УДК 517.521.8

С. Я. Деканов (Нац. пед. ун-т, Київ)

СТАТИСТИЧНА D-ВЛАСТИВІСТЬ МЕТОДІВ ПІДСУМОВУВАННЯ ВОРОНОГО КЛАСУ W_Q^2

We suggest a general method of obtaining the Tauber theorems with a remainder for certain class of Voronoi methods for summation of double sequences of elements from a locally convex linear topological space. This method generalizes N. Davydov's method of C-points.

Запропоновано загальний метод одержання тауберових теорем із залишком для певного класу методів Вороного підсумовування подвійних послідовностей елементів локально опуклого лінійного топологічного простору, що узагальнює метод C-точок М. О. Давидова.

1. Основні означення. Будемо розглядати послідовності $(S_{m,n})$, які набувають значень з дійсного віддільного локально опуклого лінійного топологічного простору L [1]. Через L^* позначимо спряжений з L простір неперервних лінійних функціоналів. *Метод підсумовування Вороного* $(W, p_{m,n})$ класу W_Q^2 визначається середніми

$$W_{m,n}^{(p)} = \frac{1}{P_{m,n}} \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} p_{m-i,n-j} S_{i,j}, \quad m, n \in \mathbb{N}_0,$$

де $p_{m,n} = p'_m p''_n \geq 0$, $P_{m,n} = P'_m P''_n$, $P'_m = \sum_{k=0}^{m} p'_k > 0$, $P''_n = \sum_{k=0}^{n} p''_k > 0 \;\; \forall\, m, n \in \mathbb{N}_0$, $p'_n / P'_n \to 0$, $p''_n / P''_n \to 0$, $n \to \infty$,

$$\dot{p}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} p'_m x^m = (1-x) \sum_{m=0}^{\infty} P'_m x^m = \frac{\dot{p}_a(x)}{\dot{p}_\alpha(x)}, \quad |x| < 1,$$

$$\ddot{p}(y) = \sum_{n=0}^{\infty} p''_n y^n = (1-y) \sum_{n=0}^{\infty} P''_n y^n = \frac{\ddot{p}_b(y)}{\ddot{p}_\beta(y)}, \quad |y| < 1. \tag{1}$$

У рівностях (1) $\dot{p}_a(x)$, $\dot{p}_\alpha(x)$, $\ddot{p}_b(y)$ і $\ddot{p}_\beta(y)$ — многочлени з дійсними коефіцієнтами степенів a, α, b та β відповідно, $\dot{p}_a(x)$ і $\ddot{p}_b(y)$ не мають додатних нулів, а $\dot{p}_a(x)$ і $\dot{p}_\alpha(x)$ та $\ddot{p}_b(y)$ і $\ddot{p}_\beta(y)$ не мають спільних нулів. Функції $\dot{p}(x)$ і $\ddot{p}(y)$ називаються *твірними функціями методу Вороного* $(W, p_{m,n})$.

До класу W_Q^2 належать, зокрема, *методи Чезаро* (C, α, β), α, $\beta \in \mathbb{N}_0$, які мають твірні функції $\dot{p}(x) = (1-x)^{-\alpha-1}$ та $\ddot{p}(y) = (1-y)^{-\beta-1}$.

Зафіксуємо додатні послідовності (λ'_n), (λ''_n), (σ'_n) і (σ''_n), які задовольняють умови

$$\lambda'_m \asymp \lambda'_n, \quad \lambda''_m \asymp \lambda''_n, \quad \sigma'_m \asymp \sigma'_n, \quad \sigma''_m \asymp \sigma''_n \quad \text{при} \quad m \asymp n, \tag{2}$$

$$0 < \gamma \leq \sigma'_n = o(n), \quad 0 < \gamma \leq \sigma''_n = o(n), \quad n \to \infty. \tag{3}$$

Покладемо $\mu_{m,n}^{(\alpha,\beta)} = \dfrac{\lambda'_m \lambda''_n}{\sigma'^{\alpha}_m \sigma''^{\beta}_n} \;\; \forall\, m, n, \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0$.

Назвемо точку $z = \theta$ $(z = \infty)$ $(\mu^{(\alpha,\beta)}, \sigma)$-*точкою* послідовності $(S_{m,n})$, якщо існують послідовності (m_k), (m_k^*), (n_k), (n_k^*), $a_k \geq 0$, $\varphi_k \in L^*$, число $\delta > 0$

та абсолютно опуклий окіл U нуля $\theta \in L$ такі, що $m_{k+1} \ge m_k^* > m_k \uparrow \infty$, $n_{k+1} \ge$ $\ge n_k^* > n_k \uparrow \infty$, $m_k^*/m_k \le 2$, $n_k^*/n_k \le 2$, $\sigma'_{m_k}(1 - m_k/m_k^*) \ge \delta$, $\sigma''_{n_k}(1 - n_k/n_k^*) \ge \delta$ $\forall k \in \mathbb{N}$ і для деякого $\varepsilon > 0$ (для будь-якого $\varepsilon > 0$) $\exists k_0$: $\varphi_k\left(\mu_{m_k, n_k}^{(\alpha,\beta)} S_{m,n}\right) \ge$ $\ge a_k > 0$ $\forall (m,n) \in \overline{m_k, m_k^*} \times \overline{n_k, n_k^*} =: \Delta_k$ $\forall k > k_0$, а $\varphi_k(\varepsilon U) < a_k$ $\forall k > k_0$.

Для однократних послідовностей (S_n) це означення ввів Г. О. Михалін [2] як узагальнення поняття (C)-точки М. О. Давидова [3].

Для комплексної послідовності $(S_{m,n})$ умови віддільності в останньому означенні набирають вигляду

$$\exists \theta_k \in (-\pi, \pi],\ k \in \mathbb{N}: \lim_{m,n \to \infty} \min_{(m,n) \in \Delta_k} \operatorname{Re} e^{i\theta_k} \mu_{m_k, n_k}^{(\alpha,\beta)} S_{m,n} = \omega > 0 \ (\omega = +\infty).$$

Будемо говорити, що *послідовність* $(S_{m,n})$ σ*-статистично збігається до нуля*, і писати $S_{m,n} = o(1)$ (σ-st), якщо кожен абсолютно опуклий окіл U нуля θ простору L є таким, що

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{m,n \to \infty} \frac{\sigma'_m \sigma''_n}{(m+1)(n+1)} \sum_{(i,j) \le (m,n): S_{i,j} \notin \varepsilon U} 1 = 0.$$

Замінивши тут символ "$\forall$" символом "$\exists$", одержимо означення σ*-статистичної обмеженості* послідовності $(S_{m,n})$, яку будемо позначати $S_{m,n} = O(1)$ (σ-st).

Із звичайної збіжності (обмеженості) випливає статистична, але не навпаки.

Поняття статистичної збіжності однократної числової послідовності (S_n) ввів Х. Фаст [4].

У подальшому будемо використовувати дві операції над послідовностями:

$c = a * b$ — згортка послідовностей $a = (a_{m,n})$ і $b = (b_{m,n})$, що визначається рівністю $c = (c_{m,n}) = \left(\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} a_{m-i,n-j} b_{i,j}\right)$, де одна з послідовностей a, b є числовою, інша — L-значною, або обидві числові;

$d = d' \odot d''$ — композиція однократних числових послідовностей $d' = (d'_n)$ та $d'' = (d''_n)$, що визначається рівністю $d = (d_{m,n}) = (d'_m d''_n)$. Операція згортки є асоціативною, комутативною і має нейтральний елемент $E = (E_{m,n})$: $E_{0,0} = 1$, $E_{m,n} = 0$ при $m + n > 0$, а між згорткою і композицією існує такий зв'язок: $(a * b) \odot (c * d) = (a \odot c) * (b \odot d)$.

2. Основними результатами роботи є наступні теореми.

