b), \tag{1}$$

який задовольняє умови

$$x(t_s) = 0, \qquad s = \overline{1, n}, \qquad -\infty < a = t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b < +\infty, \tag{2}$$

$$x^{(j)}(t) = 0, \qquad t \in (a-\Delta, a), \qquad j = 0, 1, \ldots, n, \tag{3}$$

де $f \in L_2(a, b)$, $p_i(t)$, $q_j(t)$, $i = \overline{1, n}$, $j = 0, 1, \ldots, n$, визначені і неперервні на відрізку $[a, b]$, $\Delta > 0$ — стале запізнення.

У даній роботі задача (1) – (3) розв'язується проекційно-ітеративним методом [1]. Подамо задачу (1) – (3) у вигляді

$$(Ax)(t) = f(t) + (Bx)(t), \tag{4}$$

$$x(t_s) = 0, \qquad s = \overline{1, n}, \qquad -\infty < a = t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b < +\infty, \tag{5}$$

де

$$(Ax)(t) :=$$

$$:= \begin{cases} x^{(n)}(t) + \sum_{i=1}^{n} a_i(t)x^{(n-i)}(t) - q_0(t)\left(x^{(n)}(t-\Delta) + \sum_{j=1}^{n} a_j(t-\Delta)x^{(n-j)}(t-\Delta) \right), & t \in (a, b); \\ x^{(j)}(t) = 0, & t \in (a-\Delta, a), \ j = 0, 1, \ldots, n, \end{cases} \tag{6}$$

$$(Bx)(t) := \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} b_i(t)x^{(n-i)}(t) + \sum_{j=1}^{n} h_j(t)x^{(n-j)}(t-\Delta), & t \in (a,b); \\ x^{(j)}(t) = 0, & t \in (a-\Delta, a), \; j = 0, 1, \ldots, n-1, \end{cases} \tag{7}$$

$$b_i(t) = a_i(t) - p_i(t), \quad h_j(t) = q_j(t) - q_0(t)a_j(t-\Delta), \quad i, j = \overline{1, n}. \tag{8}$$

Вважатимемо, що відповідна до задачі

$$(Mx)(t) = y(t), \quad x(t_s) = 0, \quad s = \overline{1, n}, \tag{9}$$

де

$$(Mx)(t) = x^{(n)}(t) + \sum_{i=1}^{n} a_i(t)x^{(n-i)}(t), \quad a_i \in C(a-\Delta, b), \quad i = \overline{1, n}, \tag{10}$$

однорідна задача має лише тривіальний розв'язок. Тоді, як відомо, існує обмежений оператор $G = M^{-1}$, тобто існує функція Гріна $G(t, \tau)$ така, що для будь-якої функції $y \in L_2(a, b)$ єдиний розв'язок задачі (9) має вигляд

$$x(t) = (Gy)(t) = \int_a^b G(t, \tau)y(\tau)\,d\tau. \tag{11}$$

Нехай

$$(Ax)(t) = u(t), \quad x(t_s) = 0, \quad s = \overline{1, n}. \tag{12}$$

Покажемо, що задача (12) для будь-якої функції $u \in L_2(a, b)$ однозначно розв'язувана. Для цього розглянемо лінійний оператор

$$(Sy)(t) := \begin{cases} y(t) - q_0(t)y(t-\Delta), & t \in (a, b); \\ y(t) = 0, & t \in (a-\Delta, a), \end{cases} \tag{13}$$

який відображає $L_2(a, b)$ в себе і має обмежений обернений

$$(S^{-1}u)(t) := \begin{cases} u(t), & t \in (a, c_1); \\ u(t) + \sum_{i=1}^{s} u(t - i\Delta) \prod_{k=0}^{i-1} q_0(t - k\Delta), & t \in (c_s, c_{s+1}), \end{cases} \tag{14}$$

де $c_s = a + s\Delta$, $s = \overline{1, l-1}$, а $a + l\Delta = b$, $l \in \mathrm{N}$, оскільки при $c_{l-1} < b < c_l$ функції $p_i(t)$, $q_j(t)$ і $f(t)$ при $t \in [b, a + l\Delta)$ можна довизначити нулем. $(S^{-1}u)(c_s)$— будь-яке дійсне число або середнє арифметичне односторонніх границь у точці $t = c_s$, якщо такі існують. На підставі (6), (9), (10) і (13) задача (12) набере вигляду $(SMx)(t) = u(t)$, $x(t_s) = 0$, $s = \overline{1, n}$, звідки

$$(Mx)(t) = (S^{-1}u)(t), \quad x(t_s) = 0, \quad s = \overline{1, n}. \tag{15}$$

