УДК 517.5

Ю. В. Гнатюк (Кам'янець-Поділ. пед. ун-т)

АЛГОРИТМИ НАЙКРАЩОГО ОДНОЧАСНОГО РІВНОМІРНОГО НАБЛИЖЕННЯ СІМ'Ї НЕПЕРЕРВНИХ НА КОМПАКТІ ФУНКЦІЙ ЧЕБИШОВСЬКИМ ПІДПРОСТОРОМ

We generalize method of cutting planes and the Remez method to the case of problem of the best simultaneous uniform approximation of a family of functions continuous on a compact set.

Узагальнено методи січних площин та Ремеза на випадок задачі найкращого одночасного рівномірного наближення сім'ї неперервних на компакті функцій.

Відомо, що в різних галузях математичної науки, особливо прикладних напрямів, виникають задачі на одночасне наближення. Серед них — задача чебишовського наближення системи лінійних несумісних рівнянь [1], задача відшукання чебишовського центра множини (див., наприклад, [2, 3]), задача одночасного наближення функцій та їх похідних [4, 5], узагальнена проблема моментів з моментами із многогранника [6], задача одночасного рівномірного наближення сім'ї неперервних на компакті функцій [7] тощо.

Остання з названих вище задач виникає, зокрема, при застосуванні апроксимаційних методів розв'язування диференціальних та інтегральних рівнянь [8, 9] і є узагальненням задачі найкращого рівномірного наближення неперервної на компакті функції, початок дослідженню якої було покладено П. Л. Чебишовим.

Ефективним методом розв'язування задачі найкращого рівномірного наближення неперервної на компакті функції чебишовським підпростором є метод Ремеза (див., наприклад, [10, 11]). Слід зазначити, що узагальнення цього методу успішно використовуються й для розв'язування інших задач наближення [12 – 14].

У даній роботі алгоритм Ремеза модифіковано для розв'язування задачі найкращого одночасного рівномірного наближення сім'ї неперервних на компакті функцій чебишовським підпростором. Встановлено лінійну збіжність побудованого алгоритму. Крім того, для розв'язування розглядуваної в роботі задачі модифіковано метод січної площини розв'язування задачі опуклого програмування [15]. Показано, що з допомогою модифікованого методу січної площини можна також алгоритмізувати стартовий крок модифікованого алгоритму Ремеза розв'язування задачі найкращого одночасного рівномірного наближення сім'ї неперервних на компакті функцій.

1. Задача найкращого одночасного рівномірного наближення сім'ї неперервних на компакті функцій чебишовським підпростором. Нехай $C(S)$ — векторний простір дійснозначних функцій f, неперервних на компакті S, з нормою $\|f\| = \max_{s\in S} |f(s)|$, $\{\varphi_j, j \in I\}$ — сім'я функцій простору $C(S)$.

Будемо припускати, що для будь-якого фіксованого $s \in S$ $\varphi_j(s)$ як функція j досягає на I найменшого та найбільшого значень і $\Phi_1(s) = \min_{j\in I} \varphi_j(s)$, $\Phi_2(s) = \max_{j\in I} \varphi_j(s)$ — неперервні на S функції.

Легко переконатися, що для будь-якого фіксованого $g \in C(S)$ існує $j_g \in I$ таке, що

$$\sup_{j\in I}\|g-\varphi_j\| = \|g-\varphi_{j_g}\| = \max_{j\in I}\|g-\varphi_j\|.$$

Будемо припускати надалі, що S містить не менше $n+1$ точки і система функцій $f_k \in C(S)$, $k=\overline{1,n}$, задовольняє умову Хаара, тобто $\det[f_k(s_i)] \neq 0$ для довільних (різних) точок $s_i \in S$, $i=\overline{1,n}$.

Позначимо через V чебишовський підпростір простору $C(S)$, породжений функціями f_i, $i=\overline{1,n}$.

Розглянемо задачу найкращого одночасного рівномірного наближення сім'ї $\{\varphi_j, j\in I\}$ елементами цього підпростору, тобто задачу відшукання величини

$$\alpha^* = \inf_{g\in V}\max_{j\in I}\|g-\varphi_j\|. \tag{1}$$

Легко переконатися, що існує єдиний елемент $g^*\in V$, для якого

$$\alpha^* = \max_{j\in I}\|g^*-\varphi_j\|.$$

Його називають чебишовським центром сім'ї $\{\varphi_j, j\in I\}$ відносно підпростору V або екстремальним елементом для величини (1).

Нехай

$$\overline{\alpha} = \inf_{g\in C(S)}\max_{j\in I}\|g-\varphi_j\|.$$

Зрозуміло, що $\overline{\alpha} = \max_{s\in S}[\Phi_2(s)-\Phi_1(s)]/2$ і $\alpha^* \geq \overline{\alpha}$. В подальшому будемо вважати, що обмеження $g\in V$ є суттєвим, тобто $\alpha^* > \overline{\alpha}$.

Теорема 1. *Якщо* s_i, $i=\overline{1,n+1}$, *— різні точки множини* S, *додатні числа* ρ_i *та числа* $\varepsilon_i=\pm 1$, $i=\overline{1,n+1}$, *такі, що*

$$\sum_{i=1}^{n+1}\rho_i\varepsilon_i(-f_k(s_i)) = 0, \quad k=\overline{1,n}, \qquad \sum_{i=1}^{n+1}\rho_i = 1, \tag{2}$$

то система векторів

$$(\varepsilon_i(-f_1(s_i)),\ldots,\varepsilon_i(-f_n(s_i)),1), \quad i=\overline{1,n+1}, \tag{3}$$

лінійно незалежна.

Доведення. Для доведення лінійної незалежності векторів (3) переконаємось, що лінійно незалежною буде система векторів

$$(\varepsilon_1(-f_k(s_1)),\ldots,\varepsilon_{n+1}(-f_k(s_{n+1}))), \quad k=\overline{1,n}, \ (1,\ldots,1). \tag{4}$$

Припустимо, що останній вектор цієї системи є лінійною комбінацією перших її n векторів. Тоді існують числа δ_k, $k=\overline{1,n}$, такі, що

$$\sum_{k=1}^{n}\delta_k\varepsilon_i(-f_k(s_i)) = 1, \quad i=\overline{1,n+1}.$$

З урахуванням (2) звідси одержимо

$$1 = \sum_{k=1}^{n}\delta_k\sum_{i=1}^{n+1}\rho_i\varepsilon_i(-f_k(s_i)) = \sum_{i=1}^{n}\delta_k 0 = 0,$$

що неможливо.

Якщо припустити, що, наприклад, перший вектор системи (4) є лінійною комбінацією інших її векторів, то існували б числа β_k, $k=\overline{2,n+1}$, для яких

$$\varepsilon_i(-f_1(s_i)) = \sum_{k=2}^{n} \beta_k \varepsilon_i(-f_k(s_i)) + \beta_{n+1}, \quad i = \overline{1, n+1}. \tag{5}$$

Звідси, враховуючи (2), одержуємо $\beta_{n+1} = 0$.

Тоді з (5) випливає, що вектори $(f_k(s_1), \ldots, f_k(s_n))$, $k = \overline{1, n}$, утворюють лінійно залежну систему, що суперечить умові Хаара.

Аналогічно доводиться, що 2-й, … , n-й вектори системи (4) не є лінійними комбінаціями інших її векторів.

Теорему доведено.

2. Модифікація методу січної площини на випадок задачі найкращого одночасного рівномірного наближення сім'ї неперервних на компакті функцій чебишовським підпростором. На попередньому кроці запропонованого нижче алгоритму розв'язування задачі відшукання величини (1) вибираємо довільні (різні) точки s_i, $i = \overline{1, n+1}$, із множини S, довільні індекси $j_i \in I$, $i = \overline{1, n+1}$, та при фіксованому $\lambda_{n+1} \neq 0$ розв'язуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь n-го порядку

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_k(s_i) = -\lambda_{n+1} f_k(s_{n+1}), \quad k = \overline{1, n}.$$

Нехай $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda_{n+1})$ — розв'язок цієї системи. Оскільки $\lambda_{n+1} \neq 0$ і система функцій f_k, $k = \overline{1, n}$, задовольняє умову Хаара на S, то $\lambda_i \neq 0$, $i = \overline{1, n+1}$.