Теорема 1. *Нехай* $(W, p_{m,n})$ *— метод Вороного з твірними функціями* (1), *причому число* 1 *є нулем кратності* $\alpha_1 \in \mathbb{N}_0$ *многочлена* $\tilde{p}_\alpha(x)$ *і нулем кратності* $\beta_1 \in \mathbb{N}_0$ *многочлена* $\tilde{p}_\beta(y)$. *Тоді якщо точка* $z = \theta$ ($z = \infty$) *є* $(\mu^{(\alpha_1, \beta_1)}, \sigma)$*-точкою послідовності* $(S_{m,n})$, *то* $\lambda_{m,n} W_{m,n}^{(p)} \ne o(1)$ (σ-st) ($\ne O(1)$ (σ-st)).

Цю теорему назвемо *статистичною* D*-властивістю методів Вороного* на честь М. О. Давидова, який першим довів так звану (C)-властивість методів Чезаро і ряд важливих наслідків з неї [3]. Для однократних числових послідовностей і звичайної збіжності теорему 1 доведено у роботі [5].

Теорема 1 містить, як частинний випадок, (C)-властивість методів Чезаро (C, α, β), доведену М. О. Каталовою [6] для числових подвійних послідовностей $(S_{m,n})$, випадку $\lambda'_n \equiv \lambda''_n \equiv \sigma'_n \equiv \sigma''_n \equiv 1$ та звичайної збіжності.

З теореми 1 можна вивести ряд тауберових теорем, якщо задати умови, при яких необмежена (не збіжна до нуля) послідовність $\left(\mu_{m,n}^{(\alpha_1,\beta_1)} S_{m,n}\right)$ буде мати $(\mu^{(\alpha_1,\beta_1)}, \sigma)$-точку $z = \infty$ $(z = \theta)$. Однією з таких теорем є, наприклад, наступна теорема.

Теорема 2. *Нехай* $(W, p_{m,n})$ *— метод Вороного з формулювання теореми 1,* $(S_{m,n})$ *— дійсна послідовність, яка задовольняє умову*

$$\forall f \in L^* \quad \exists\, r \geq 0: \quad \varliminf_{\substack{m^* \geq m \to \infty \\ n^* \geq n \to \infty}} \mu_{m,n}^{(\alpha_1,\beta_1)} f(S_{m^*,n^*} - S_{m,n}) \geq -r > -\infty, \tag{4}$$

коли

$$\sigma'_m\left(1 - \frac{m}{m^*}\right) \to 0 \quad i \quad \sigma''_n\left(1 - \frac{n}{n^*}\right) \to 0.$$

Тоді якщо $\lambda_{m,n} W_{m,n}^{(p)} = O(1)$ $(\sigma\text{-st})$, *то* $\mu_{m,n}^{(\alpha_1,\beta_1)} S_{m,n} = O(1)$, $m, n \to \infty$.

Для методів Чезаро, звичайної збіжності і числових послідовностей аналогічну теорему доведено у роботі В. М. Алданова і Г. О. Михаліна [7].

3. Допоміжні твердження. Основні етапи доведення теорем 1 і 2 подамо у вигляді лем.

Лема 1. *Нехай* $\dot{p}(x)$, $\ddot{p}(y)$, $\dot{q}(x)$ *і* $\ddot{q}(y)$ *— твірні функції двох методів Вороного* $(W, p_{m,n})$ *і* $(W, q_{m,n})$ *класу* W_Q^2,

$$\dot{k}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} k'_m x^m = \frac{\dot{q}(x)}{\dot{p}(x)} \quad та \quad \ddot{k}(y) = \sum_{n=0}^{\infty} k''_n y^n = \frac{\ddot{q}(y)}{\ddot{p}(y)}$$

для досить малих $|x|$ *і* $|y|$, *причому* $\dot{k}(x)$ *і* $\ddot{k}(y)$ *є многочленами. Тоді якщо*

$$\lambda'_n \sum_{i=0}^{n} |k'_{n-i}| \frac{P'_i}{\lambda'_i} = O(1) \quad i \quad \lambda''_n \sum_{i=0}^{n} |k''_{n-i}| \frac{P''_i}{\lambda''_i} = O(1), \quad n \to \infty, \tag{5}$$

то $(W, q_{m,n})_\lambda \supset (W, p_{m,n})_\lambda$, *тобто з умови* $\lambda_{m,n} W_{m,n}^{(p)} = o(1)$ $(= O(1))$ *випливає умова* $\lambda_{m,n} W_{m,n}^{(q)} = o(1)$ $(= O(1))$, $m, n \to \infty$.

Лема 2. *Нехай метод* $(W, p_{m,n})$ *має твірні функції вигляду* (1). *Тоді існує метод* $(W, q_{m,n}) \in W_Q^2$, *твірні функції якого мають вигляд*

$$\begin{aligned} \dot{q}(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} q'_m x^m = (1-x) \sum_{m=0}^{\infty} Q'_m x^m = \frac{\dot{B}_r(x)}{\dot{p}_\alpha(x)}, \quad |x| < 1, \\ \ddot{q}(y) &= \sum_{n=0}^{\infty} q''_n y^n = (1-y) \sum_{n=0}^{\infty} Q''_n y^n = \frac{\ddot{B}_t(y)}{\ddot{p}_\beta(y)}, \quad |y| < 1, \end{aligned} \tag{6}$$

де $\dot{B}_r(x)$ *і* $\ddot{B}_t(y)$ *— многочлени з невід'ємними коефіцієнтами степенів* r *і* t *відповідно, і такий, що* $(W, q_{m,n})_\lambda \supset (W, p_{m,n})_\lambda$.

Лема 3. *Нехай при збереженні умов і позначень* (q'_n), (q''_n) *та* $\dot{B}_r(x)$, $\ddot{B}_r(x)$ *леми 2 число 1 є нулем кратності* $\alpha_1 \in \mathbb{N}_0$ *многочлена* $\dot{p}_\alpha(x)$ *і нулем кратності* $\beta_1 \in \mathbb{N}_0$ *многочлена* $\ddot{p}_\beta(y)$. *Позначимо*

$$\dot{g}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} g'_m x^m = (1-x)\sum_{m=0}^{\infty} G'_m x^m = \frac{\dot{B}_r(x)}{(1-x)^{\alpha_1}}, \quad |x| < 1,$$
$$\ddot{g}(y) = \sum_{n=0}^{\infty} g''_n y^n = (1-y)\sum_{n=0}^{\infty} G''_n y^n = \frac{\ddot{B}_t(y)}{(1-y)^{\beta_1}}, \quad |y| < 1. \tag{7}$$

Тоді метод $(W, g_{m,n}) \in W_Q^2$ *і* $(W, g_{m,n})_\lambda \supset (W, q_{m,n})_\lambda$.

Лема 4. *Нехай* $(W, g_{m,n})$ — *метод із формулювання леми 3,*

$$\sum_{m=0}^{\infty} c'_m x^m = \frac{1}{\dot{p}(x)} = \left(\sum_{m=0}^{\infty} p'_m x^m\right)^{-1}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} c''_n y^n = \frac{1}{\ddot{p}(y)} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} p''_n y^n\right)^{-1},$$

$m_{k+1} \geq m_k^* > m_k \uparrow \infty$, $n_{k+1} \geq n_k^* > n_k \uparrow \infty$, $a'_{k,i} = 0$ *для* $i > m_k^* - m_k$, $a'_k = \sum_{i=0}^{m_k^*-m_k} a'_{k,i} \neq 0$, $a''_{k,j} = 0$ *для* $j > n_k^* - n_k$, $a''_k = \sum_{j=0}^{n_k^*-n_k} a''_{k,j} \neq 0$ $\forall k \in \mathbb{N}_0$.