А тоді, врахувавши (9), (11) і (15), отримаємо єдиний розв'язок задачі (12)

$$x(t) = (GS^{-1}u)(t) = (Ku)(t) = \int_a^b K(t, \tau)u(\tau)\,d\tau, \tag{16}$$

де $K = GS^{-1}$ — інтегральний оператор, який відображає $L_2(a, b)$ в себе і цілком неперервний як суперпозиція цілком неперервного G і обмеженого S^{-1} операторів. Його ядро з урахуванням (14) і (16) має вигляд

$$K(t,\tau)=\begin{cases} G(t,\tau)+\sum\limits_{i=1}^{l-s} G(t,\tau+i\Delta)\prod\limits_{k=1}^{i} q_0(\tau+k\Delta), & \tau\in(c_{s-1},c_s); \\ G(t,\tau), & \tau\in(c_{l-1},b), \end{cases} \quad t\in(a,b),\ s=\overline{1,l-1}. \tag{17}$$

Внаслідок обмеженості коефіцієнта $q_0(t)$ на $[a, b]$ і властивостей функції Гріна $G(t,\tau)$ ядро (17) сумовне з квадратом по обох змінних і справедливі формули

$$x^{(i)}(t) = \int_a^b K_t^{(i)}(t,\tau)u(\tau)\,d\tau, \quad i=\overline{1,n-1}. \tag{18}$$

Оскільки при $t\in(c_1,b)$ і $\tau\in(a,b)$ функція $K(t-\Delta,\tau)$ визначена, то

$$x(t-\Delta) = \int_a^b K(t-\Delta,\tau)u(\tau)\,d\tau, \tag{19}$$

$$x^{(j)}(t-\Delta) = \int_a^b K_t^{(j)}(t-\Delta,\tau)u(\tau)\,d\tau, \quad j=\overline{1,n-1}. \tag{20}$$

Підставивши вирази (16), (18)–(20) у (7), отримаємо

$$(BKu)(t) = (Tu)(t) = \int_a^b T(t,\tau)u(\tau)\,d\tau, \tag{21}$$

де

$$T(t,\tau) = \sum_{i=1}^{n} b_i(t)K_t^{(n-i)}(t,\tau) + \begin{cases} 0, & t\in(a,c_1); \\ \sum\limits_{j=1}^{n} h_j(t)K_t^{(n-j)}(t-\Delta,\tau), & t\in(c_1,b). \end{cases} \tag{22}$$

Аналізуючи формулу (22), з урахуванням позначень (8) і умов, накладених на коефіцієнти рівняння (1), приходимо до висновку, що

$$\int_a^b\int_a^b T^2(t,\tau)\,dt\,d\tau < +\infty. \tag{23}$$

Задача (4), (5) з урахуванням заміни (12) і співвідношення (21) зводиться до інтегрального рівняння

$$u(t) = f(t) + \int_a^b T(t,\tau)u(\tau)\,d\tau, \tag{24}$$

в якому інтегральний оператор (21) відображає $L_2(a,b)$ в себе і є цілком неперервним на підставі (23).

Нехай $u_0\in L_2(a,b)$ — задана функція (практично можна вибрати $u_0(t)=0$ або $u_0(t)=f(t)$). Нульове наближення визначаємо із задачі $(Ax_0)(t)=u_0(t)$, $x_0(t_s)=0$, $s=\overline{1,n}$. Далі, вважаючи наближення $x_{k-1}(t)$ вже побудованим, k-те наближення визначаємо із задачі

$$(Ax_k)(t) = f(t) + (Bz_k)(t), \tag{25}$$

$$x_k(t_s) = 0, \quad s=\overline{1,n}, \tag{26}$$

в якій

$$z_k(t) = x_{k-1}(t) + w_k(t), \tag{27}$$

$$w_k(t) = \sum_{j=1}^{m} c_j^k \varphi_j(t). \tag{28}$$

Невідомі параметри c_j^k знаходимо із умови

$$\int_a^b \left(f(t) - (A z_k)(t) + (B z_k)(t)\right) \psi_i(t)\, dt = 0, \qquad i = \overline{1, m}, \tag{29}$$

де $\{\psi_i(t)\}$ — задана система лінійно незалежних функцій із $L_2(a, b)$, а функції $\varphi_i(t)$ визначаємо із задачі

$$(A\varphi_i)(t) = \psi_i(t), \qquad \varphi_i(t_s) = 0, \qquad s = \overline{1, n}, \quad i = \overline{1, m}. \tag{30}$$

