УДК 517.9

Ю. И. Каплун, В. Г. Самойленко (Киев. нац. ун-т им. Т. Шевченко)

О ПРОДОЛЖИМОСТИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА СИНГУЛЯРНОЕ МНОЖЕСТВО

We consider a problem of the extendability of solutions of differential equations to a singular set containing points at which the right-hand side of the considered equation is undefined.

Розглядається питання про продовжуваність розв'язків диференціальних рівнянь на сингулярну множину, що складається з точок, в яких права частина розглядуваного рівняння невизначена.

В ряде работ рассматривался вопрос о поведении решений в окрестности тех точек, где правая часть рассматриваемых уравнений неопределена. В частности, подобные вопросы изучались в [1, с. 17] для дифференциальных уравнений первого порядка в случае, когда правая часть рассматриваемых уравнений зависит от одного переменного и неограничена.

Более общая задача о продолжимости решений системы обыкновенных автономных дифференциальных уравнений второго порядка рассматривалась в [2, 3], где применялось понятие продолжимости решения через первый интеграл.

В [4] также рассматривалась задача о продолжимости решений дифференциальных уравнений специального вида на множество, где правая часть рассматриваемого уравнения не определена.

В данной работе рассматривается вопрос о продолжимости решений уравнения

$$a(t,x)\frac{dx}{dt} = 1 \tag{1}$$

в окрестности точек из так называемого сингулярного множества S и о продолжимости решений уравнения (1) **на (через)** сингулярное множество.

Определение 1 [2]. *Множество точек* $S = \{(t,x) \in \mathbf{R}^2 : a(t,x) = 0\}$ *называется сингулярным множеством для уравнения* (1).

В дальнейшем предполагается, что функция $a(t,x) \in C^1(\mathbf{R}^2)$ и мера Лебега в $\mathbf{R}^2$ сингулярного множества S равна нулю.

Определение 2. *Решение* $x(t)$ *уравнения* (1), *определенное на интервале* (α, t_*), *продолжаемо вправо в точку сингулярного множества* (t_*, x_*), *если* $\lim\limits_{t \to t_* - 0} x(t) = x_*$.

Аналогично формулируется определение для решения уравнения (1), продолжаемого влево в точку сингулярного множества.

Определение 3. *Решение* $x_1(t)$ *уравнения* (1), *определенное на интервале* (α, t_*), *продолжаемо вправо через точку сингулярного множества* (t_*, x_*), *если это решение продолжаемо вправо в точку* (t_*, x_*) *и существует решение* $x_2(t)$ *уравнения* (1), *определенное на интервале* (t_*, β), *продолжаемое влево в точку* (t_*, x_*).

В этом случае решение $x = x_1(t)$, $t \in (\alpha, t_*)$, $x = x_2(t)$, $t \in (t_*, \beta)$, после определения его по непрерывности в точке t_* можно считать определенным на (α, β), хотя точка (t_*, x_*), где $x_* = \lim\limits_{t \to t_* - 0} x_1(t) = \lim\limits_{t \to t_* + 0} x_2(t)$, принадлежит сингулярному множеству.

В этом случае можно говорить, что траектория решения $\{(t, x(t)) : t \in \in (\alpha, \beta)\}$ проходит через точку сингулярного множества.

Аналогично можно сформулировать определение для решения $x_1(t)$ уравнения (1), продолжаемого влево через точку сингулярного множества.

При рассмотрении вопроса о продолжимости решения уравнения (1) на сингулярное множество, когда $a(t, x) = b(t)$, соответствующие условия можно легко получить, используя результаты И. Г. Петровского [1, с. 17]. Предполагая, что сингулярное множество представимо в виде $S = \bigcup_{k \in M}\{(t, x) \in \mathbf{R}^2 : t = t_k, b(t_k) = 0\}$, где M — подмножество множества натуральных чисел $\mathbf{N}$, и существует такое число $\delta > 0$, что для любых $k, k+1 \in M$ выполняется неравенство $t_{k+1} - t_k > \delta$, можно доказать утверждения, дающие необходимые и достаточные условия продолжимости решения **на (через)** сингулярное множество.