Тоді

$$\sum_{m=0}^{m_k^*}\sum_{n=0}^{n_k^*}\left(\sum_{i=0}^{m_k^*-m}\sum_{j=0}^{n_k^*-n} c'_{m_k^*-m-i}\, c''_{n_k^*-n-j}\, a'_{k,i}\, a''_{k,j}\right) G'_m G''_n W_{m,n}^{(g)} =$$
$$= \sum_{m=0}^{m_k^*-m_k}\sum_{n=0}^{n_k^*-n_k} a'_{k,m_k^*-m_k-m}\, a''_{k,n_k^*-n_k-n}\, S_{m_k+m,n_k+n} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

Лема 5. *Нехай* $\dot{g}(x)$, $\ddot{g}(y)$, α_1, β_1, r, t — *з формулювання леми 3,* $m_{k+1} \geq m_k^* > m_k + r \uparrow \infty$, $n_{k+1} \geq n_k^* > n_k + t \uparrow \infty$, $h_k = [(m_k^* - m_k - r)/\alpha_1] > 0$ *для* $\alpha_1 \neq 0$, $h_k = 1$ *при* $\alpha_1 = 0$, $t_k = [(n_k^* - n_k - t)/\beta_1] \geq 1$ *для* $\beta_1 \neq 0$, $t_k = 1$ *при* $\beta_1 = 0$,

$$\dot{R}_{\alpha_1 h_k}(x) = (1 - x^{h_k})^{\alpha_1} = \sum_{i=0}^{\alpha_1 h_k} \delta'_i(h_k) x^i, \quad \sum_{i=0}^{\infty} a'_{k,i} x^i = \dot{R}_{\alpha_1 h_k}(x)\dot{p}(x),$$
$$\ddot{R}_{\beta_1 t_k}(y) = (1 - y^{t_k})^{\beta_1} = \sum_{j=0}^{\beta_1 t_k} \delta''_j(t_k) y^j, \quad \sum_{j=0}^{\infty} a''_{k,j} y^j = \ddot{R}_{\beta_1 t_k}(y)\ddot{p}(y) \quad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

Тоді

1) $a'_{k,i} \geq 0$, $a''_{k,j} \geq 0$ $\forall i, j, k \in \mathbb{N}_0$;

2) $a'_{k,i} = 0$ *для* $i > \alpha_1(h_k - 1) + r$, $a''_{k,j} = 0$ *для* $j > \beta_1(t_k - 1) + t$;

3) $a'_k = \sum_{i=0}^{m_k^*-m_k} a'_{k,i} = h_k^{\alpha_1}\dot{B}_r(1) > 0$, $a''_k = \sum_{j=0}^{n_k^*-n_k} a''_{k,i} = t_k^{\beta_1}\ddot{B}_t(1) > 0$ $\forall k \in \mathbb{N}_0$;

4) $$\sum_{m=0}^{m_k^*}\sum_{n=0}^{n_k^*}\left(\sum_{i=0}^{m_k^*-m}\sum_{j=0}^{n_k^*-n} c'_{m_k^*-m-i}\, c''_{n_k^*-n-j}\, a'_{k,i}\, a''_{k,j}\right) G'_m G''_n W_{m,n}^{(g)} =$$
$$= \sum_{m=0}^{\alpha_1}\sum_{n=0}^{\beta_1} (-1)^{m+n}\binom{\alpha_1}{m}\binom{\beta_1}{n} G'_{m_k^*-mh_k}\, G''_{n_k^*-nt_k}\, W^{(g)}_{m_k^*-mh_k,\, n_k^*-nt_k} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0;$$

5) $m_k^* - m h_k \geq m_k$, $n_k^* - n t_k \geq t_k$ $\forall m \in \overline{0, \alpha_1}$, $n \in \overline{0, \beta_1}$, $k \in \mathbb{N}_0$.

Зауваження. Лема 5 залишається правильною, якщо h_k і t_k замінити на такі натуральні $\bar{h}_k$ і $\bar{t}_k$ відповідно, що $1 \le \bar{h}_k \le h_k$, $1 \le \bar{t}_k \le t_k$ $\forall\, k$.

Лема 6. *Нехай ξ та η — цілі невід'ємні числа, $(a'_{m,n})$ і $(a''_{m,n})$ — дійсні матриці такі, що $a'_{m,m-i} = 0$ для $m > \xi$ та $i < m - \xi$, $a''_{n,n-j} = 0$ для $n > \eta$ та $j < n - \eta$, крім того, $\left|a'_{m,m-i}\right| \le H$ $\forall\, m \in \mathbb{N}_0$, $i < m$, $\left|a''_{n,n-j}\right| \le H$ $\forall\, n \in \mathbb{N}_0$, $j \le n$, а послідовності $(S_{m,n})$ і $(T_{m,n})$ пов'язані рівністю*

$$T_{m,n} = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} a'_{m,m-i} a''_{n,n-j} S_{i,j} \quad \forall\, m,\, n \in \mathbb{N}_0.$$

Тоді якщо $S_{m,n} = o(1)$ $(\sigma\text{-st})$ $(= O(1)$ $(\sigma\text{-st}))$, то $T_{m,n} = o(1)$ $(\sigma\text{-st})$ $(= O(1)$ $(\sigma\text{-st}))$.

Лема 7. *Нехай $W_{m,n} \in L$, U — абсолютно опуклий окіл нуля, $m_{k+1} \ge m_k^* > m_k \uparrow \infty$, $n_{k+1} \ge n_k^* > n_k \uparrow \infty$, $m_k^*/m_k \le 2$, $n_k^*/n_k \le 2$, $\sigma'_{\bar{m}_k}(1 - m_k/\bar{m}_k) \ge \delta > 0$, $\sigma'_{m_k^*}(1 - \bar{m}_k/m_k^*) \ge \delta$, $\sigma''_{\bar{n}_k}(1 - n_k/\bar{n}_k) \ge \delta$, $\sigma''_{n_k^*}(1 - \bar{n}_k/n_k^*) \ge \delta$,*

$$h_k = \begin{cases} \left[\dfrac{\bar{m}_k - m_k - r}{\alpha}\right], & \alpha \ne 0; \\ 1, & \alpha = 0, \end{cases} \qquad t_k = \begin{cases} \left[\dfrac{\bar{n}_k - n_k - t}{\beta}\right], & \beta \ne 0; \\ 1, & \beta = 0 \end{cases}$$

для будь-якого $k \in \mathbb{N}_0$, де α, β, r, $t \in \mathbb{N}_0$ — задані числа. Припустимо також, що при деякому $\varepsilon > 0$ виконується умова

$$\lim_{m,n\to\infty} \frac{\sigma'_m \sigma''_n}{(m+1)(n+1)} \sum_{(i,j)\le(m,n):\, W_{i,j} \notin \varepsilon U} 1 = 0. \tag{8}$$

Тоді існують (m'_k), (n'_k) і $k^* \in \mathbb{N}_0$ такі, що $\bar{m}_k \le m'_k \le m_k^*$, $\bar{n}_k \le n'_k \le n_k^*$, причому $W_{m'_k - mh_k,\, n'_k - nt_k} \in \varepsilon U$ для будь-яких $(m,n) \in \overline{0,\alpha} \times \overline{0,\beta}$, $k > k^*$.

4. Доведення леми 1. З означення функцій $k'(x)$ і $k''(y)$ випливає $q' = p' * k'$, $q'' = p'' * k''$. Тоді за умовою леми 1 і означенням середніх $W^{(p)}$ і $W^{(q)}$

$$\begin{aligned}(Q' \circ Q'')W^{(q)} &= (q' \circ q'') * S = ((p' * k') \circ (p'' * q'')) * S = \\ &= (p' \circ p'') * (k' \circ k'') * S = (k' \circ k'') * (p' \circ p'') * S = \\ &= (k' \circ k'') * (P' \circ P'')W^{(p)},\end{aligned}$$

тобто

$$Q'_m Q''_n W^{(q)}_{m,n} = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} k'_{m-i} k''_{n-j} P'_i P''_j W^{(p)}_{i,j} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda'_m \lambda''_n W^{(q)}_{m,n} = \frac{\lambda'_m \lambda''_n}{Q'_m Q''_n} \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} k'_{m-i} k''_{n-j} \frac{P'_i}{\lambda'_i} \frac{P''_j}{\lambda''_j} (\lambda'_i \lambda''_j W^{(p)}_{i,j}) \quad \forall\, m,\, n \in \mathbb{N}_0.$$

Для векторнозначної послідовності запис $\lambda_{m,n} W^{(p)}_{m,n} = O(1)$, $m, n \to \infty$, означає, що існує $\nu \in \mathbb{N}$, для якого множина $\left\{\lambda_{m,n} W^{(p)}_{m,n} \colon m, n \ge \nu\right\}$ поглинається кожним абсолютно опуклим околом нуля U, тобто $\lambda_{m,n} W^{(p)}_{m,n} \in tU$ $\forall\, m,\, n \ge \nu$ $\forall\, t \colon |t| > \delta = \delta(U) > 0$.