Підставивши (27) і (28) в (29) і позначивши

$$\beta_{ij} = \int_a^b \left(\left(A\varphi_j\right)(t) - \left(B\varphi_j\right)(t)\right) \psi_i(t)\, dt, \qquad i, j = \overline{1, m}, \tag{31}$$

$$d_i^k = \int_a^b \left(f(t) - (A x_{k-1})(t) + (B x_{k-1})(t)\right) \psi_i(t)\, dt, \qquad i = \overline{1, m}, \tag{32}$$

для визначення c_j^k отримаємо систему алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{j=1}^{m} \beta_{ij} c_j^k = d_i^k, \qquad i = \overline{1, m}. \tag{33}$$

Якщо система рівнянь (33) має єдиний розв'язок, то функція $z_k(t)$ визначається однозначно. Підставивши значення $z_k(t)$ в задачу (25) і розв'язавши її, отримаємо k-те наближення $x_k(t)$.

Зауважимо, що за наближення до шуканого розв'язку можна брати і функцію $x_k(t)$, і функцію $z_k(t)$. У випадку, коли $w_k(t) = 0$, $x_k(t)$ визначається згідно з методом послідовних наближень із задачі $(A x_k)(t) = f(t) + (B x_{k-1})(t)$, $x_k(t_s) = 0$, $s = \overline{1, n}$. Якщо ж $x_0(t) = 0$, то функція $w_1(t)$ — наближення, побудоване за проекційним методом (27), (28).

Алгоритм (25) – (29) зводиться до алгоритму проекційно-ітеративного методу для інтегрального рівняння (24). Дійсно, нехай

$$(A x_k)(t) = u_k(t), \qquad x_k(t_s) = 0, \qquad s = \overline{1, n}. \tag{34}$$

Розв'язок задачі (34) має вигляд

$$x_k(t) = (K u_k)(t) = \int_a^b K(t, \tau) u_k(\tau)\, d\tau. \tag{35}$$

Тоді на підставі (35), (27), (28), (30) і (34) отримуємо

$$(B z_k)(t) = \int_a^b T(t, \tau)\left(u_{k-1}(\tau) + w_k^*(\tau)\right) d\tau, \tag{36}$$

$$(A z_k)(t) = u_{k-1}(t) + w_k^*(t), \tag{37}$$

де $w_k^*(t) = \sum_{j=1}^{m} c_j^k \psi_j(t)$.

Підставляючи (34) і (36) в (25), а (25), (37) і (34) в (29), знаходимо

$$u_k(t) = f(t) + \int_a^b T(t, \tau)\big(u_{k-1}(\tau) + w_k^*(\tau)\big)\,d\tau, \tag{38}$$

$$\int_a^b \big(u_k(t) - u_{k-1}(t) - w_k^*(t)\big)\psi_i(t)\,dt = 0, \qquad i = \overline{1, m}. \tag{39}$$

Позначимо $q_m = \left\{\int_a^b \int_a^b |L_m(t, \tau)|^2\,dt\,d\tau\right\}^{1/2}$, де функцію $L_m(t, \tau)$ будуємо, виходячи із відомої функції $T(t, \tau)$ (схему її побудови описано в [1]).

Теорема. *Якщо*

$$q_m < 1, \tag{40}$$

то задача (4), (5) *має єдиний розв'язок* $x \in L_2(a, b)$ *і послідовності* $\{x_k(t)\}$ *і* $\{z_k(t)\}$, *побудовані згідно з проекційно-ітеративним методом* (25) – (29), *збігаються в* $L_2(a, b)$ *до цього розв'язку.*

Доведення. Нехай $u^*(t)$ — розв'язок рівняння (24). Тоді

$$x^*(t) = (Ku^*)(t) = (GS^{-1}u^*)(t) \tag{41}$$

буде розв'язком задачі (4), (5). Дійсно, із рівності (41) маємо

$$(Ax^*)(t) = (SMx^*)(t) = (SMGS^{-1}u^*)(t) = u^*(t). \tag{42}$$

Підставляючи (42) в (24), отримуємо $(Ax^*)(t) = f(t) + \int_a^b T(t, \tau)u^*(\tau)\,d\tau$. Звідси, враховуючи (21) і (41), маємо $(Ax^*)(t) = f(t) + (Bx^*)(t)$. Отже, функція $x^*(t)$ (41) задовольняє рівняння (4). Вона ж задовольняє і крайові умови (5), оскільки $x^*(t_s) = (GS^{-1}u^*)(t_s) = \int_a^b G(t_s, \tau)y^*(\tau)\,d\tau = 0$, $s = \overline{1, n}$, де $y^*(t) = (S^{-1}u^*)(t)$.