Позначимо через $(\beta_1, \ldots, \beta_n, \beta_{n+1})$ той з векторів

$$\left(\sum_{i=1}^{n+1} |\lambda_i|\right)^{-1} (\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda_{n+1}), \quad \left(\sum_{i=1}^{n+1} |\lambda_i|\right)^{-1} (-\lambda_1, \ldots, -\lambda_n, -\lambda_{n+1}),$$

для якого $\sum_{i=1}^{n+1} \beta_i(-\varphi_{j_i}(s_i)) \geq 0$.

Нехай $\rho_i^1 = |\beta_i|$, $\varepsilon_i = \operatorname{sgn} \beta_i$, $i = \overline{1, n+1}$. Зрозуміло, що додатні числа ρ_i^1 та числа $\varepsilon_i = \pm 1$, $i = \overline{1, n+1}$, задовольняють умови

$$\sum_{i=1}^{n+1} \rho_i^1 \varepsilon_i(-\varphi_{j_i}(s_i)) \geq 0, \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} \rho_i^1 \varepsilon_i(-f_k(s_i)) = 0, \quad k = \overline{1, n}, \tag{7}$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} \rho_i^1 = 1. \tag{8}$$

На першому кроці алгоритму знаходимо оптимальний розв'язок $(\alpha_1^1, \ldots, \alpha_n^1; \theta^1) = (\alpha^1; \theta^1)$ такої задачі лінійного програмування:

$$\min \theta \tag{9}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varepsilon_i(-f_k(s_i)) + \theta \geq \varepsilon_i(-\varphi_{j_i}(s_i)), \quad i = \overline{1, 2n+2}, \tag{10}$$

де $s_{n+1+i} = s_i$, $\varepsilon_{n+1+i} = -\varepsilon_i$, $j_{n+1+i} = j_i$, $i = \overline{1, n+1}$.

Теорема 2. *Вектор* $(\alpha_1^1, \ldots, \alpha_n^1; \theta^1) = (\alpha^1; \theta^1)$, *де* $\theta^1 = \sum_{i=1}^{n+1} \rho_i^1 \varepsilon_i(-\varphi_{j_i}(s_i))$, $\alpha^1 = (\alpha_1^1, \ldots, \alpha_n^1)$ *— розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь*

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varepsilon_i(-f_k(s_i)) = \varepsilon_i(-\varphi_{j_i}(s_i)) - \theta^1, \quad i = \overline{1,n}, \tag{11}$$

є опорним оптимальним розв'язком задачі (9), (10).

Доведення. Оскільки система функцій f_k, $k = \overline{1,n}$, задовольняє умову Хаара на S, то система рівнянь (11) має єдиний розв'язок $\alpha^1 = (\alpha_1^1, \ldots, \alpha_n^1)$. Отже,

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^1 \varepsilon_i(-f_k(s_i)) = \varepsilon_i(-\varphi_{j_i}(s_i)) - \theta^1, \quad i = \overline{1,n}. \tag{12}$$

В силу (7), (8) та (12) одержуємо

$$0 = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^1 \sum_{i=1}^{n+1} \rho_i^1 \varepsilon_i(-f_k(s_i)) = \sum_{i=1}^{n+1} \rho_i^1 \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^1 \varepsilon_i(-f_k(s_i)) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \rho_i^1 (\varepsilon_i(-\varphi_{j_i}(s_i)) - \theta^1) + \rho_{n+1}^1 \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^1 \varepsilon_{n+1}(-f_k(s_{n+1})) + \theta^1 - \varepsilon_{n+1}(-\varphi_{j_{n+1}}(s_{n+1})) \right) +$$

$$+ \rho_{n+1}^1 \left(\varepsilon_{n+1}(-\varphi_{j_{n+1}}(s_{n+1})) - \theta^1 \right) =$$

$$= \rho_{n+1}^1 \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^1 \varepsilon_{n+1}(-f_k(s_{n+1})) + \theta^1 - \varepsilon_{n+1}(-\varphi_{j_{n+1}}(s_{n+1})) \right).$$

Звідси, враховуючи, що $\rho_{n+1}^1 \neq 0$, отримуємо рівність

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^1 \varepsilon_{n+1}(-f_k(s_{n+1})) + \theta^1 = \varepsilon_{n+1}(-\varphi_{j_{n+1}}(s_{n+1})). \tag{13}$$

Це означає, що вектор $(\alpha^1; \theta^1)$ перетворює перші $n+1$ обмеження задачі лінійного програмування (9), (10) в рівності.

В силу нерівності (6) $\theta^1 \geq 0$. З урахуванням цього та рівності (12) робимо висновок, що вектор $(\alpha^1; \theta^1)$ задовольняє й інші обмеження задачі лінійного програмування (9), (10).

Згідно з теоремою 1 система векторів $(\varepsilon_i(-f_1(s_i)), \ldots, \varepsilon_i(-f_n(s_i)), 1)$, $i = \overline{1, n+1}$, є лінійно незалежною. На підставі проведених міркувань робимо висновок, що вектор $(\alpha^1; \theta^1)$ є опорним допустимим розв'язком задачі (9), (10).

Двоїстою до задачі (9), (10) є така задача лінійного програмування:
знайти

$$\max \sum_{i=1}^{2n+2} \rho_i \varepsilon_i(-\varphi_{j_i}(s_i)) \tag{14}$$

при обмеженнях

$$\sum_{i=1}^{2n+2} \rho_i \varepsilon_i(-f_k(s_i)) = 0, \quad k = \overline{1,n}, \tag{15}$$

$$\sum_{i=1}^{2n+2} \rho_i = 1, \tag{16}$$

$$\rho_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 2n+2}. \tag{17}$$

Її опорним допустимим розв'язком буде вектор $(\rho_1^1, \ldots, \rho_{n+1}^1, 0, \ldots, 0)$.

Оскільки $\theta^1 = \sum_{i=1}^{n+1} \rho_i^1 \varepsilon_i(-\varphi_{j_i}(s_i))$, то $(\alpha^1; \theta^1)$ є оптимальним розв'язком задачі лінійного програмування (9), (10), а $(\rho_1^1, \ldots, \rho_{n+1}^1, 0, \ldots, 0)$ — оптимальним розв'язком задачі (14) – (17) (див., наприклад, [16, с. 158]).

Теорему доведено.

Нехай на q-му кроці $(q \geq 1)$ алгоритму знайдено оптимальний розв'язок $(\alpha_1^q, \ldots, \alpha_n^q; \theta^q) = (\alpha^q; \theta^q)$ такої задачі лінійного програмування:

$$\min \theta \tag{18}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varepsilon_i(-f_k(s_i)) + \theta \geq \varepsilon_i(-\varphi_{j_i}(s_i)), \quad i = \overline{1, 2n+q+1}. \tag{19}$$

Для вектора $g^q = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^q f_k$ знаходимо індекс $j_{2n+q+2} \in I$ та точку $s_{2n+q+2} \in S$ таким чином, щоб у них досягався максимум по $j \in I$ норм різниць $g^q - \varphi_j$:

$$\max_{j \in I} \left\| g^q - \varphi_j \right\| = \max_{j \in I} \max_{s \in S} \left| g^q(s) - \varphi_j(s) \right| =$$

$$= \left| g^q(s_{2n+q+2}) - \varphi_{j_{2n+q+2}}(s_{2n+q+2}) \right| = \varepsilon_{2n+q+2}\left(g^q(s_{2n+q+2}) - \varphi_{j_{2n+q+2}}(s_{2n+q+2}) \right),$$

де $\varepsilon_{2n+q+2} = \operatorname{sgn}\left(g^q(s_{2n+q+2}) - \varphi_{j_{2n+q+2}}(s_{2n+q+2}) \right)$.

Покажемо, що справедливе таке твердження.