Позначимо через r_1 і r_2 степені многочленів $\dot{k}(x)$ і $\ddot{k}(y)$ відповідно. Нехай число $\nu \geq \max\{r_1, r_2\}$ таке, що множина $\left\{\lambda_{m,n} W_{m,n}^{(p)} : m, n \geq \nu\right\}$ поглинається будь-яким абсолютно опуклим околом нуля (тобто обмежена). Тоді за властивостями абсолютно опуклих множин [1, с. 16]

$$\lambda_{m,n} W_{m,n}^{(q)} = \frac{\lambda_{m,n}}{Q_{m,n}} \left(\sum_{i=0}^{m-\nu-1} \sum_{j=0}^{n} + \sum_{i=m-\nu}^{m} \sum_{j=0}^{n-\nu-1} + \sum_{i=m-\nu}^{m} \sum_{j=n-\nu}^{n} \right) k_{m-i,n-j} \frac{P_{i,j}}{\lambda_{i,j}} \lambda_{i,j} W_{i,j}^{(p)} =$$

$$= \frac{\lambda_m' \lambda_n''}{Q_m' Q_n''} \sum_{i=m-\nu}^{m} \sum_{j=n-\nu}^{n} k_i' k_j'' \frac{P_i'}{\lambda_i'} \frac{P_j''}{\lambda_j''} W_{i,j}^{(p)} \subset \left(\frac{\lambda_m' \lambda_n''}{Q_m' Q_n''} \sum_{i=m-\nu}^{m} \sum_{j=n-\nu}^{n} \left| k_{m-i}' k_{n-j}'' \right| \frac{P_i'}{\lambda_i'} \frac{P_j''}{\lambda_j''} \right) tU =$$

$$= \left(\frac{\lambda_m'}{Q_m'} \sum_{i=m-\nu}^{m} \left| k_{m-i}' \right| \frac{P_i'}{\lambda_i'} \right) \left(\frac{\lambda_n''}{Q_n''} \sum_{j=n-\nu}^{n} \left| k_{n-j}'' \right| \frac{P_j''}{\lambda_j''} \right) tU \subset H_1 H_2 tU \quad \forall\, m, n \geq 2\nu,$$

оскільки при $m, n \geq \nu$ виконуються нерівності $m - i > \nu$ та $n - j > \nu$ для $0 \leq \leq i < m - \nu$, $0 \leq j < n - \nu$, а тому $k_{m-i}' = 0$ і $k_{n-j}'' = 0$ (чим пояснюється зникнення перших двох сум у дужках). Числа $H_1 > 0$ і $H_2 > 0$ визначаються з умови (5). Отже, множина $\left\{\lambda_{m,n} W_{m,n}^{(q)} : m, n \geq 2\nu\right\}$ поглинається довільним околом нуля, тобто вона обмежена, а це означає, що $\lambda_{m,n} W_{m,n}^{(q)} = O(1)$, m, $n \to \infty$.

Аналогічно доводиться друга частина леми 1, пов'язана з умовою „o". Лему 1 доведено.

5. Доведення лем 2 та 3. При виконанні умов леми 2 послідовності (p_n') і (p_n'') задовольняють умови леми 3 роботи [5], внаслідок якої існує $(W, q_{m,n}) \in \in W_Q^2$ з твірними функціями $\dot{q}(x)$ і $\ddot{q}(y)$ відповідно, які мають вигляд (6), причому функції $\dot{k}(x) = \dfrac{\dot{q}(x)}{\dot{p}(x)}$ і $\ddot{k}(y) = \dfrac{\ddot{q}(y)}{\ddot{p}(y)}$ є многочленами. Тоді за лемою 1 $(W, q_{m,n})_\lambda \supset (W, p_{m,n})_\lambda$.

Лему 2 доведено.

При виконанні умов леми 3 послідовності (q_n') і (q_n'') задовольняють умови леми 4 роботи [5], внаслідок якої існує $(W, g_{m,n}) \in W_Q^2$ з твірними функціями $\dot{g}(x)$ і $\ddot{g}(y)$ відповідно, які мають вигляд (7), причому функції $\dot{k}(x) = \dfrac{\dot{g}(x)}{\dot{q}(x)}$ і $\ddot{k}(y) = \dfrac{\ddot{g}(y)}{\ddot{q}(y)}$ є многочленами. Тоді за лемою 1 $(W, g_{m,n})_\lambda \supset (W, q_{m,n})_\lambda$.

Лему 3 доведено.

6. Доведення леми 4. З означення послідовностей (c_n') і (c_n'') випливає, що $g_0' c_0' = 1$, $\sum_{i=0}^{m} g_{m-i}' c_i' = 0 \ \forall\, m \in \mathbb{N}$, $g_0'' c_0'' = 1$, $\sum_{j=0}^{n} g_{n-j}'' c_i' = 0 \ \forall\, n \in \mathbb{N}$, тобто $c' * g' = c'' * g'' = \overline{E}$, де $\overline{E}$ — нейтральний елемент однократної згортки. Тому, враховуючи властивості згорток та композицій і те, що $\overline{E} \odot \overline{E} = E$, з означення послідовностей $(W_{m,n}^{(g)})$, $(a_{k,i}')$ та $(a_{k,j}'')$ одержуємо

$$\sum_{m=0}^{m_k^*} \sum_{n=0}^{n_k^*} \left(\sum_{i=0}^{m_k^*-m} \sum_{j=0}^{n_k^*-n} c_{m_k^*-m-i}' c_{n_k^*-n-j}'' a_{k,i}' a_{k,j}'' \right) G_m' G_n'' W_{m,n}^{(g)} =$$

$$= \left((c' \odot c'') * (a_k' \odot a_k'') * (G' \odot G'') W^{(g)} \right)_{m_k^*, n_k^*} =$$

$$= \left((c' \odot c'') * (a'_k \odot a''_k) * (g' \odot g'') * S\right)_{m_k^*, n_k^*} =$$

$$= \left((c' \odot c'') * (g' \odot g'') * (a'_k \odot a''_k) * S\right)_{m_k^*, n_k^*} =$$

$$= \left(((c' * g') \odot (c'' * g'')) * (a'_k \odot a''_k) * S\right)_{m_k^*, n_k^*} =$$

$$= \left((\overline{E}' \odot \overline{E}') * (a'_k \odot a''_k) * S\right)_{m_k^*, n_k^*} = \left((a'_k \odot a''_k) * S\right)_{m_k^*, n_k^*} =$$

$$= \sum_{m=0}^{m_k^*} \sum_{n=0}^{n_k^*} a'_{k, m_k^* - m} a''_{k, n_k^* - n} S_{m,n} =$$

$$= \sum_{m=0}^{m_k^* - m_k} \sum_{n=0}^{n_k^* - n_k} a'_{k, m_k^* - m_k - m} a''_{k, n_k^* - n_k - n} S_{m_k + m, n_k + n} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}_0.$$

Лему 4 доведено.

7. Доведення леми 5. У роботі [5] (лема 6) доведено, що

$$\delta'_i(h_k) = \begin{cases} 0, & \text{коли} \quad i \neq m h_k \ \ \forall\, m \in [0; \alpha_1]; \\ (-1)^m \dbinom{\alpha_1}{m}, & \text{коли} \quad i = m h_k \ \text{ для деякого } \ m \in [0; \alpha_1], \end{cases}$$

$$\delta''_j(t_k) = \begin{cases} 0, & \text{коли} \quad j \neq n t_k \ \ \forall\, n \in [0; \beta_1]; \\ (-1)^n \dbinom{\beta_1}{n}, & \text{коли} \quad j = n t_k \ \text{ для деякого } \ n \in [0; \beta_1], \end{cases}$$

$$a'_{k,n} = \sum_{i=0}^{n} \delta'_{n-i}(h_k) g'_i = (\delta'(h_k) * g')_n, \quad a''_{k,n} = (\delta''(t_k) * g'')_n \quad \forall\, k,\ n \in \mathbb{N}_0,$$

а також правильність тверджень $1-3$ та 5 леми 5.