Далі, якщо для функцій $u_{k-1}^*(t)$ і $u_k^*(t)$ має місце (38), то

$$z_k^*(t) = \big(K(u_{k-1}^* + w_k^*)\big)(t) = \big(GS^{-1}(u_{k-1}^* + w_k^*)\big)(t) \tag{43}$$

і

$$x_k^*(t) = (Ku_k^*)(t) = (GS^{-1}u_k^*)(t) \tag{44}$$

будуть розв'язками задач (37) і (34) відповідно. Дійсно, із (43) і (44) маємо

$$(Az_k^*)(t) = (SMz_k^*)(t) = \big(SMGS^{-1}(u_{k-1}^* + w_k^*)\big)(t) = u_{k-1}^*(t) + w_k^*(t), \tag{45}$$

$$(Ax_k^*)(t) = (SMx_k^*)(t) = (SMGS^{-1}u_k^*)(t) = u_k^*(t). \tag{46}$$

Підставляючи (46) в (38), отримуємо

$$(Ax_k^*)(t) = f(t) + \int_a^b T(t, \tau)\big(u_{k-1}^*(\tau) + w_k^*(\tau)\big)\,d\tau.$$

Звідси, враховуючи (21) і (43),

$$(Ax_k^*)(t) = f(t) + (Bz_k^*)(t). \tag{47}$$

Отже, функція $x_k^*(t)$ (44) задовольняє рівняння (25). Вона ж задовольняє і крайові умови (26), оскільки

$$x_k^*(t_s) = (GS^{-1}u_k^*)(t_s) = \int_a^b G(t_s, \tau) y_k^*(\tau) d\tau = 0, \quad s = \overline{1, n},$$

де $y_k^*(t) = (S^{-1}u_k^*)(t)$. Підставивши (45) і (46) в (39), з урахуванням (47), отримаємо (29).

Таким чином, доведено, що збіжність послідовностей функцій $\{x_k(t)\}$ і $\{z_k(t)\}$, визначених алгоритмом (25)–(29), до розв'язку задачі (4), (5) випливає із збіжності послідовності (38) до розв'язку інтегрального рівняння (24).

Із встановленого вище на підставі достатніх умов збіжності проекційно-ітеративного методу розв'язання інтегрального рівняння Фредгольма другого роду, встановлених в [1] (теорема 4.1), безпосередньо випливає справедливість теореми.

Обчислення за алгоритмом (25)–(29) доцільно проводити таким чином. Задаємо систему функцій $\{\psi_i(t)\}$. Із задач (30) знаходимо систему функцій $\{\varphi_i(t)\}$. Обчислюємо елементи β_{ij} матриці системи (33) за формулами (31). Далі, вважаючи наближення $x_{k-1}(t)$ вже побудованим, знаходимо $\varepsilon_k(t) = f(t) - (Ax_{k-1})(t) + (Bx_{k-1})(t)$ і, користуючись формулою (32), обчислюємо d_i^k, $i = \overline{1, m}$. Складаємо систему рівнянь (33) і знаходимо її розв'язки c_j^k, $j = \overline{1, m}$. Виконавши вказані операції, отримуємо $w_k(t)$ (28) і $z_k(t)$ (27). Для знаходження наближення $x_k(t)$ будуємо функцію $u_k(t) = f(t) + (Bz_k)(t)$ і розв'язуємо задачу $(Ax_k)(t) = u_k(t)$, $x_k(t_s) = 0$, $s = \overline{1, n}$.

1. *Лучка А. Ю.* Проекционно-итеративные методы. – Киев: Наук. думка, 1993. – 288 с.
2. *Лучка А. Ю., Габрель О. М.* Наближене розв'язання задачі Валле Пуссена для звичайних диференціальних рівнянь проекційно-ітеративним методом // Допов. АН УРСР. Сер. А. – 1982. – № 8. – С. 18–22.
3. *Ch. J. de la Valée Poussin.* Sur l'équation différentielle du second ordre. Détermination d'une intégrale, par deux valuers assignées. Extension aux équations d'ordre *n* // J. math. pures et appl. – 1929. – № 8. – P. 125–144.

Одержано 27.06.2000,
після доопрацювання — 31.07.2002