Теорема 3. *Задача*(18), (19) *має опорний оптимальний розв'язок. При цьому виконуються співвідношення*

$$\theta^q \leq \alpha^* \leq \max_{j \in I} \left\| g^q - \varphi_j \right\|. \tag{20}$$

Доведення. Зрозуміло, що система обмежень (19) задачі лінійного програмування (18), (19) є сумісною. Задачею лінійного програмування, двоїстою до задачі (18), (19), є задача відшукання

$$\max \sum_{i=1}^{2n+q+1} \rho_i \varepsilon_i(-\varphi_{j_i}(s_i)) \tag{21}$$

при обмеженнях

$$\sum_{i=1}^{2n+q+1} \rho_i \varepsilon_i(-f_k(s_i)) = 0, \quad k = \overline{1, n}, \tag{22}$$

$$\sum_{i=1}^{2n+q+1} \rho_i = 1, \tag{23}$$

$$\rho_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 2n+q+1}. \tag{24}$$

В силу співвідношень (6) – (8) допустимим розв'язком цієї задачі є вектор $(\rho_1^1, \ldots, \rho_{n+1}^1, 0, \ldots, 0)$.

Тоді, як відомо (див., наприклад, [16, с. 176]), задачі (18), (19) та (21) – (24) мають оптимальні розв'язки. Оскільки згідно з теоремою 1 система векторів $(\varepsilon_i(-f_1(s_i)), \ldots, \varepsilon_i(-f_n(s_i)), 1)$, $i = \overline{1, n+1}$, є лінійно незалежною, ці задачі мають також опорні оптимальні розв'язки.

Нехай $\rho_{i_1}^q, \ldots, \rho_{i_l}^q$ $(1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_l \leq 2n+q+1,\ 1 \leq l \leq n+1)$ — відмінні від нуля компоненти опорного оптимального розв'язку задачі (21) – (24).

Тоді

$$\sum_{r=1}^{l} \rho_{i_r}^{q} \varepsilon_{i_r} (-f_k(s_{i_r})) = 0, \quad k = \overline{1, n}, \tag{25}$$

$$\sum_{r=1}^{l} \rho_{i_r}^{q} = 1, \tag{26}$$

$$\rho_{i_r}^{q} \geq 0, \quad r = \overline{1, l}. \tag{27}$$

Крім того, в силу першої теореми двоїстості в лінійному програмуванні (див., наприклад, [16, с. 173])

$$\theta^{q} = \sum_{r=1}^{l} \rho_{i_r}^{q} \varepsilon_{i_r} (-\varphi_{j_{i_r}}(s_{i_r})). \tag{28}$$

З рівностей (25) випливає, що для будь-якого вектора g із V

$$\sum_{r=1}^{l} \rho_{i_r}^{q} \varepsilon_{i_r} g(s_{i_r}) = 0. \tag{29}$$

Звідси з урахуванням (26) – (28) одержуємо

$$\theta^{q} = \sum_{r=1}^{l} \rho_{i_r}^{q} \varepsilon_{i_r} (g(s_{i_r}) - \varphi_{j_{i_r}}(s_{i_r})) \leq \sum_{r=1}^{l} \rho_{i_r}^{q} \| g - \varphi_{j_{i_r}} \| \leq \max_{j \in I} \| g - \varphi_j \|.$$

Тому

$$\theta^{q} \leq \inf_{g \in V} \max_{j \in I} \| g - \varphi_j \| \leq \alpha^{*}.$$

Зрозуміло, що $\alpha^{*} \leq \max_{j \in I} \| g^{q} - \varphi_j \|$.

Теорему доведено.

З нерівностей (20) випливає, що коли $\theta^{q} = \max_{j \in I} \| g^{q} - \varphi_j \|$, то g^{q} є екстремальним елементом для величини (1), а $\alpha^{*} = \theta^{q}$.

Якщо ж $\theta^{q} < \max_{j \in I} \| g^{q} - \varphi_j \|$, то до обмежень задачі (18), (19) приєднуємо обмеження

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varepsilon_{2n+q+2} (-f_k(s_{2n+q+2})) + \theta \geq \varepsilon_{2n+q+2} (-\varphi_{j_{2n+q+2}}(s_{2n+q+2})),$$

знаходимо оптимальний розв'язок $(\alpha_1^{q+1}, \ldots, \alpha_n^{q+1}; \theta^{q+1}) = (\alpha^{q+1}; \theta^{q+1})$ одержаної в результаті цього нової задачі лінійного програмування і т. д.

Теорема 4. *Якщо описаний вище процес розв'язування задачі відшукання величини* (1) *є нескінченним, то послідовність* $\{\theta^{q}\}_{q=1}^{\infty}$ *є неспадною і обмеженою зверху числом* α^{*}.

Послідовність $\{g^{q}\}_{q=1}^{\infty}$ *збігається до екстремального елемента* g^{*} *для величини* (1). *При цьому виконуються рівності*

$$\lim_{q \to \infty} \theta^{q} = \alpha^{*} = \lim_{q \to \infty} \max_{j \in I} \| g^{q} - \varphi_j \|.$$

Доведення. Оскільки

$$M^{q} = \left\{ (\alpha; \theta) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n; \theta) : \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varepsilon_i (-f_k(s_i)) + \theta \geq \varepsilon_i (-\varphi_{j_i}(s_i)), \ i = \overline{1, 2n+q+1} \right\} \supset$$

$$\supset \left\{(\alpha;\theta) = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n;\theta)\colon \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varepsilon_i(-f_k(s_i)) + \theta \geq \varepsilon_i(-\varphi_{j_i}(s_i)),\ i = \overline{1, 2n+q+2}\right\} =$$

$$= M^{q+1},$$

то

$$\theta^q = \min\left\{\theta : (\alpha;\theta) \in M^q\right\} \leq \theta^{q+1} = \min\left\{\theta : (\alpha;\theta) \in M^{q+1}\right\}.$$

В силу теореми 3 $\theta^q \leq \alpha^*$, $q = 1, 2, \ldots$. Отже, існує $\lim\limits_{q\to\infty} \theta^q$.

Переконаємось, що послідовність $\{\alpha^q\}_{q=1}^{\infty} = \{(\alpha_1^q, \ldots, \alpha_n^q)\}_{q=1}^{\infty}$ є обмеженою.

Припустимо супротивне. Тоді існує її підпослідовність $\{\alpha^{q_\nu}\}_{\nu=1}^{\infty} = \{(\alpha_1^{q_\nu}, \ldots$ $\ldots, \alpha_n^{q_\nu})\}_{\nu=1}^{\infty}$, для якої $\lim\limits_{\nu\to\infty} \left\|\alpha^{q_\nu}\right\| = \infty$. Оскільки послідовність $\left\{\left\|\alpha^{q_\nu}\right\|^{-1} \alpha^{q_\nu}\right\}_{\nu=1}^{\infty}$ обмежена, то з неї можна вибрати збіжну до деякого $\alpha^0 =$ $= (\alpha_1^0, \ldots, \alpha_n^0)$ підпослідовність, причому $\left\|\alpha^0\right\| = 1$. Не обмежуючи загальності, будемо вважати, що $\lim\limits_{\nu\to\infty} \alpha^{q_\nu} = \alpha^0$.

Оскільки $(\alpha^{q_\nu}; \theta^{q_\nu})$ є оптимальним розв'язком задачі (18), (19) при $q = q_\nu$, то виконуються нерівності

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k^{q_\nu}}{\left\|\alpha^{q_\nu}\right\|} \varepsilon_i(-f_k(s_i)) + \frac{\theta^{q_\nu}}{\left\|\alpha^{q_\nu}\right\|} \geq \frac{\varepsilon_i(-\varphi_{j_i}(s_i))}{\left\|\alpha^{q_\nu}\right\|}, \quad i = \overline{1, 2n+2}.$$

Переходячи в цих нерівностях до границі при $\nu \to \infty$, одержуємо

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^0 \varepsilon_i(-f_k(s_i)) \geq 0, \quad i = \overline{1, 2n+2},$$

а враховуючи, що $s_{n+1+i} = s_i$, $\varepsilon_{n+1+i} = \varepsilon_i$, $i = \overline{1, n+1}$, звідси маємо

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^0 f_k(s_i) = 0, \quad i = \overline{1, n+1},$$

що суперечить умові Хаара, оскільки серед чисел α_k^0, $k = \overline{1, n}$, є відмінні від нуля. Одержана суперечність і доводить, що послідовність $\{\alpha^q\}_{q=1}^{\infty} = \{(\alpha_1^q, \ldots$ $\ldots, \alpha_n^q)\}_{q=1}^{\infty}$ є обмеженою.