Залишається довести рівність 4.

Застосовуючи лему 1, отримуємо

$$\sum_{m=0}^{m_k^*} \sum_{n=0}^{n_k^*} \left(\sum_{i=0}^{m_k^* - m} \sum_{j=0}^{n_k^* - n} c'_{m_k^* - m - i} c''_{n_k^* - n - j} a'_{k,i} a''_{k,j} \right) G'_m G''_n W^{(g)}_{m,n} =$$

$$= \left((c' \odot c'') * (a'_k \odot a''_k) * (G' \odot G'') W^{(g)}\right)_{m_k^*, n_k^*} =$$

$$= \left(((c' * a'_k) \odot (c'' * a''_k)) * (G' \odot G'') W^{(g)}\right)_{m_k^*, n_k^*} =$$

$$= \left(((c' * \delta'(h_k) * g') \odot (c'' * \delta''(t_k) * g'')) * (G' \odot G'') W^{(g)}\right)_{m_k^*, n_k^*} =$$

$$= \left((\delta'(h_k) \odot \delta''(t_k)) * (G' \odot G'') W^{(g)}\right)_{m_k^*, n_k^*} =$$

$$= \left((G' \odot G'') W^{(g)} * (\delta'(h_k) \odot \delta''(t_k))\right)_{m_k^*, n_k^*} =$$

$$= \sum_{i=0}^{m_k^*} \sum_{j=0}^{n_k^*} \delta'_i(h_k) \delta''_j(t_k) G'_{m_k^* - i} G''_{n_k^* - j} W^{(g)}_{m_k^* - i, n_k^* - j} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\alpha_1} \sum_{n=0}^{\beta_1} (-1)^m \binom{\alpha_1}{m} (-1)^n \binom{\beta_1}{n} G'_{m_k^* - m h_k} P''_{n_k^* - n t_k} W^{(g)}_{m_k^* - m h_k, n_k^* - n t_k} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}_0.$$

Лему 5 доведено.

8. Доведення леми 6. Припустимо, що $S_{m,n} = o(1)$ (σ-st), виберемо довільний абсолютно опуклий окіл нуля U, а також зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$.

Зауважимо, що

$$\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a'_{m,m-i}a''_{n,n-j} = \begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{m}\sum\limits_{j=0}^{n} a'_{m,m-i}a''_{n,n-j}, & \text{коли} \quad (m,n) \le (\xi,\eta); \\ \sum\limits_{i=0}^{m}\sum\limits_{j=n-\eta}^{n} a'_{m,m-i}a''_{n,n-j}, & \text{коли} \quad m \le \xi, \quad n > \eta; \\ \sum\limits_{i=m-\xi}^{m}\sum\limits_{j=0}^{n} a'_{m,m-i}a''_{n,n-j}, & \text{коли} \quad m > \xi, \quad n \le \eta; \\ \sum\limits_{i=m-\xi}^{m}\sum\limits_{j=n-\eta}^{n} a'_{m,m-i}a''_{n,n-j}, & \text{коли} \quad m > \xi, \quad n > \eta. \end{cases}$$

Звідси випливає

$$\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} \left|a'_{m,m-i}a''_{n,n-j}\right| \le (\xi+1)(\eta+1)H =: M \quad \forall\, m,\, n \in \mathbb{N}_0.$$

Тому якщо при деякому (i,j) одночасно справджуються співвідношення $S_{k,l} \in (\varepsilon/M)U$ $\forall (k,l)$: $\max\{i-\xi, 0\} \le k \le i$, $\max\{j-\eta, 0\} \le l \le j$, то, враховуючи абсолютну опуклість околу $(\varepsilon/M)U$, отримуємо

$$T_{i,j} = \sum_{k=0}^{i}\sum_{l=0}^{j} a'_{i,i-k}a''_{j,j-l}S_{i,j} \in \left(\sum_{k=0}^{i}\sum_{l=0}^{j} a'_{i,i-k}a''_{j,j-l}S_{i,j}\right)\frac{\varepsilon}{M}U \subset$$

$$\subset \left(\sum_{k=0}^{i}\sum_{l=0}^{j} \left|a'_{i,i-k}a''_{j,j-l}\right|\right)\frac{\varepsilon}{M}U \subset M\cdot\frac{\varepsilon}{M}U = \varepsilon U.$$

Позначимо через $\nu_{m,n}$ кількість індексів $(i,j) \le (m,n)$ таких, що $S_{i,j} \notin$ $\notin (\varepsilon/M)U$, а через $(i_{m,n}^{(1)}, j_{m,n}^{(1)}), (i_{m,n}^{(2)}, j_{m,n}^{(2)}), \ldots, (i_{m,n}^{(\nu_{m,n})}, j_{m,n}^{(\nu_{m,n})})$ самі ці індекси. Оскільки $S_{m,n} = o(1)$ (σ-st), то

$$\frac{\sigma'_m\sigma''_n}{(m+1)(n+1)} \sum_{(i,j)\le(m,n): S_{i,j}\notin(\varepsilon/M)U} 1 = \frac{\sigma'_m\sigma''_n}{(m+1)(n+1)}\nu_{m,n} \to 0, \quad m,\, n \to \infty.$$

Вилучимо з прямокутника $\Delta_{m,n} = \overline{0,m}\times\overline{0,n}$ прямокутники $\Delta_{m,n}^{(\nu)} =$ $= \overline{i_{m,n}^{(\nu)}, i_{m,n}^{(\nu)}+\xi} \times \overline{j_{m,n}^{(\nu)}, j_{m,n}^{(\nu)}+\eta}$ $\forall\ \nu \in \overline{1,\nu_{m,n}}$. Загальна кількість вилучених мультиіндексів при фіксованому (m,n) не перевищує $(\xi+1)(\eta+1)\nu_{m,n}$. При цьому якщо (i,j) — деякий мультиіндекс із тих, що залишилися в $\Delta_{m,n}$ після вилучення прямокутників $\Delta_{m,n}^{(\nu)}$, $\nu \in \overline{1,\nu_{m,n}}$, то $S_{k,l} \in (\varepsilon/M)U$ $\forall (k,l)$: $\max\{i-\xi, 0\} \le k \le i$, $\max\{j-\eta, 0\} \le l \le j \Rightarrow T_{i,j} \in \varepsilon U$. Тому

$$\frac{\sigma'_m\sigma''_n}{(m+1)(n+1)} \sum_{(i,j)\le(m,n): T_{i,j}\notin\varepsilon U} 1 \le \frac{\sigma'_m\sigma''_n}{(m+1)(n+1)} \sum_{(i,j)\le(m,n):(i,j)\in\bigcup_{\nu=1}^{\nu_{m,n}}\Delta_{m,n}^{(\nu)}} 1 \le$$

$$\le \frac{\sigma'_m\sigma''_n}{(m+1)(n+1)}\nu_{m,n} \to 0, \quad m,\, n \to \infty.$$

Це означає, що $T_{m,n} = o(1)$ (σ-st).

Лему 6 для умови „o" доведено.

Для умови „O" доведення леми 6 відрізняється тільки вибором числа ε.