Лемма 1. *Решение уравнения* (1), *определенное на интервале* (t_k, t_{k+1}), *может быть продолжено на множество* $\Gamma_{k+1} = \{(t, x) \in \mathbf{R}^2 : t = t_{k+1}\}$ *тогда и только тогда, когда*

$$\left|\int_{t_0}^{t_{k+1}} \frac{1}{b(\xi)} d\xi\right| < \infty, \quad \text{где} \quad t_k < t_0 < t_{k+1}.$$

Лемма 2. *Решение уравнения* (1), *определенное на интервале* (t_k, t_{k+1}), *может быть продолжено через множество* Γ_{k+1} *тогда и только тогда, когда*

$$\left|\int_{t_{0_1}}^{t_{k+1}} \frac{1}{b(\xi)} d\xi\right| + \left|\int_{t_{k+1}}^{t_{0_2}} \frac{1}{b(\xi)} d\xi\right| < \infty,$$

где точки t_{0_1}, t_{0_2} *такие, что* $t_{k+1} - \delta < t_{0_1} < t_{k+1} < t_{0_2} < t_{k+1} + \delta$.

Аналогично, для случая $a(t, x) = g(x) \in C^1(\mathbf{R}^1)$, когда уравнение (1) имеет вид

$$g(x)\frac{dx}{dt} = 1, \tag{2}$$

сингулярное множество уравнения (2) $S = \bigcup_{k \in M}\{(t, x) \in \mathbf{R}^2 : x = x_k, g(x_k) = 0\}$, где точки x_k упорядочены по индексу, т. е. $x_k < x_{k+1}$ для всех $k, k+1 \in M$ (M — некоторое подмножество множества целых чисел Z), существует $\delta > 0$ такое, что для всех $k, k+1 \in M$ выполняется неравенство $x_{k+1} - x_k > \delta$, справедливо утверждение.

Лемма 3. *Если* $x = x(t)$ — *решение дифференциального уравнения* (2), *определенное на интервале* (t_k, t_{k+1}), $k, k+1 \in M$, *то при его продолжении вправо (влево) выполняется одно из двух условий*:

1^0) *решение* $x(t)$ *имеет вертикальную асимптоту* $t = t_{k+1}$ (*соответственно,* $t = t_k$), $k, k+1 \in M$;

2^0) *решение* $x(t)$ *может быть продолжено в некоторую точку сингулярного множества с абсциссой* t_{k+1} (*соответственно,* $t = t_k$), $k, k+1 \in M$.

Используя данную лемму, несложно установить следующие результаты.

Теорема 1. *Для любой точки* $(t_*, x_*) \in S$ *существует решение* $x = x(t)$ *уравнения* (2) *такое, что* $\lim_{t \to t_*} x(t) = x_*$.

Теорема 2. *Пусть* $g(x)$ — *непрерывно дифференцируемая на* $\mathbf{R}^1$ *функция, уравнение* (2) *имеет решение* $x(t)$, *определенное на интервале* (α, β), *причем* $(\beta, x(\beta - 0)) \in S$. *Тогда*:

1^0) *если существует* $\delta_0 > 0$ *такое, что для всех* $\delta \in (0, \delta_0)$ *функция* $g(x)$ *удовлетворяет условию*

$$g(x(\beta - 0) + \delta)\, g(x(\beta - 0) - \delta) > 0, \tag{3}$$

то данное решение может быть продолжено вправо через точку $(\beta, x(\beta - 0))$ *сингулярного множества* S;

2^0) *если существует* $\delta_0 > 0$ *такое, что для всех* $\delta \in (0, \delta_0)$ *функция* $g(x)$ *удовлетворяет условию*

$$g(x(\beta - 0) + \delta)\, g(x(\beta - 0) - \delta) < 0, \tag{4}$$

то данное решение может быть продолжено только в точку $(\beta, x(\beta - 0))$ *сингулярного множества* S, *т. е. не может быть продолжено через сингулярное множество*.

Следует отметить, что из леммы 3 и теорем 1, 2 можно получить утверждения работы [4] о существовании непрерывных и сингулярных решений.

