УДК 517.5

В. И. Рукасов (Славян. пед. ун-т)

ПРИБЛИЖЕНИЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ ОПЕРАТОРАМИ ВАЛЛЕ ПУССЕНА

For upper bounds of deviations of the Valleé Poussin functions from functions determined on the real line, we find asymptotic equalities that provide a solution of the well-known Kolmogorov–Nikol'skii problem.

Для верхніх меж відхилень операторів Валле Пуссена від функцій, заданих на дійсній осі, знайдено асимптотичні рівності, які забезпечують розв'язок відомої задачі Колмогорова – Нікольського.

Классы $\hat{C}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ введены в работе [1] и определяются следующим образом. Обозначим через $\mathfrak{M}$ множество непрерывных выпуклых вниз при всех $v \geq 1$ и исчезающих на бесконечности функций $\psi(v)$. Каждую функцию $\psi \in \mathfrak{M}$ продолжим на промежуток $[0; 1)$ так, чтобы полученная функция (которую, по-прежнему, будем обозначать через $\psi(\cdot)$) была непрерывна при всех $v \geq 0$, $\psi(0) = 0$ и ее производная $\psi'(v) = \psi'(v+0)$ имела ограниченную вариацию на промежутке $[0; \infty)$. Множество таких функций обозначим через $\mathfrak{A}$ и положим

$$\hat{\psi}(t) = \hat{\psi}_{\beta}(t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\psi(v)\cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right)dv, \tag{1}$$

где β — любое фиксированное действительное число.

Обозначим через $\hat{C}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ множество функций $f(x)$, представимых равенством

$$f(x) = A_0 + \int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(x+t)\hat{\psi}(t)\,dt, \tag{2}$$

в котором A_0 — некоторая постоянная, интеграл понимается как предел по симметричным расширяющимся промежуткам и $\varphi \in \mathfrak{N}$. Следуя [1], функцию $\varphi(\cdot)$ в представлении (2) называют $(\psi; \beta)$-производной функции $f(\cdot)$ и полагают $\varphi(\cdot) = f^{\psi}_{\beta}(\cdot)$.

Подмножество функций $\psi \in \mathfrak{A}$, для которых

$$\int\limits_1^{\infty}\frac{\psi(t)}{t}\,dt < \infty,$$

обозначим через F. Если $\psi \in F$, то для любого $\beta \in R^1$ преобразование $\hat{\psi}(t)$ суммируемо на действительной оси (см., например, [2])

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\hat{\psi}(t)|\,dt < \infty \tag{3}$$

и классы $\hat{C}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ состоят из функций $f(x)$, непрерывных для всех $x \in (-\infty; \infty)$.

Функции $f \in \hat{C}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ будем приближать операторами вида

$$V_{\sigma,c}(f;x) = A_0 + \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{\psi}_{\beta}(x+t)\left(\widehat{\psi\lambda}_{\sigma,c}\right)(t;\beta)\,dt, \tag{4}$$

где $\left(\widehat{\psi\lambda_{\sigma,c}}\right)(t;\beta)$ — преобразование вида (1) функции $\psi(v)\lambda_{\sigma,c}(v)$, в котором

$$\lambda_{\sigma,c}(v) = \begin{cases} 1, & 0 \le v \le c; \\ \dfrac{\sigma - v}{\sigma - c}, & c \le v \le \sigma; \\ 0, & v \ge \sigma. \end{cases} \tag{5}$$

Такие операторы рассматривались А. И. Степанцом в работах [1 – 4]. Из результатов этих работ, в частности, следует, что если $f \in C^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$, где $C^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ — подмножество периодических функций из класса $\hat{C}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ (см., например, [1]), а $\psi(v)$ — функция, непрерывная при всех $v \ge 0$, и ее преобразование $\hat{\psi}(t)$ суммируемо на R^1, то для любого $c < \sigma$

$$V_{\sigma,c}(f;x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k<\sigma} \lambda_{\sigma,c}(k)(a_k \cos kx + b_k \sin kx), \tag{6}$$

где a_0, a_k и b_k, $k = 1, 2, \ldots,$ — коэффициенты Фурье функции $f(\cdot)$.

Соотношение (6) означает, что в периодическом случае при $\sigma = n \in N$ и $c = n - p$, $p \in N$, $p < n$, операторы $V_{\sigma,c}(f;x)$ совпадают с известными суммами Валле Пуссена

$$V_{n,p}(f;x) = \frac{1}{p} \sum_{k=n-p}^{n-1} S_k(f;x),$$

где $S_k(f;x)$, $k = 0, 1, \ldots,$ — частные суммы порядка k ряда Фурье функции $f(x)$. Поэтому в дальнейшем операторы $V_{\sigma,c}(f;x)$ будем называть операторами Валле Пуссена.

Положим

$$\rho_{\sigma,c}(f;x) \stackrel{\mathrm{df}}{=} f(x) - V_{\sigma,c}(f;x).$$

Настоящая работа посвящена изучению асимптотического поведения при $n \to \infty$ верхних граней

$$\mathcal{E}\left(\hat{C}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}; V_{\sigma,c}\right) = \sup_{f \in \hat{C}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}} \left\|\rho_{\sigma,c}(f;\cdot)\right\|_C, \tag{7}$$

где в качестве множества $\mathfrak{N}$ выступают единичный шар S_∞ в пространстве существенно ограниченных функций M

$$S_\infty = \{\varphi : \operatorname{ess\,sup} |\varphi(t)| \le 1\}$$

(в этом случае полагают $\hat{C}^{\psi}_{\beta}S_\infty = \hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}$), а также классы

$$H_\omega = \{\varphi \in C : \omega(\varphi;t) \le \omega(t)\},$$

где $\omega(\varphi;t)$ — модуль непрерывности функции $\varphi(\cdot)$, $\omega(t)$ — фиксированный модуль непрерывности.