9. Доведення леми 7. Враховуючи умови (2), (3) та нерівності $m_k^*/m_k \le 2$ і $n_k^*/n_k \le 2 \ \ \forall k \in \mathbb{N}$, робимо висновок, що $\exists \delta_1 > 0, \ k_0 \in \mathbb{N}_0$:

$$\frac{\sigma'_{m_k^*}}{m_k^*+1}\left(m_k^* - \overline{m}_k + 1\right) = \frac{m_k^*}{m_k^*+1}\sigma'_{m_k^*}\left(1 - \overline{m}_k/m_k^*\right) + \frac{\sigma'_{m_k^*}}{m_k^*+1} \ge \delta_1,$$

$$\frac{\sigma''_{n_k^*}}{n_k^*+1}\left(n_k^* - \overline{n}_k + 1\right) = \frac{n_k^*}{n_k^*+1}\sigma''_{n_k^*}\left(1 - \overline{n}_k/n_k^*\right) + \frac{\sigma''_{n_k^*}}{n_k^*+1} \ge \delta_1,$$

у випадку $\alpha \ne 0$

$$\frac{\sigma'_{m_k^*}}{m_k^*+1}h_k > \frac{\sigma'_{m_k^*}}{m_k^*+1}\left(\frac{\overline{m}_k - m_k - r}{\alpha} - 1\right) =$$

$$= \frac{\sigma'_{m_k^*}}{\sigma'_{\overline{m}_k}}\frac{\overline{m}_k}{m_k^*+1}\sigma'_{\overline{m}_k}\left(1 - m_k/\overline{m}_k\right)/\alpha - \frac{\sigma'_{m_k^*}}{m_k^*+1}(r/\alpha+1) \ge \delta_1,$$

у випадку $\beta \ne 0$

$$\frac{\sigma''_{n_k^*}}{n_k^*+1}t_k > \frac{\sigma''_{n_k^*}}{n_k^*+1}\left(\frac{\overline{n}_k - n_k - t}{\beta} - 1\right) =$$

$$= \frac{\sigma''_{n_k^*}}{\sigma''_{\overline{n}_k}}\frac{\overline{n}_k}{n_k^*+1}\sigma''_{\overline{n}_k}\left(1 - n_k/\overline{n}_k\right)/\beta - \frac{\sigma''_{n_k^*}}{n_k^*+1}(t/\beta+1) \ge \delta_1 \quad \forall k > k_0.$$

Позначимо $m_k^{**} = \min\{\overline{m}_k + h_k - 1, \ m_k^*\}, \ \ n_k^{**} = \min\{\overline{n}_k + t_k - 1, \ n_k^*\} \ \ \forall k \in \mathbb{N}$. З чотирьох доведених вище нерівностей випливають дві наступні:

$$\frac{\sigma'_{m_k^*}}{m_k^*+1}\left(m_k^{**} - \overline{m}_k + 1\right) \ge \delta_1 \quad \text{i} \quad \frac{\sigma''_{n_k^*}}{n_k^*+1}\left(n_k^{**} - \overline{n}_k + 1\right) \ge \delta_1 \quad \forall k > k_0. \tag{9}$$

Припустимо, що $\exists k_s \uparrow \infty: \ \forall i \in \overline{\overline{m}_k, m_k^{**}} \ \ \exists \alpha_i \in \overline{0, \alpha}$:

$$\frac{\sigma''_{n_k^*}}{n_k^*+1}\sum_{j \in \overline{n_k, n_k^*}: W_{i-\alpha_i h_k, j} \notin \varepsilon U} 1 \ge \frac{\delta_1}{\alpha+1} \qquad \forall k = k_s.$$

Внаслідок того, що $i \in \overline{\overline{m}_k, m_k^{**}}$, а отже, $\overline{m}_k \le i \le \overline{m}_k + h_k - 1$, всі індекси $i - \alpha_i h_k$ попарно різні. Тоді, враховуючи (9), маємо

$$\frac{\sigma'_{m_k^*}\sigma''_{n_k^*}}{(m_k^*+1)(n_k^*+1)}\sum_{(i,j) \le (m_k^*, n_k^*): W_{i,j} \notin \varepsilon U} 1 \ge$$

$$\ge \frac{\sigma'_{m_k^*}\sigma''_{n_k^*}}{(m_k^*+1)(n_k^*+1)}\sum_{i=\overline{m}_k}^{m_k^{**}}\ \sum_{j \in \overline{n_k, n_k^*}: W_{i-\alpha_i h_k, j} \notin \varepsilon U} 1 =$$

$$= \frac{\sigma'_{m_k^*}}{m_k^*+1} \sum_{i=\overline{m}_k}^{m_k^{**}} \frac{\sigma''_{n_k^*}}{n_k^*+1} \sum_{j\in\overline{n_k,\, n_k^*}:\, W_{i-\alpha_i h_k,\, j} \notin \varepsilon U} 1 \ge$$

$$\ge \frac{\delta_1}{\alpha+1} \frac{\sigma'_{m_k^*}}{m_k^*+1} (m_k^{**} - \overline{m}_k + 1) \ge \frac{\delta_1^2}{\alpha+1} \quad \forall\, k = k_s > k_{s_1},$$

тобто одержали суперечність з умовою (8).

Отже, $\exists\, k_* \ge k_0 :\ \forall\, k > k_* \ \ \exists\, m'_k \in \overline{\overline{m}_k, m_k^{**}} :\ \forall\, m \in \overline{0,\alpha}$

$$\frac{\sigma''_{n_k^*}}{n_k^*+1} \sum_{j\in\overline{n_k,\, n_k^*}:\, W_{i-\alpha_i h_k,\, j} \notin \varepsilon U} 1 < \frac{\delta_1}{\alpha+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma''_{n_k^*}}{n_k^*+1} \sum_{(m,j)\in\overline{0,\alpha}\times\overline{n_k,\, n_k^*}:\, W_{m'_k - m h_k,\, j} \notin \varepsilon U} 1 < \delta_1 \quad \forall\, k > k_*. \tag{10}$$

Припустимо тепер, що $\exists\, k_s \uparrow \infty :\ \ \forall\, j \in \overline{\overline{n}_k, n_k^{**}} \ \ \exists\, \alpha_j \in \overline{0,\alpha}, \ \ \exists\, \beta_j \in \overline{0,\beta} :$ $W_{m'_k - \alpha_j h_k,\, j - \beta_j t_k} \notin \varepsilon U$. Внаслідок того, що $\overline{n}_k \le j \le \overline{n}_k + t_k - 1$, всі індекси $j - \beta_j t_k$ попарно різні. Тому, враховуючи (9), отримуємо

$$\frac{\sigma''_{n_k^*}}{n_k^*+1} \sum_{(m,j)\in\overline{0,\alpha}\times\overline{n_k,\, n_k^*}:\, W_{m'_k - m h_k,\, j} \notin \varepsilon U} 1 \ge$$

$$\ge \frac{\sigma''_{n_k^*}}{n_k^*+1} \sum_{j=\overline{n}_k}^{n_k^{**}} 1 = \frac{\sigma''_{n_k^*}}{n_k^*+1} (n_k^{**} - \overline{n}_k + 1) \ge \delta_1 \quad \forall\, k = k_s > k_{s_2},$$

що суперечить нерівності (10). Отже, $\exists\, k^* \ge k_*$:

$$\forall\, k > k^* \ \ \exists\, n'_k \in \overline{\overline{n}_k, n_k^{**}} \subset \overline{\overline{n}_k, n_k^*} :\ W_{m'_k - m h_k,\, n'_k - n t_k} \in \varepsilon U \quad \forall\, (m,n) \in \overline{0,\alpha} \times \overline{0,\beta}.$$

Лему 7 доведено.

10. Доведення теореми 1. Нехай $z = \infty$ є $(\mu^{(\alpha_1,\beta_1)}, \sigma)$-точкою послідовності $(S_{m,n})$, отже, виконується означення $(\mu^{(\alpha_1,\beta_1)}, \sigma)$-точки, наведене в п. 1.