Оскільки

$$\left\|g^q\right\| = \left\|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^q f_k\right\| \leq \sum_{k=1}^{n} \left|\alpha_k^q\right| \|f_k\| \leq C \sum_{k=1}^{n} \|f_k\|,$$

де $\left|\alpha_k^q\right| \leq C$, $q = 1, 2, \ldots$, $k = \overline{1, n}$, то обмеженою буде також послідовність $\{g^q\}_{q=1}^{\infty}$.

З урахуванням скінченновимірності простору V з послідовності $\{g^q\}_{q=1}^{\infty}$ можна вибрати збіжну підпослідовність $\{g^{q_\mu}\}_{\mu=1}^{\infty}$. Нехай $\lim\limits_{\mu\to\infty} g^{q_\mu} = g^*$.

Оскільки $(\alpha^{q_{\mu+1}}; \theta^{q_{\mu+1}})$ є оптимальним розв'язком задачі (18), (19) при $q =$ $= q_{\mu+1} > q_\mu$, то

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^{q_{\mu+1}}\varepsilon_{2n+q_\mu+2}(-f_k(s_{2n+q_\mu+2})) + \theta^{q_{\mu+1}} =$$

$$= -(\varepsilon_{2n+q_\mu+2}g^{q_{\mu+1}}(s_{2n+q_\mu+2})) + \theta^{q_{\mu+1}} \geq \varepsilon_{2n+q_\mu+2}(-\varphi_{j_{2n+q_\mu+2}}(s_{2n+q_\mu+2})).$$

З іншого боку,

$$\max_{j\in I}\left\|g^{q_\mu}-\varphi_j\right\| = \varepsilon_{2n+q_\mu+2}(g^{q_\mu}(s_{2n+q_\mu+2})-\varphi_{j_{2n+q_\mu+2}}(s_{2n+q_\mu+2})).$$

Тому

$$0 \leq \max_{j\in I}\left\|g^{q_\mu}-\varphi_j\right\| - \theta^{q_{\mu+1}} \leq$$

$$\leq \varepsilon_{2n+q_\mu+2}(g^{q_\mu}(s_{2n+q_\mu+2})-g^{q_{\mu+1}}(s_{2n+q_\mu+2})) \leq \left\|g^{q_\mu}-g^{q_{\mu+1}}\right\|.$$

Оскільки при $\mu\to\infty$ права частина цієї нерівності прямує до нуля, то звідси з урахуванням нерівності (20) приходимо до висновку, що

$$\lim_{\mu\to\infty}\max_{j\in I}\left\|g^{q_\mu}-\varphi_j\right\| = \lim_{\mu\to\infty}\theta^{q_{\mu+1}} = \lim_{q\to\infty}\theta^{q} = \alpha^*.$$

В силу неперервності функції $\Psi(g)=\max_{j\in I}\left\|g-\varphi_j\right\|$ маємо

$$\lim_{\mu\to\infty}\max_{j\in I}\left\|g^{q_\mu}-\varphi_j\right\| = \max_{j\in I}\left\|g^{*}-\varphi_j\right\|.$$

Враховуючи попередню рівність, робимо висновок, що g^* — екстремальний елемент для величини (1).

Оскільки екстремальний елемент для величини (1) єдиний і границя будь-якої збіжної підпослідовності послідовності $\{g^q\}_{q=1}^{\infty}$ збігається з цим екстремальним елементом, то $\lim_{q\to\infty}g^q=g^*$. Тому $\lim_{q\to\infty}\max_{j\in I}\left\|g^{q}-\varphi_j\right\|=\alpha^*$.

Теорему доведено.

Зауважимо, що в силу доведеної теореми оцінки (20) можна використати для відшукання величини (1) з наперед заданою точністю.

3. Модифікація методу Ремеза на випадок задачі найкращого одночасного рівномірного наближення сім'ї неперервних на компакті функцій чебишовським підпростором. На попередньому кроці модифікованого алгоритму Ремеза для відшукання величини (1) застосуємо описаний в п. 2 модифікований метод січної площини. Оскільки отримана в результаті цього методу послідовність $\{\theta^q\}_{q=1}^{\infty}$ така, що $\lim_{q\to\infty}\theta^q=\alpha^*>\overline{\alpha}$, то на деякому q-му кроці методу січної площини знайдемо опорний розв'язок $(\alpha_1^q,\ldots,\alpha_n^q;\theta^q)$ задачі лінійного програмування (18), (19), для якого $\theta^q>\overline{\alpha}$.

Нехай $(\rho_1^q,\ldots,\rho_{2n+q+1}^q)$ — опорний оптимальний розв'язок задачі (21) – (24), двоїстої до задачі (18), (19). Серед його координат не більше $n+1$ відмінної від нуля. Нехай це будуть $\rho_{i_1}^q,\ldots,\rho_{i_l}^q$, де $1\leq i_1<\ldots<i_l\leq 2n+q+1$.

Тоді виконуються співвідношення (25) – (27). В силу другої теореми двоїстості в лінійному програмуванні (див., наприклад, [16, с. 175])

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^q\varepsilon_{i_r}(-f_k(s_{i_r})) + \theta^q = \varepsilon_{i_r}(-\varphi_{j_{i_r}}(s_{i_r})), \quad r=\overline{1,l}. \tag{30}$$

Переконаємось, що точки s_{i_r}, $r=\overline{1,l}$, різні і $l=n+1$. Якщо б, наприклад, $s_{i_1}=s_{i_2}$, то при $\varepsilon_{i_1}=\varepsilon_{i_2}$ вектори $\varepsilon_{i_1}(-f_1(s_{i_1}),\ldots,-f_n(s_{i_1}))$ та $\varepsilon_{i_2}^q(-f_1(s_{i_2}),\ldots$

$\ldots, -f_n(s_{i_2}))$ були б однаковими, що суперечить лінійній незалежності системи векторів $\varepsilon_{i_r}(-f_1(s_{i_r}), \ldots, -f_n(s_{i_r}))$, $r = \overline{1, l}$, адже $\rho^q_{i_r}$, $r = \overline{1, l}$, — додатні координати опорного оптимального розв'язку $(\rho^q_1, \ldots, \rho^q_{2n+q+1})$ задачі лінійного програмування (21) – (24).

Якщо ж $\varepsilon_{i_1} \neq \varepsilon_{i_2}$, тобто $\varepsilon_{i_1} = -\varepsilon_{i_2}$, то з рівностей (30) отримуємо

$$2\theta^q = \varepsilon_{i_1}(\varphi_{j_{i_2}}(s_{i_1}) - \varphi_{j_{i_1}}(s_{i_1})) \leq \Phi_2(s_{i_1}) - \Phi_1(s_{i_1}),$$

$$\theta^q \leq \frac{\Phi_2(s_{i_1}) - \Phi_1(s_{i_1})}{2} \leq \max_{s \in S} \frac{\Phi_2(s) - \Phi_1(s)}{2} = \overline{\alpha},$$

що суперечить умові $\theta^q > \overline{\alpha}$.

Оскільки точки s_{i_r}, $r = \overline{1, l}$, різні і виконується рівність (29), то в силу твердження 3.4.5 [11, с. 94] $l = n + 1$.

Покладемо $\varepsilon^1_r = \varepsilon_{i_r}$, $q^1_r = q_{i_r}$, $s^1_r = s_{i_r}$, $j^1_r = j_{i_r}$, $r = \overline{1, n+1}$.