Рассмотрим теперь случай, когда функция $a(t, x)$ зависит и от переменной t, и от переменной x. Пусть функция $a(t, x)$ определена для всех $(t, x) \in \mathbf{R}^2$, непрерывно дифференцируема на $\mathbf{R}^2$, а уравнение $a(t, x) = 0$ определяет некоторую замкнутую жорданову кривую, т. е. кривую, которая делит плоскость $\mathbf{R}^2$ на два открытых непересекающихся множества. Обозначим через $\operatorname{Int} S$ область, ограниченную кривой S, а через $\operatorname{Ext} S = \mathbf{R}^2 \setminus \overline{\operatorname{Int} S}$ внешность области S.

В силу теорем о существовании, единственности и продолжаемости решения для дифференциальных уравнений [5, с. 24] для произвольной точки $(t_0, x_0) \in \operatorname{Int} S$ существует решение уравнения (1) такое, что выполняется начальное условие $x(t_0) = x_0$, причем это решение можно считать заданным на максимальном интервале (ω_-, ω_+), где $(\omega_-, x_-), (\omega_+, x_+) \in S$,

$$x_- = \lim_{t \to \omega_- + 0} x(t), \qquad x_+ = \lim_{t \to \omega_+ - 0} x(t).$$

Другими словами, любая интегральная кривая уравнения (1) с начальными условиями из области $\operatorname{Int} S$ достигает ее границу $\partial \operatorname{Int} S = S$, т. е. сингулярное множество S.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{dt}{dx} = a(t, x), \tag{5}$$

определенное для всех точек плоскости $\mathbf{R}^2$, в том числе и для точек сингулярного множества S, и эквивалентное уравнению (1) в окрестностях тех точек, которые не принадлежат сингулярному множеству. В силу теоремы о продолжаемости решения [5, с. 24] через каждую точку $(t_0, x_0) \in \mathbf{R}^2$ проходит некоторая интегральная кривая уравнения (5). В частности, это свойство справедливо и для всех точек сингулярного множества S.

Пусть $t = t(x)$ — решение уравнения (5) с начальным значением $t_0 = t(x_0)$, где $(t_0, x_0) \in \operatorname{Int} S$. Поскольку $a(t_0, x_0) \neq 0$, это решение может быть продолжено на некоторый интервал (ω_-, ω_+), на котором оно является монотонным (его производная отлична от нуля и не меняет знак), причем точка $(t(x), x)$

стремится к границе области $\partial \operatorname{Int} S = S$ при $x \to \omega_-$ и $x \to \omega_+$. Более того, на указанном интервале функция $t(x)$ определяет некоторый диффеоморфизм и, следовательно, функция $t(x)$ обратима на множестве (ω_-, ω_+), т. е. каждое решение уравнения (1) с начальным значением из $\operatorname{Int} S$ может быть продолжено на сингулярное множество S.

Рассмотрим функцию $\tau = \tau(x)$, являющуюся решением уравнения (5) с начальным значением в точке $(\tau(\omega_+ - 0), \omega_+) \in S$. Заметим, что $\lim\limits_{x \to \omega_+ - 0} \tau(x)$ существует и конечен. Решение $\tau = \tau(x)$ определено на некотором (максимальном) интервале (ω_+, α_+), на котором оно является монотонным (его производная отлична от нуля и не меняет знак). При $x \to \alpha_+$ точка $(x, \tau(x))$ стремится к некоторой точке множества $S \cup \partial \mathbf{R}^2$.

В случае, когда функция $a(t, x)$ имеет одинаковые знаки в областях $\operatorname{Int} S$ и $\operatorname{Ext} S$, функция $\tau = \tau(x)$ на интервале (ω_-, α_+) определяет некоторое биективное отображение и, следовательно, обратима на (ω_-, α_+). Другими словами, решение $x(t)$ уравнения (1) с начальным значением $(t_0, x_0) \in \operatorname{Int} S$ продолжаемо через сингулярное множество S. Если же функция $a(t, x)$ имеет разные знаки в $\operatorname{Int} S$ и $\operatorname{Ext} S$, то функция $\tau(x)$ определяет на интервале (ω_+, α_+) некоторый диффеоморфизм и, следовательно, обратима на множестве (ω_+, α_+). При этом точка ω_+ является точкой экстремума для решения $\tau = \tau(x)$ уравнения (5), определенного на интервале (ω_-, α_+).