Припустимо від супротивного, що $\lambda_{m,n} W_{m,n}^{(p)} = O(1)$ (σ-st). За лемами 2 і 3 існує метод $(W, g_{m,n}) \in W_Q^2$ $(g_{m,n} = g'_m g''_n)$ з твірними функціями $\dot g(x)$ і $\ddot g(y)$ вигляду (7), причому існують многочлени $\dot D_\xi(x) = d'_0 + d'_1 x + \ldots + d'_\xi x^\xi$ і $\ddot D_\eta(y) = d''_0 + d''_1 y + \ldots + d''_\eta y^\eta$ такі, що $\dot g(x) = \dot p(x) \dot D_\xi(x)$, $\ddot g(y) = \ddot g(y) \ddot D_\eta(y)$. Довизначимо послідовності (d'_m) і (d''_n) рівностями: $d'_m = 0$ при $m > \xi$, $d''_n = 0$ при $n > \eta$. Використовуючи згортки і композицію, можна записати

$$W^{(g)} = \frac{1}{G' \circ G''}\big((g' \circ g'') * S\big) = \frac{1}{G' \circ G''}\big(((p' * d') \circ (p'' * d'')) * S\big) =$$

$$= \frac{1}{G' \circ G''}\big((d' \circ d'') * (p' \circ p'') * S\big) = \frac{1}{G' \circ G''}\big((d' \circ d'') * (P' \circ P'')\, W^{(p)}\big) \Rightarrow$$

$$\lambda_{m,n} W_{m,n}^{(g)} = \lambda'_m \lambda''_n \frac{P'_m P''_n}{G'_m G''_n} \frac{1}{P'_m P''_n} \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} d'_{m-i} d''_{n-j} P'_i P''_j W_{i,j}^{(p)} =$$

$$= \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} a'_{m,m-i} a''_{n,n-j} \lambda_{i,j} W_{i,j}^{(p)},$$

де $a'_{m,m-i} = \frac{P'_m}{G'_m} \frac{P'_i}{P'_m} \frac{\lambda'_m}{\lambda'_i} d'_{m-i} \;\; \forall\, m \in \mathbb{N}_0,\; i \in \overline{0,m}$; $\quad a''_{n,n-j} = \frac{P''_n}{G''_n} \frac{P''_j}{P''_n} \frac{\lambda''_n}{\lambda''_j} d''_{n-i} \;\; \forall\, n \in$ $\in \mathbb{N}_0,\; j \in \overline{0,n}$.

Зауважимо, що $a'_{m,m-i} = 0$ при $m > \xi$ та $i < m - \xi$, $a''_{n,n-j} = 0$ при $n > \eta$ та $j < n - \eta$. При цьому, як доведено у роботі [5] (леми 3, 4), $P'_m \asymp G'_m$ і $P''_n \asymp G''_n$. До того ж $P'_i \le P'_m$ при $i \le m$, $P''_j \le P''_n$ при $j \le n$, а за умовою (2) існує $c > 0$ таке, що $\lambda'_m / \lambda'_i \le c$ і $\lambda''_n / \lambda''_j \le c$, коли $\max\{m-\xi, 0\} \le i \le m$, $\max\{n-\eta, 0\}$ $\le j \le n$. Тому $\exists\, H > 0: \left|a'_{m,m-i}\right| \le H \;\forall\, m \in \mathbb{N}_0,\, i \le m$; $\left|a''_{n,n-j}\right| \le H \;\forall\, n \in \mathbb{N}_0,\, j \le n$. Отже, виконано умови леми 6, з якої випливає, що $\lambda_{m,n} W_{m,n}^{(g)} = O(1)$ (σ-st).

Нехай U — окіл нуля з означення $(\mu^{(\alpha_1,\beta_1)}, \sigma)$-точки. Для нього існує $\varepsilon >$ > 0 таке, що

$$\lim_{m,n \to \infty} \frac{\sigma'_m \sigma''_n}{(m+1)(n+1)} \sum_{(i,j) \le (m,n):\, \lambda_{i,j} W_{i,j}^{(g)} \notin \varepsilon U} 1 = 0.$$

Неважко довести існування послідовностей $(\overline{m}_k)$ і $(\overline{n}_k)$ таких, що $m_k <$ $< \overline{m}_k < m_k^*$, $n_k < \overline{n}_k < n_k^*$, $\sigma'_{\overline{m}_k}(1 - m_k/\overline{m}_k) \ge \delta_1$, $\sigma'_{m_k^*}(1 - \overline{m}_k/m_k^*) \ge \delta_1$, $\sigma''_{\overline{n}_k}(1 - n_k/\overline{n}_k) \ge \delta_1$, $\sigma''_{n_k^*}(1 - \overline{n}_k/n_k^*) \ge \delta_1$ $\forall\, k > k_*$, де число $\delta_1 > 0$ не залежить від ε. Оскільки, очевидно, $\overline{m}_k - m_k \to \infty$ і $\overline{n}_k - n_k \to \infty$, будемо вважати, що $\overline{m}_k - m_k > r$ і $\overline{n}_k - n_k > t$, $h_k := [(\overline{m}_k - m_k - r)/\alpha_1] > 0$ (у випадку $\alpha_1 \ne 0$), $t_k :=$ $:= [(\overline{n}_k - n_k - t)/\beta_1] > 0$ (у випадку $\beta_1 \ne 0$) $\forall\, k > k_*$. Якщо $\alpha_1 = 0$, покладемо $h_k \equiv 1$, а при $\beta_1 = 0$ покладемо $t_k \equiv 1$.

Отже, за лемою 7 існують (m'_k) і (n'_k) такі, що $\overline{m}_k \le m'_k \le m_k^*$, $\overline{n}_k \le n'_k \le$ $\le n_k^*$ $\forall\, k > k_*$, причому $\lambda_{m'_k - mh_k,\, n'_k - nt_k} W_{m'_k - mh_k,\, n'_k - nt_k}^{(g)} \in \varepsilon U \;\; \forall\, (m,n) \in \overline{0,\alpha_1} \times$ $\times\, \overline{0,\beta_1}$ $\forall\, k > k_*$. Для спрощення подальших міркувань перепозначимо $m_k^* :=$ $:= m'_k$, $n_k^* := n'_k$. Після цього послідовності (m_k^*) і (n_k^*), визначені в означенні $(\mu^{(\alpha_1,\beta_1)}, \sigma)$-точки, збережуть усі свої попередні властивості (тільки $\delta > 0$ потрібно замінити на $\delta_1 > 0$) та набудуть ще одну:

$$\lambda_{m_k^* - mh_k,\, n_k^* - nt_k} W_{m_k^* - mh_k,\, n_k^* - nt_k}^{(g)} \in \varepsilon U \quad \forall\, (m,n) \in \overline{0,\alpha_1} \times \overline{0,\beta_1} \quad \forall\, k > k_*. \tag{11}$$

Оскільки числа h_k і t_k тепер, можливо, менші, ніж у лемі 5, застосуємо лему 5 разом із зауваженням до неї, а також лему 4, і одержимо тотожність

$$\frac{\displaystyle\sum_{m=0}^{m_k^* - m_k} \sum_{n=0}^{n_k^* - n_k} a'_{k,\, m_k^* - m_k - m}\, a''_{k,\, n_k^* - n_k - n}\, \mu_{m_k, n_k}^{(\alpha_1,\beta_1)} S_{m_k + m,\, n_k + n}}{h_k^{\alpha_1} t_k^{\beta_1} \dot{B}_r(1) \ddot{B}_t(1)} \equiv$$

$$\equiv \sum_{m=0}^{\alpha_1} \sum_{n=0}^{\beta_1} (-1)^{m+n} \binom{\alpha_1}{m} \binom{\beta_1}{n} G'_{m_k^*-mh_k} G''_{n_k^*-nt_k} \frac{\lambda'_{m_k}}{\lambda'_{m_k^*-mh_k}} \frac{\lambda''_{n_k}}{\lambda''_{n_k^*-nt_k}} \lambda_{m_k^*-mh_k, n_k^*-nt_k} \times$$

$$\times \frac{W^{(g)}_{m_k^*-mh_k, n_k^*-nt_k}}{\sigma'^{\alpha_1}_{m_k} \sigma''^{\beta_1}_{n_k} h_k^{\alpha_1} t_k^{\beta_1} \dot{B}_r(1) \ddot{B}_t(1)}, \tag{12}$$

де $\dot{B}_r(x)$ і $\ddot{B}_t(y)$ — многочлени, які фігурують у зображенні (7) для твірних функцій методу $(W, g_{m.n})$; $a'_{k,i} \geq 0$, $a''_{k,j} \geq 0 \;\; \forall\, i, j, k \in \mathbb{N}_0$, $\sum_{i=0}^{m_k^*-m_k} a'_{k,i} = h_k^{\alpha_1} \dot{B}_r(1) > 0$, $\sum_{j=0}^{n_k^*-n_k} a''_{k,j} = t_k^{\beta_1} \ddot{B}_t(1) > 0 \;\; \forall\, k \in \mathbb{N}_0$.