Тоді відповідно до описаної вище процедури на стартовому кроці модифікованого методу Ремеза вибирають різні точки s^1_i, $i = \overline{1, n+1}$, із S, знаходять додатні числа ρ^1_i, числа $\varepsilon^1_i = \pm 1$, індекси $j^1_i \in I$, $i = \overline{1, n+1}$, такі, що

$$\sum_{i=1}^{n+1} \rho^1_i \varepsilon^1_i (-\varphi_{j^1_i}(s^1_i)) > \overline{\alpha}, \quad \sum_{i=1}^{n+1} \rho^1_i \varepsilon^1_i (-f_k(s^1_i)) = 0, \quad k = \overline{1, n}, \quad \sum_{i=1}^{n+1} \rho^1_i = 1.$$

Нехай при $q \geq 1$ знайдено різні точки s^q_i множини S, додатні числа ρ^q_i, числа $\varepsilon^q_i = \pm 1$, індекси $j^q_i \in I$, $i = \overline{1, n+1}$, такі, що

$$\sum_{i=1}^{n+1} \rho^q_i \varepsilon^q_i (-f_k(s^q_i)) = 0, \quad k = \overline{1, n}, \tag{31}$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} \rho^q_i = 1, \tag{32}$$

причому $\sum_{i=1}^{n+1} \rho^1_i \varepsilon^1_i (-\varphi_{j^1_i}(s^1_i)) > \overline{\alpha}$.

На q-му кроці алгоритму знаходимо розв'язок $(\alpha^q_1, \ldots, \alpha^q_n; \theta^q) = (\alpha^q; \theta^q)$ системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varepsilon^q_i (-f_k(s^q_i)) + \theta = \varepsilon^q_i (-\varphi_{j^q_i}(s^q_i)), \quad i = \overline{1, n+1}.$$

Згідно з теоремою 1 розв'язок цієї системи існує і єдиний.
Отже,

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha^q_k \varepsilon^q_i (-f_k(s^q_i)) + \theta^q = \varepsilon^q_i (-\varphi_{j^q_i}(s^q_i)), \quad i = \overline{1, n+1}. \tag{33}$$

Теорема 5. *Виконуються співвідношення*

$$\theta^q = \sum_{i=1}^{n+1} \rho^q_i \varepsilon^q_i (-\varphi_{j^q_i}(s^q_i)), \quad \theta^1 > \overline{\alpha}, \quad \theta^q \leq \alpha^*, \quad q = 1, 2, \ldots . \tag{34}$$

Доведення. Із співвідношень (31) – (33) маємо

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha^q_k \sum_{i=1}^{n+1} \rho^q_i \varepsilon^q_i (-f_k(s^q_i)) + \theta^q \sum_{i=1}^{n+1} \rho^q_i = \sum_{i=1}^{n+1} \rho^q_i \varepsilon^q_i (-\varphi_{j^q_i}(s^q_i)),$$

$$\theta^q = \sum_{i=1}^{n+1} \rho_i^q \varepsilon_i^q (-\varphi_{j_i^q}(s_i^q)).$$

З рівностей (31) випливає, що для будь-якого вектора g із V

$$\sum_{i=1}^{n+1} \rho_i^q \varepsilon_i^q g(s_i^q) = 0.$$

Звідси з урахуванням (32) і рівності $\theta^q = \sum_{i=1}^{n+1} \rho_i^q \varepsilon_i^q (-\varphi_{j_i^q}(s_i^q))$ одержуємо

$$\theta^q = \sum_{i=1}^{n+1} \rho_i^q \varepsilon_i^q (g(s_i^q) - \varphi_{j_i^q}(s_i^q)) \le \sum_{i=1}^{n+1} \rho_i^q \left\| g - \varphi_{j_i^q} \right\| \le \max_{j \in I} \| g - \varphi_j \|.$$

Тому

$$\theta^q \le \inf_{g \in V} \max_{j \in I} \| g - \varphi_j \| = \alpha^*.$$

При $q = 1$ одержуємо $\theta^1 = \sum_{i=1}^{n+1} \rho_i^1 \varepsilon_i^1 (-\varphi_{j_i^1}(s_i^1)) > \overline{\alpha}$.

Теорему доведено.

Опишемо далі перехід до $q+1$-го кроку.

Знаходимо такі індекс $j_{n+2}^q \in I$ та точку $s_{n+2}^q \in S$, щоб у них досягався максимум по $j \in I$ норм різниць $\sum_{k=1}^n \alpha_k^q f_k - \varphi_j$:

$$\max_{j \in I} \left\| \sum_{k=1}^n \alpha_k^q f_k - \varphi_j \right\| = \max_{j \in I} \max_{s \in S} \left| \sum_{k=1}^n \alpha_k^q f_k(s) - \varphi_j(s) \right| = \max_{s \in S} \left| \sum_{k=1}^n \alpha_k^q f_k(s) - \varphi_{j_{n+2}^q}(s) \right| =$$

$$= \left| \sum_{k=1}^n \alpha_k^q f_k(s_{n+2}^q) - \varphi_{j_{n+2}^q}(s_{n+2}^q) \right| = \varepsilon_{n+2}^q \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k^q f_k(s_{n+2}^q) - \varphi_{j_{n+2}^q}(s_{n+2}^q) \right), \quad (35)$$

де $\varepsilon_{n+2}^q = \operatorname{sgn}\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k^q f_k(s_{n+2}^q) - \varphi_{j_{n+2}^q}(s_{n+2}^q) \right)$.

Якщо $\max_{j \in I} \left\| \sum_{k=1}^n \alpha_k^q f_k - \varphi_j \right\| = \theta^q$, то $g^q = \sum_{k=1}^n \alpha_k^q f_k$ — екстремальний елемент для величини (1), а $\alpha^* = \theta^q$. У цьому випадку процес розв'язування задачі відшукання величини (1) завершено. Це випливає з нерівностей

$$\theta^q \le \alpha^* \le \max_{j \in I} \left\| \sum_{k=1}^n \alpha_k^q f_k - \varphi_j \right\|.$$

Якщо ж $\max_{j \in I} \left\| \sum_{k=1}^n \alpha_k^q f_k - \varphi_j \right\| > \theta^q$, то розкладаємо вектор $a_{n+2}^q = (\varepsilon_{n+2}^q(-f_1(s_{n+2}^q)), \ldots, \varepsilon_{n+2}^q(-f_n(s_{n+2}^q)), 1)$ за базисом $a_i^q = (\varepsilon_i^q(-f_1(s_i^q)), \ldots, \varepsilon_i^q(-f_n(s_i^q)), 1)$, $i = \overline{1, n+1}$.

Лінійна незалежність векторів a_i^q, $i = \overline{1, n+1}$, випливає з теореми 1. Нехай

$$a_{n+2}^q = \sum_{i=1}^{n+1} \gamma_i^q a_i^q. \quad (36)$$

З (31) випливає $c = (0, \ldots, 0, 1) = \sum_{i=1}^{n+1} \rho_i^q a_i^q$.

З останніх рівностей для $\rho \in R$ одержуємо

$$c = \sum_{i=1}^{n+1} (\rho_i^q - \rho\gamma_i^q) a_i^q + \rho a_{n+2}^q. \tag{37}$$

З (36) маємо

$$\sum_{i=1}^{n+1} \gamma_i^q = 1. \tag{38}$$

Тому серед чисел γ_i^q, $i = \overline{1, n+1}$, є більші від нуля, числа ж ρ_i^q, $i = \overline{1, n+1}$, всі більші від нуля. Знайдемо $\rho^q = \min\left\{\rho_i^q (\gamma_i^q)^{-1} : 1 \le i \le n+1,\ \gamma_i^q > 0\right\}$. Припустимо, наприклад, що $\rho^q = \rho_{n+1}^q (\gamma_{n+1}^q)^{-1}$, де $\gamma_{n+1}^q > 0$. Тоді $\rho_{n+1}^q - \rho^q \gamma_{n+1}^q = 0$, а згідно з (37)

$$c = \sum_{i=1}^{n} (\rho_i^q - \rho^q \gamma_i^q) a_i^q + \rho^q a_{n+2}^q. \tag{39}$$

Зрозуміло, що

$$\rho_i^q - \rho^q \gamma_i^q \ge 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad \rho^q > 0. \tag{40}$$

Переконаємось, що

$$\rho_i^q - \rho^q \gamma_i^q > 0, \quad i = \overline{1, n}. \tag{41}$$

Припустимо, наприклад, що $\rho_1^q - \rho^q \gamma_1^q = 0$. Тоді з (39) одержуємо

$$\sum_{i=2}^{n} (\rho_i^q - \rho^q \gamma_i^q) \varepsilon_i^q (-f_k(s_i^q)) + \rho^q \varepsilon_{n+2}^q (-f_k(s_{n+2}^q)) = 0, \quad k = \overline{1, n},$$

що суперечить умові Хаара.