Очевидно, что не существует интервала, содержащего точку ω_+, на котором функция $\tau = \tau(x)$ является монотонной. Поэтому на некотором интервале $(\beta - \varepsilon, \beta)$ определены две функции $x_1(t)$, $x_2(t)$, обратные к $\tau(x)$ на соответствующих интервалах и удовлетворяющие уравнению (1), причем такие, что

$$\lim_{t \to \beta - 0} x_1(t) = \lim_{t \to \beta - 0} x_2(t) = \omega_+.$$

Следовательно, решение $t = t(x)$ уравнения (5) с начальными значениями $t_0 = t(x_0)$, где $(t_0, x_0) \in \operatorname{Int} S$, продолжимо на сингулярное множество S.

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть сингулярное множество S не содержит связных подмножеств вида $\{(t, x)\colon t = \bar{t}, x \in [a, b]\}$, где a, b, $\bar{t}$ — некоторые действительные числа и $a < b$.*

Тогда каждое решение уравнения (1) *с начальными значениями из области* $\operatorname{Int} S$, *определенное на максимальном интервале его существования, достигает сингулярное множество S.*

Кроме того, решение уравнения (1) *с начальными значениями из области* $\operatorname{Int} S$ *продолжимо* ***через*** *сингулярное множество S тогда и только тогда, когда функция $a(t, x)$ имеет одинаковые знаки в областях* $\operatorname{Int} S$ *и* $\operatorname{Ext} S$.

Рассмотрим теперь задачу об обращении функции, являющейся решением уравнения (5), т. е. найдем решения $x = x(t)$ уравнения

$$\Phi(t, x) = t - t(x) = 0, \qquad t(x_0) = t_0. \tag{6}$$

Сингулярное множество S уравнения (1) содержит множество критических [6, 7] точек задачи (6) вида

$$\mathcal{K}(t_0, x_0) = \left\{(t, x) \in \mathbf{R}^2 \colon \frac{d\Phi}{dx} = 0, t = t(x), t_0 = t(x_0)\right\}. \tag{7}$$

Более того, справедлива следующая лемма.

Лемма 4. *Имеет место свойство*

$$\bigcup_{(t_0, x_0) \in \operatorname{Int} S} \mathcal{K}(t_0, x_0) = S.$$

Теорема 4. *Пусть сингулярное множество S не содержит связных подмножеств вида $\{(t, x) : t = \tilde{t}, x \in [a, b]\}$, где a, b, $\tilde{t}$ — некоторые действительные числа и $a < b$.*

Тогда для каждой точки (t_*, x_*) сингулярного множества S существует два решения $x_k = x_k(t)$, $t \in (\alpha_k, \beta_k)$, $k = 1, 2$, уравнения (1), для которых данная точка является предельной при стремлении независимого переменного t к соответствующим концам интервалов определения данных решений, т. е.

$$\lim_{t \to t_*} x_k(t) = x_*, \quad \text{где} \quad t \in (\alpha_k, \beta_k), \quad k = 1, 2. \tag{8}$$

Замечание. Точка t_* принадлежит замыканию интервалов (α_k, β_k), $k = 1, 2$.

Доказательство. Покажем сначала, что при выполнении условий теоремы 4 ни одно из решений $x = x(t)$, $t \in (\alpha, \beta)$, дифференциального уравнения (1) не может совпадать с сингулярным множеством S более чем в счетном количестве точек.

Действительно, пусть $t = t(x)$, $x \in (\alpha, \beta)$, — некоторое решение уравнения (5) с начальным условием $t(x_*) = t_*$, $(t_*, x_*) \in S$, такое, что $a(t(x), x) = 0$ для всех $x \in (\alpha, \beta)$. Тогда для всех $x \in (\alpha, \beta)$ справедливо равенство $dt/dx = 0$, т. е. функция $t(x)$ на интервале (α, β) тождественно равна некоторой действительной постоянной c_*. В этом случае сингулярное множество S содержит подмножество вида $\{(t, x) : t = c_*, x \in (\alpha, \beta)\}$, что противоречит предположениям теоремы 4.