Легко помітити, що

$$m_k \leq m_k^* - mh_k \leq m_k^*, \quad n_k \leq n_k^* - nt_k \leq n_k^* \quad \forall\, (m, n) \in \overline{0, \alpha_1} \times \overline{0, \beta_1} \quad \forall\, k > k_*,$$

а оскільки $m_k^*/m_k \leq 2$ і $n_k^*/n_k \leq 2 \;\; \forall\, k \in \mathbb{N}_0$, то

$$\frac{1}{2} \leq \frac{m_k}{m_k^*} \leq \frac{m_k^* - mh_k}{\overline{m}_k} \leq \frac{m_k^*}{m_k} \leq 2 \quad \text{і} \quad \frac{1}{2} \leq \frac{n_k}{n_k^*} \leq \frac{n_k^* - nt_k}{\overline{n}_k} \leq \frac{n_k^*}{n_k} \leq 2 \quad \forall\, k > k_*.$$

Неважко показати (див. п. 11 роботи [5]), що $G'_n \asymp n^{\alpha_1}$, $G''_n \asymp n^{\beta_1}$, тому

$$G'_{m_k^*-mh_k} \asymp (m_k^* - mh_k)^{\alpha_1} = \left(\frac{m_k^* - mh_k}{\overline{m}_k}\right)^{\alpha_1} \overline{m}_k^{\alpha_1} \asymp \overline{m}_k^{\alpha_1},$$

$$G''_{n_k^*-nt_k} \asymp (n_k^* - nt_k)^{\beta_1} = \left(\frac{n_k^* - nt_k}{\overline{n}_k}\right)^{\beta_1} \overline{n}_k^{\beta_1} \asymp \overline{n}_k^{\beta_1}.$$

Крім того, внаслідок умови (2) $\lambda'_{m_k^*-mh_k} \asymp \lambda'_{m_k}$ і $\lambda''_{n_k^*-nt_k} \asymp \lambda''_{n_k}$.

Якщо позначити праву частину тотожності (12) через Γ_k, то з умови (11) за властивостями абсолютно опуклих множин отримаємо

$$\Gamma_k \in \left(\frac{\sum_{m=0}^{\alpha_1} \binom{\alpha_1}{m} G'_{m_k^*-mh_k} \frac{\lambda'_{m_k}}{\lambda'_{m_k^*-mh_k}}}{\sigma'^{\alpha_1}_{m_k} h_k^{\alpha_1} \dot{B}_r(1)} \cdot \frac{\sum_{n=0}^{\beta_1} \binom{\beta_1}{n} G''_{n_k^*-nt_k} \frac{\lambda''_{t_k}}{\lambda''_{n_k^*-nt_k}}}{\sigma''^{\beta_1}_{n_k} t_k^{\beta_1} \ddot{B}_t(1)} \right) \varepsilon U \subset$$

$$\subset \frac{H_1 \overline{m}_k^{\alpha_1} \overline{n}_k^{\beta_1}}{\sigma'^{\alpha_1}_{m_k} h_k^{\alpha_1} \sigma''^{\beta_1}_{n_k} t_k^{\beta_1}} \varepsilon U \quad \forall\, k > k_*.$$

Для $\alpha_1 \neq 0$

$$\sigma'^{\alpha_1}_{m_k} h_k^{\alpha_1} / \overline{m}_k^{\alpha_1} > \sigma'^{\alpha_1}_{m_k} / \overline{m}_k^{\alpha_1} \left(\frac{\overline{m}_k - m_k - r}{\alpha_1} - 1 \right)^{\alpha_1} =$$

$$= \left(\sigma'_{m_k} (1 - m_k / \overline{m}_k) / \alpha_1 - \sigma'_{m_k} / \overline{m}_k (r/\alpha_1 + 1) \right)^{\alpha_1} \geq \delta_2 > 0 \quad \forall\, k > k_*.$$

Аналогічно, якщо $\beta_1 \neq 0$, то $\sigma''^{\beta_1}_{n_k} t_k^{\beta_1} / \overline{n}_k^{\beta_1} \geq \delta_2 > 0 \;\; \forall\, k > k_*$. Тому існує H_2 таке, що

$$\frac{H_1 \overline{m}_k^{\alpha_1} \overline{n}_k^{\beta_1}}{\sigma'^{\alpha_1}_{m_k} h_k^{\alpha_1} \sigma''^{\beta_1}_{n_k} t_k^{\beta_1}} \le H_2 \quad \forall\, k > k^* \ge k_*.$$

Отже, $\Gamma_k \in H_2 \varepsilon U \ \forall\, k > k_*$. За означенням $(\mu^{(\alpha_1,\beta_1)}, \sigma)$-точки $\exists\, k_0 \ge k^*$: $\varphi_k(H_2 \varepsilon U) < a_k$, зокрема, $\varphi_k(\Gamma_k) < a_k$, в той час як $\varphi_k\left(\mu^{(\alpha_1,\beta_1)}_{m_k,n_k} S_{m,n}\right) \ge a_k \ \forall\, (m, n) \in \overline{m_k, m_k^*} \times \overline{n_k, n_k^*} \ \forall\, k > k_0$. Але з останньої нерівності, якщо застосувати функціонал φ_k, $k > k_0$, до лівої частини тотожності (12), випливає $\varphi_k(\Gamma_k) \ge a_k$ $\forall\, k > k_0$. Одержали суперечність, з якої випливає твердження теореми 1 в частині обмеженості.

Доведення теореми 1 для умови „o" аналогічне попередньому.

11. Доведення теореми 2. Припустимо, що послідовність $\left(\mu^{(\alpha_1,\beta_1)}_{m,n} S_{m,n}\right)$ необмежена. Тоді вона і слабко необмежена [1], тобто $\exists f \in L^*$: $f\left(\mu^{(\alpha_1,\beta_1)}_{m,n} S_{m,n}\right) \ne$ $\ne O(1)$. При виконанні умови (4), згідно з лемою 1 роботи [7], послідовність $\left(f(\mu^{(\alpha_1,\beta_1)}_{m,n} S_{m,n})\right)$ буде мати $(\mu^{(\alpha_1,\beta_1)}, \sigma)$-точку $z = \infty$. Легко показати, що тоді і послідовність $\left(\mu^{(\alpha_1,\beta_1)}_{m,n} S_{m,n}\right)$ буде мати $(\mu^{(\alpha_1,\beta_1)}, \sigma)$-точку $z = \infty$. Згідно з теоремою 1 послідовність $(\lambda_{m,n} W^{(p)}_{m,n})$ не може бути σ-статистично обмеженою, що суперечить умові теореми 2. Отже, теорему 2 доведено.

1. *Робертсон А., Робертсон В.* Топологические векторные пространства. – М.: Мир, 1967. – 258 с.
2. *Михалин Г. А.* Тауберовы теоремы с остатком для методов суммирования типа методов Гельдера и Чезаро // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 7. – С. 918 – 923.
3. *Давыдов Н. А.* Об одном свойстве методов Чезаро суммирования рядов // Мат. сб. – 1956. – **38**, вып. 4. – С. 509 – 524.
4. *Fast H.* Sur la convergence statistique // Colloq. math. – 1951. – **2**. – P. 241 – 244.
5. *Білоцький М. М., Деканов С. Я., Михалін Г. О.* Тауберові теореми із залишком для методів підсумовування Вороного з раціональною твірною функцією // Фрактальний аналіз та суміжні питання. – 1998. – **2**. – С. 178 – 189.
6. *Калиталова М. А.* (C)-свойство методов Чезаро суммирования двойных рядов // Укр. мат. журн. – 1971. – **23**, № 3. – С. 391 – 399.
7. *Алданов В. М., Михалін Г. О.* Тауберові теореми із залишком для (H, p, α, β)- і $(C, p\alpha, \beta)$-методів підсумовування функцій двох змінних // Там же. – 1999. – **51**, № 8. – С. 1036 – 1044.

Одержано 09.07.2002