Крім того, враховуючи (38), маємо

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} (\rho_i^q - \rho^q \gamma_i^q) + \rho^q &= \sum_{i=1}^{n+1} (\rho_i^q - \rho^q \gamma_i^q) + \rho^q = \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \rho_i^q - \rho^q \sum_{i=1}^{n+1} \gamma_i^q + \rho^q = \sum_{i=1}^{n+1} \rho_i^q = 1. \end{aligned} \tag{42}$$

Переконаємось також, що система векторів a_i^q, $i = \overline{1, n}$, a_{n+2}^q лінійно незалежна.

Припустимо супротивне. Оскільки система векторів a_i^q, $i = \overline{1, n}$, лінійно незалежна, то $a_{n+2}^q = \sum_{i=1}^{n} \tau_i^q a_i^q$, $\tau_i^q \in R$, $i = \overline{1, n}$.

Звідси та з (36) одержимо $\sum_{i=1}^{n} (\gamma_i^q - \tau_i^q) a_i^q + \gamma_{n+1}^q a_{n+1}^q = 0$, де $\gamma_{n+1}^q > 0$, що суперечить лінійній незалежності системи векторів a_i^q, $i = \overline{1, n+1}$.

Покладемо далі

$$s_i^{q+1} = s_i^q, \quad i = \overline{1, n}, \quad s_{n+1}^{q+1} = s_{n+2}^q, \quad \varepsilon_i^{q+1} = \varepsilon_i^q, \quad i = \overline{1, n}, \quad \varepsilon_{n+1}^{q+1} = \varepsilon_{n+2}^q, \tag{43}$$

$$\varphi_{j_i^{q+1}} = \varphi_{j_i^q}, \ i = \overline{1, n}, \ \varphi_{j_{n+1}^{q+1}} = \varphi_{j_{n+2}^q}, \ \rho_i^{q+1} = \rho_i^q - \rho^q \gamma_i^q, \ i = \overline{1, n}, \ \rho_{n+1}^{q+1} = \rho^q. \tag{44}$$

Із співвідношень (39) – (42) випливає

$$\sum_{i=1}^{n+1} \rho_i^{q+1} \varepsilon_i^{q+1} (-f_k(s_i^{q+1})) = 0, \quad k = \overline{1, n}, \tag{45}$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} \rho_i^{q+1} = 1, \qquad \rho_i^{q+1} > 0, \quad i = \overline{1, n+1}. \tag{46}$$

Крім того, вище було встановлено, що вектори $(\varepsilon_i^{q+1}(-f_1(s_i^{q+1})), \ldots$ $\ldots, \varepsilon_i^{q+1}(-f_n(s_i^{q+1})), 1)$, $i = \overline{1, n+1}$, утворюють лінійно незалежну систему.

На $q+1$-му кроці алгоритму знаходимо розв'язок $(\alpha_1^{q+1}, \ldots, \alpha_n^{q+1}; \theta^{q+1}) =$ $= (\alpha^{q+1}; \theta^{q+1})$ такої системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varepsilon_i^{q+1}(-f_k(s_i^{q+1})) + \theta = \varepsilon_i^{q+1}(-\varphi_{j_i^{q+1}}(s_i^{q+1})), \quad i = \overline{1, n+1}.$$

Отже,

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^{q+1} \varepsilon_i^{q+1}(-f_k(s_i^{q+1})) + \theta^{q+1} = \varepsilon_i^{q+1}(-\varphi_{j_i^{q+1}}(s_i^{q+1})), \ i = \overline{1, n+1}, \ \text{і т. д.} \tag{47}$$

Переконаємось, що побудований у пункті 3 алгоритм є збіжним.

Для простоти доведень будемо вважати S компактом деякого метричного простору. Через $\rho(s, t)$ позначимо відстань між точками s і t із S.

Теорема 6. *Якщо на* q*-му кроці* $(q \geq 1)$

$$\theta^q = \max_{j \in I} \left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^q f_k - \varphi_j \right\|,$$

то $g^q = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^q f_k$ *— екстремальний елемент для величини* (1) *і* $\theta^q = \alpha^*$.

Справджуються рівності

$$\theta^{q+1} = \theta^q + \rho^q \left(\max_{j \in I} \left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^q f_k - \varphi_j \right\| - \theta^q \right), \quad q = 1, 2, \ldots. \tag{48}$$

Якщо описаний процес відшукання величини (1) *нескінченний, то для всіх* $q = 1, 2, \ldots$ *виконуються нерівності* $\theta^q < \theta^{q+1}$.

Доведення. Перше твердження теореми доведене при описі алгоритму. Переконаємось у справедливості рівностей (48). Враховуючи (33) – (35), (38), (43) – (47), одержуємо

$$\theta^{q+1} = \sum_{i=1}^{n+1} \rho_i^{q+1} \varepsilon_i^{q+1}(-\varphi_{j_i^{q+1}}(s_i^{q+1})) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\rho_i^q - \rho^q \gamma_i^q) \varepsilon_i^q(-\varphi_{j_i^q}(s_i^q)) + \rho^q \varepsilon_{n+2}^q(-\varphi_{j_{n+2}^q}(s_{n+2}^q)) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} (\rho_i^q - \rho^q \gamma_i^q) \varepsilon_i^q(-\varphi_{j_i^q}(s_i^q)) - \rho^q \varepsilon_{n+2}^q \varphi_{j_{n+2}^q}(s_{n+2}^q) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} \rho_i^q \varepsilon_i^q(-\varphi_{j_i^q}(s_i^q)) + \rho^q \left(\sum_{i=1}^{n+1} \varepsilon_i^q \gamma_i^q \varphi_{j_i^q}(s_i^q) - \varepsilon_{n+2}^q \varphi_{j_{n+2}^q}(s_{n+2}^q) \right) =$$

$$= \theta^q + \rho^q \left(\sum_{i=1}^{n+1} \varepsilon_i^q \gamma_i^q \varphi_{j_i^q}(s_i^q) + \max_{j \in I} \left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^q f_k - \varphi_j \right\| - \varepsilon_{n+2}^q \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^q f_k(s_{n+2}^q) \right) =$$

$$= \theta^q + \rho^q \left(\max_{j \in I} \left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^q f_k - \varphi_j \right\| + \sum_{i=1}^{n+1} \varepsilon_i^q \gamma_i^q \varphi_{j_i^q}(s_i^q) + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^q \left(\sum_{i=1}^{n+1} \varepsilon_i^q \gamma_i^q (-f_k(s_i^q)) \right) \right) =$$

$$= \theta^q + \rho^q\left(\max_{j\in I}\left\|\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^q f_k - \varphi_j\right\| - \sum_{i=1}^{n+1}\gamma_i^q\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^q\varepsilon_i^q f_k(s_i^q) - \varepsilon_i^q\varphi_{j_i^q}(s_i^q)\right)\right) =$$

$$= \theta^q + \rho^q\left(\max_{j\in I}\left\|\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^q f_k - \varphi_j\right\| - \sum_{i=1}^{n+1}\gamma_i^q\theta^q\right) = \theta^q + \rho^q\left(\max_{j\in I}\left\|\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^q f_k - \varphi_j\right\| - \theta^q\right),$$

що й потрібно було встановити.

Оскільки $\rho^q > 0$, $q = 1, 2, \ldots$, з рівності (48) випливає, що коли $\theta^q < \max_{j\in I}\left\|\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^q f_k - \varphi_j\right\|$, то $\theta^q < \theta^{q+1}$.

Теорему доведено.