Иными словами, для каждого решения $t = t(x)$ дифференциального уравнения (5) точки множества $S \cap \{(t(x), x) : x \in (\alpha, \beta)\}$ являются изолированными.

В [6] показано, что если (t_*, x_*) — произвольная точка сингулярного множества S, то соответствующее решение $t = t(x)$, $t(x_*) = x_*$, дифференциального уравнения (5), которое существует в силу изложенных выше рассуждений, может принимать в точке x_* экстремальное значение.

Предположим вначале, что точка x_* является точкой экстремума, т. е. существует окрестность $U_\delta(x_*) = (x_* - \delta, x_* + \delta)$ такая, что $t(x) \le t_*$ (либо $t(x) \ge t_*$) для всех $x \in U_\delta(x_*)$. Не ограничивая общности, можно считать, что $t(x) \le t_*$, т. е. точка x_* является точкой максимума. Очевидно, что (t_*, x_*) — критическая точка уравнения (6), которое неявным образом определяет функцию $x = x(t)$, а множество $\{(t(x), x) : x \in U_\delta(x_*) \setminus \{x_*\}\}$ не содержит критических точек уравнения (6). Поэтому на каждом из интервалов $U_\delta(x_* - 0) = (x_* - \delta, x_*)$, $U_\delta(x_* + 0) = (x_*, x_* + \delta)$ существуют дифференцируемые функции $x_-(t)$ и $x_+(t)$ соответственно, являющиеся решениями уравнения (6), а следовательно, и уравнения (5). При этом

$$\lim_{t \to t_*} x_-(t) = x_*, \qquad \lim_{t \to t_*} x_+(t) = x_*, \tag{9}$$

что эквивалентно соотношениям (8).

Рассмотрим теперь случай, когда точка x_* не является точкой экстремума функции $t(x)$. Тогда $t(x)$ определяет диффеоморфизм окрестности $U_\delta(x_*)$

на некоторый интервал (α, β), содержащий точку t_*. Следовательно, существует непрерывное обратное отображение $x: (\alpha, \beta) \to U_\delta(x_*)$, которое не является дифференцируемым в точке t_*.

Другими словами, через произвольно выбранную точку (t_*, x_*) сингулярного множества S проходят графики двух функций — функции $x_-(t)$, определенной на интервале $(\alpha, t_*]$, и функции $x_+(t)$, определенной на интервале $[t_*, \beta)$, каждая из которых является решением дифференциального уравнения (1) на соответствующих интервалах.

При этом, очевидно, справедливы соотношения (9), что доказывает справедливость теоремы 4.

Замечание. Если функция $x(t)$ — решение дифференциального уравнения (1), то она монотонна на интервале (α, β), если не существует значения $t_* \in (\alpha, \beta)$ такого, что $(t_*, x(t_*)) \in S$.

1. *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1973. – 219 с.
2. *Павлоцкий И. П., Стрианезе М., Тоскано Р.* Продолжение решения дифференциальных уравнений на сингулярное множество // Дифференц. уравнения. – 1998. – **34**, № 3. – С. 313–319.
3. *Павлоцкий И. П., Стрианезе М.* Об устойчивости сингулярного множества динамической системы // Там же. – 1999. – **35**, № 3. – С. 296–303.
4. *Михайлов Л. Г.* К теории сингулярных дифференциальных уравнений // Докл. РАН. – 2001. – **378**, № 3. – С. 320–323.
5. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1970. – 720 с.
6. *Kaplun Yu. I., Samoylenko V. Hr., Pavlotsky I. P., Strianese M.* Global implicit function theorem and its application in the theory of ordinary differential equations // Допов. НАН України. – 2001. – № 6. – С. 38–41.
7. *Самойленко В. Г., Каплун Ю. І.* Рівняння $g(t, x) = 0$: існування та продовжуваність його розв'язків // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 3. – С. 372–382.

Получено 15.06.2001