Теорема 7. *Виконуються нерівності* $\theta^q > \overline{\alpha}$, $q = 1, 2, \ldots$. *Точки* s_i^q, $i = \overline{1, n+1}$, *попарно різні.*

Перше твердження цієї теореми доводиться тривіально, а друге — аналогічно відповідному твердженню, встановленому при описі алгоритму.

Теорема 8. *Якщо описаний вище процес відшукання величини* (1) *нескінченний, то існує таке число* $r > 0$, *що точки* s_i^q, $i = \overline{1, n+1}$, *побудовані за алгоритмом, задовольняють умову* $\rho(s_{i_1}^q; s_{i_2}^q) \geq r$ *для всіх* i_1, i_2 *з* $\{1, \ldots, n+1\}$ $(i_1 \neq i_2)$ *і всіх* $q = 1, 2, \ldots$.

Доведення. Якщо властивість, що доводиться, не справджується, то можна знайти зростаючу послідовність номерів q_ν, для якої $\lim_{\nu\to\infty} s_i^{q_\nu} = \bar{s}_i$, $i = \overline{1, n+1}$, при цьому $\bar{s}_{i_1} = \bar{s}_{i_2}$ для деяких індексів $i_1, i_2 \in \{1, \ldots, n+1\}$.

Оскільки різних точок $\bar{s}_i$ не більше n, можна знайти такий елемент $\bar{g} \in V$, що

$$\bar{g}(\bar{s}_i) = \frac{\Phi_2(\bar{s}_i) + \Phi_1(\bar{s}_i)}{2}, \quad i = \overline{1, n+1}.$$

Раніше було доведено, що послідовність $\{\theta^q\}_{q=1}^{\infty}$ зростаюча і $\theta^1 > \overline{\alpha}$. Виберемо $\varepsilon > 0$ так, щоб $\varepsilon < \theta^1 - \overline{\alpha}$. Нехай V_i — такий окіл точки $\bar{s}_i$, що

$$\left|\frac{\Phi_2(s) + \Phi_1(s)}{2} - \bar{g}(s)\right| < \varepsilon \quad \text{для всіх} \quad s \in V_i, \ i = \overline{1, n+1}.$$

Для досить великих значень ν $s_i^{q_\nu} \in V_i$, $i = \overline{1, n+1}$. Тому для цих ν будуть виконуватись нерівності

$$\left|\frac{\Phi_2(s_i^{q_\nu}) + \Phi_1(s_i^{q_\nu})}{2} - \bar{g}(s_i^{q_\nu})\right| < \varepsilon, \quad i = \overline{1, n+1}.$$

Нехай $g^q = \sum_{k=1}^{n}\alpha_k^q f_k$, $q = 1, 2, \ldots$. Згідно з рівністю (33) для всіх $q = 1, 2, \ldots$

$$\varepsilon_i^q(g^q(s_i^q) - \varphi_{j_i^q}(s_i^q)) = \theta^q, \quad i = \overline{1, n+1}.$$

Тоді для всіх $\nu = 1, 2, \ldots$

$$g^{q_\nu}(s_i^{q_\nu}) - \varphi_{j_i^{q_\nu}}(s_i^{q_\nu}) = \varepsilon_i^{q_\nu}\theta^{q_\nu}, \quad i = \overline{1, n+1}.$$

Отже, для $\nu = 1, 2, \ldots$, $i = \overline{1, n+1}$

$$g^{q_\nu}(s_i^{q_\nu}) - \bar{g}(s_i^{q_\nu}) = g^{q_\nu}(s_i^{q_\nu}) - \varphi_{j_i^{q_\nu}}(s_i^{q_\nu}) + \varphi_{j_i^{q_\nu}}(s_i^{q_\nu}) - \bar{g}(s_i^{q_\nu}) =$$

$$= \varepsilon_i^{q_\nu}\theta^{q_\nu} + \frac{\Phi_2(s_i^{q_\nu}) + \Phi_1(s_i^{q_\nu})}{2} - \overline{g}(s_i^{q_\nu}) + \varphi_{j_i^{q_\nu}}(s_i^{q_\nu}) - \frac{\Phi_2(s_i^{q_\nu}) + \Phi_1(s_i^{q_\nu})}{2} =$$

$$= \varepsilon_i^{q_\nu}\theta^{q_\nu} + A_i^\nu + B_i^\nu,$$

де

$$A_i^\nu = \frac{\Phi_2(s_i^{q_\nu}) + \Phi_1(s_i^{q_\nu})}{2} - \overline{g}(s_i^{q_\nu}), \qquad B_i^\nu = \varphi_{j_i^{q_\nu}}(s_i^{q_\nu}) - \frac{\Phi_2(s_i^{q_\nu}) + \Phi_1(s_i^{q_\nu})}{2}.$$

Враховуючи, що для досить великих ν

$$\left|A_i^\nu\right| < \varepsilon, \qquad \left|B_i^\nu\right| \le \max_{j\in I}\max_{s\in S}\left|\frac{\Phi_2(s) + \Phi_1(s)}{2} - \varphi_j(s)\right| = \overline{\alpha}, \quad i = \overline{1, n+1},$$

для $\varepsilon_i^{q_\nu} = -1$ одержуємо $g^{q_\nu}(s_i^{q_\nu}) - \overline{g}(s_i^{q_\nu}) = -\theta^{q_\nu} + A_i^\nu + B_i^\nu < -\theta^{q_\nu} + \varepsilon + \overline{\alpha} <$ $< -\theta^{q_\nu} + \theta^1 - \overline{\alpha} + \overline{\alpha} = -(\theta^{q_\nu} - \theta^1) < 0$, а для $\varepsilon_i^{q_\nu} = 1$ $g^{q_\nu}(s_i^{q_\nu}) - \overline{g}(s_i^{q_\nu}) =$ $= \theta^{q_\nu} + A_i^\nu + B_i^\nu > \theta^{q_\nu} - \varepsilon - \overline{\alpha} > \theta^{q_\nu} - \theta^1 > 0.$

Звідси робимо висновок, що для досить великих ν многочлен $d^{q_\nu} = g^{q_\nu} - \overline{g}$ в точках $s_i^{q_\nu}$ має той самий знак, що і $\varepsilon_i^{q_\nu}$. Тоді $\sum_{i=1}^{n+1}\rho_i^{q_\nu}\varepsilon_i^{q_\nu}d^{q_\nu}(s_i^{q_\nu}) > 0$, що суперечить (31). Одержана суперечність доводить, що число r, про яке йде мова в теоремі, існує.

Теорему доведено.

Теорема 9. *Існує таке число $s > 0$, що отримувані в процесі алгоритму числа ρ_i^q задовольняють умову $\rho_i^q \ge s$ для всіх $i = 1, \ldots, n+1$ і всіх $q = 1, 2, \ldots$.*

Доведення. Для доведення теореми переконаємось, що $\inf_q \rho_i^q = s^i > 0$, $i =$ $= \overline{1, n+1}$. Тоді за s можна взяти $s = \inf_{1\le i\le n+1} s^i$. Припустимо, наприклад, що $\inf_q \rho_{n+1}^q = 0$. Тоді можна вибрати індекси q_ν так, що $\varepsilon_i^{q_\nu} = \varepsilon_i$, $\lim_{\nu\to\infty}\rho_i^{q_\nu} = \overline{\rho}_i$, $\overline{\rho}_{n+1} = 0$, $\lim_{\nu\to\infty} s_i^{q_\nu} = \overline{s}_i$, $i = \overline{1, n+1}$.

Покладаючи в (31), (32) $q = q_\nu$ і переходячи в одержаних після цього співвідношеннях до границі при $\nu \to \infty$, отримуємо співвідношення

$$\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\overline{\rho}_i f_k(\overline{s}_i) = 0, \quad k = \overline{1, n}, \qquad \sum_{i=1}^{n}\overline{\rho}_i = 1, \quad \overline{\rho}_i \ge 0, \quad i = \overline{1, n},$$

що суперечить умові Хаара, оскільки за попередньою теоремою точки $\overline{s}_i$, $i =$ $= \overline{1, n}$, різні.

Одержана суперечність доводить теорему.

Теорема 10. *Модифікований алгоритм Ремеза збігається зі швидкістю геометричної прогресії в тому розумінні, що*

$$0 \le \max_{j\in I}\left\|\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^q f_k - \varphi_j\right\| - \alpha^* \le AQ^q, \quad q = 1, 2, \ldots, \tag{49}$$

де $A > 0$ і $0 < Q < 1$.

Отримані в результаті застосування описаного вище алгоритму послідовності $\{\theta^q\}_{q=1}^\infty$ і $\{g^q\}_{q=1}^\infty$ збіжні, причому справедливі рівності

$$\lim_{q\to\infty}\theta^q = \alpha^*, \qquad \lim_{q\to\infty} g^q = g^*, \qquad \alpha^* = \max_{j\in I}\left\|g^* - \varphi_j\right\|,$$

тобто g^* — екстремальний елемент для величини (1).

Доведення. Згідно з (48) та (34)

$$\theta^{q+1} = \theta^q + \rho^q\left(\max_{j\in I}\left\|g^q - \varphi_j\right\| - \theta^q\right), \quad \theta^q \le \alpha^* \le \max_{j\in I}\left\|g^q - \varphi_j\right\|.$$

Тоді в силу теореми 9

$$\theta^{q+1} - \theta^q \ge s\left(\max_{j\in I}\left\|g^q - \varphi_j\right\| - \theta^q\right) \ge s(\alpha^* - \theta^q), \tag{50}$$

де $s > 0$. Зрозуміло, що можна вважати $s < 1$. Звідси

$$\alpha^* - \theta^q - (\alpha^* - \theta^{q+1}) = \theta^{q+1} - \theta^q \ge s\left(\max_{j\in I}\left\|g^q - \varphi_j\right\| - \theta^q\right) \ge s(\alpha^* - \theta^q), \tag{51}$$

$$\alpha^* - \theta^{q+1} \le (1-s)(\alpha^* - \theta^q) = Q(\alpha^* - \theta^q), \tag{52}$$

де $0 < Q = 1 - s < 1$, оскільки $0 < s < 1$.

На підставі (52) отримуємо

$$\alpha^* - \theta^{q+1} \le BQ^q, \tag{53}$$

де $B = \alpha^* - \theta^1$.

Підставляючи оцінку (53) в (51), маємо

$$BQ^{q-1} \ge \alpha^* - \theta^q \ge \theta^{q+1} - \theta^q \ge s\left(\max_{j\in I}\left\|g^q - \varphi_j\right\| - \theta^q\right).$$

Звідси

$$0 \le \max_{j\in I}\left\|g^q - \varphi_j\right\| - \alpha^* \le \max_{j\in I}\left\|g^q - \varphi_j\right\| - \theta^q \le \frac{B}{SQ}Q^q = AQ^q,$$

де $A = B/SQ$.

Оскільки $g^q = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^q f_k$, то нерівність (49) доведено.

Із (50) випливає

$$0 \le \alpha^* - \theta^q \le \frac{1}{s}(\theta^{q+1} - \theta^q).$$

В силу того, що послідовність $\{\theta^q\}_{q=1}^{\infty}$ зростаюча і обмежена, вона має границю. Тому з останніх нерівностей випливає, що $\lim_{q\to\infty} \theta^q = \alpha^*$.

Із співвідношення (50) отримуємо

$$\alpha^* \le \max_{j\in I}\left\|g^q - \varphi_j\right\| \le \frac{\theta^{q+1} - \theta^q}{s} + \theta^q,$$

звідки з урахуванням попередньої рівності робимо висновок, що $\lim_{q\to\infty} \max_{j\in I}\left\|g^q - \varphi_j\right\| = \alpha^*$.

Тоді послідовність $\left\{\max_{j\in I}\left\|g^q - \varphi_j\right\|\right\}_{q=1}^{\infty}$ — обмежена. Отже, існує таке число C, що $\max_{j\in I}\left\|g^q - \varphi_j\right\| \le C$, $q = 1, 2, \ldots$.

Оскільки

$$\left\|g^q\right\| - \max_{j\in I}\left\|\varphi_j\right\| \le \max_{j\in I}\left\|g^q - \varphi_j\right\| \le C, \quad q = 1, 2, \ldots,$$

то $\{g^q\}_{q=1}^{\infty}$ — обмежена послідовність скінченновимірного простору V, з якої можна вибрати збіжну до $g^* \in V$ підпослідовність $\{g^{q_\nu}\}_{\nu=1}^{\infty}$. Маємо

$$\lim_{\nu\to\infty} \max_{j\in I} \left\| g^{q_\nu} - \varphi_j \right\| = \max_{j\in I} \left\| g^* - \varphi_j \right\| = \alpha^*.$$

Це означає, що g^* — екстремальний елемент для величини (1). Аналогічно доводиться, що границя будь-якої іншої збіжної підпослідовності послідовності $\{g^q\}_{q=1}^{\infty}$ також є екстремальним елементом для величини (1). Оскільки екстремальний елемент для величини (1) єдиний, то $\lim_{q\to\infty} g^q = g^*$, де g^* — екстремальний елемент для величини (1).

Теорему доведено.

Зауваження. Оскільки

$$\theta^q \le \alpha^* \le \max_{j\in I} \left\| g^q - \varphi_j \right\| \tag{54}$$

і $\lim_{q\to\infty} \theta^q = \lim_{q\to\infty} \max_{j\in I} \left\| g^q - \varphi_j \right\| = \alpha^*$, оцінки (54) можна використати для відшукання величини α^* з наперед заданою точністю.

1. *Зуховицкий С. И.* О приближении действительных функций в смысле П. Л. Чебышева // Успехи мат. наук. – 1956. – **11**, вып. 2. – С. 125 – 159.
2. *Гаркави А. Л.* О чебышевском центре и выпуклой оболочке множества // Там же. – 1964. – **19**, вып. 6. – С. 139 – 145.
3. *Гольштейн Е. Г.* Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения. – М.: Наука, 1971. – 351 с.
4. *Степанец А. И.* Равномерные приближения тригонометрическими полиномами. Линейные методы. – Киев: Наук. думка, 1981. – 340 с.
5. *Степанец А. И., Сорич Н. М.* Одновременное приближение функций и их производных суммами Фурье. – Киев, 1985. – 63 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 85.7).
6. *Гнатюк Ю. В.* Проблема моментів з узагальненими моментами із многогранника // Нелінійні крайові задачі математичної фізики і їх застосування: Зб. наук. пр. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1996. – Ч.2. – С. 25 – 27.
7. *Гнатюк Ю. В., Гнатюк В. О.* Найкраще одночасне рівномірне наближення сім'ї неперервних на компакті функцій // Укр. мат. конгрес-2001: Тези доп. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2001. – С. 17 – 18.
8. *Дзядык В. К.* Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1988. – 304 с.
9. *Малачивский П. С., Петрович Р. Й.* Применение чебышевского приближения для решения систем линейных дифференциальных уравнений // Всесоюз. шк. „Теория приближения функций": Тез. докл. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1989. – С. 103.
10. *Ремез Е. Я.* Основы численных методов чебышевского приближения. – Киев: Наук. думка, 1969. – 623 с.
11. *Лоран П.-Ж.* Аппроксимация и оптимизация. – М.: Мир, 1975. – 496 с.
12. *Ковтунец В. В.* Алгоритм построения наилучшего приближения комплекснозначной функции на компактном множестве // Некоторые вопросы теории приближения функций и их приложение. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1988. – С. 71 – 78.
13. *Ковтунец В. В.* Алгоритм равномерного приближения непрерывных комплекснозначных функций рациональными // Всесоюз. шк. „Теория приближения функций": Тез. докл. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1989. – С. 103.
14. *Ковтунець В. В.* Алгоритм найкращого опозитивного наближення // Укр. мат. конгрес-2001: Тези доп. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2001. – С. 29.
15. *Kelly J. E.* The "Cutting plane" methods for solving convex programs // SIAM J. – 1960. – **8**, № 4. – P. 703 – 712.
16. *Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г.* Линейное программирование (теория и конечные методы). – М.: Физматгиз, 1963. – 774 с.

Одержано 01.03.2001,
після доопрацювання — 19.03.2002