Следуя [1], из множества $\mathfrak{A}$ выделим подмножества $\mathfrak{A}_C$ и F_0 по следующему правилу. Каждой функции $\psi \in \mathfrak{M}$ сопоставим функцию $\eta(t) = \eta(\psi;t)$, положив

$$\eta(t) = \psi^{-1}\left(\frac{\psi(t)}{2}\right).$$

Тогда к множеству $\mathfrak{A}_C$ отнесем все функции $\psi \in \mathfrak{A}$, для которых на промежутке $t \geq 1$ существуют положительные числа K_1 и K_2 (вообще говоря, зависящие от $\psi(\cdot)$) такие, что

$$K_1 \leq \frac{t}{\eta(t) - t} \leq K_2,$$

а к множеству F_0 — все функции $\psi \in \mathfrak{A}$, для которых

$$\eta'(t) \leq K, \quad t \geq 1, \qquad \eta'(t) \overset{\mathrm{df}}{=} \eta'(t+0).$$

Величина (7) при условии $\psi \in \mathfrak{A}_C$ ранее рассматривалась в работе автора [5], где, в частности, было показано, что в случае, когда $\lim\limits_{\sigma\to\infty} (c/\sigma) = 1$, справедливо асимптотическое равенство

$$\mathscr{E}\left(\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty} V_{\sigma,c}\right) = \frac{4}{\pi^2}\psi(\sigma)\ln\frac{\sigma}{\sigma - c} + O(1)\psi(\sigma), \quad \sigma \to \infty.$$

Здесь этот результат распространяется на случай, когда верхняя грань берется по классам $\hat{C}^{\psi}_{\beta} H_{\omega}$, причем $\psi \in F_0$.

Наряду с операторами $V_{\sigma,c}(f;x)$ в работе [6] введены операторы вида

$$V^*_{\sigma,c}(f;x) = A_0 + \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{\psi}_{\beta}(x+t)\left(\widehat{\psi\lambda^*_{\sigma,c}}\right)(t;\beta)\,dt, \tag{8}$$

где

$$\left(\widehat{\psi\lambda^*_{\sigma,c}}\right)(t;\beta) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\psi(\varpi)\lambda^*_{\sigma,c}(\varpi)\cos\left(\varpi t + \frac{\beta\pi}{2}\right)d\varpi,$$

$$\lambda^*_{\sigma,c}(v) = \begin{cases} \lambda_{\sigma,c}(v), & v \in [0;c] \cup [\sigma;\infty); \\ 1 - \dfrac{(v-c)\psi(\sigma)}{(\sigma-c)\psi(v)}, & c \leq v \leq \sigma. \end{cases} \tag{9}$$

Там же было отмечено, что операторы $V_{\sigma,c}(f;x)$ и $V^*_{\sigma,c}(f;x)$ отличаются на величину

$$\Delta_{\sigma,c}(f;x) = V^*_{\sigma,c}(f;x) - V_{\sigma,c}(f;x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{\psi}_{\beta}(x+t)\hat{\delta}_{\sigma,c}(t)\,dt, \tag{10}$$

$$\hat{\delta}_{\sigma,c}(t) = \frac{1}{(\sigma-c)\pi}\int\limits_{c}^{\sigma}(v-c)(\psi(v) - \psi(\sigma))\cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right)dv. \tag{11}$$

В этой же работе показано, что для величины $\Delta_{\sigma,c}(f;x)$ справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть $\psi(v)$ — функция, непрерывная при всех $v \geq 0$ и удовлетворяющая условию* (3). *Тогда для любых σ, $0 \leq c \leq \sigma$, $f \in \hat{C}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ и $\beta \in R^1$ справедливо неравенство*

$$\left\|\Delta_{\sigma,c}(f;x)\right\|_C \leq E_c\left(f^{\psi}_{\beta}\right)\left\|\hat{\delta}_{\sigma,c}\right\|_1, \tag{12}$$

в котором

$$E_c\left(f^{\psi}_{\beta}\right) = \inf_{\varphi\in W^2_c}\left\|f^{\psi}_{\beta}(\cdot) - \varphi(\cdot)\right\|_C,$$

W_c^2 *— множество целых функций* $\varphi(\cdot)$ *экспоненциального типа не выше* c, *удовлетворяющих условию*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\varphi(t)|^2}{(1+|t|)^2}\, dt < \infty,$$

и

$$\left\|\hat{\delta}_{\sigma,c}\right\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \left|\hat{\delta}_{\sigma,c}(t)\right| dt.$$

Отправным пунктом наших исследований будет следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $\psi \in F$, $\beta \in R^1$ *и* $a = a(\sigma)$ *— произвольная функция, непрерывная при всех* $\sigma \geq 1$ *и такая, что* $\sigma a(\sigma) \geq a(0) > 0$. *Тогда если* $f \in \hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}$, *то для любых* x *и* $\sigma > h \geq 1$

$$\rho_{\sigma,\sigma-h}(f;x) =$$

$$= \nu_a \frac{\psi(\sigma)}{\pi} \int\limits_{m_a \leq |t| \leq M_a} f^{\psi}_{\beta}(x+t) \frac{\sin\left(\sigma t + \frac{\beta\pi}{2}\right)}{t}\, dt + b^{\psi}_{\sigma,h}(a;f;x), \tag{13}$$

где

$$m_a = \min\left\{a(\sigma); \frac{\pi}{h}\right\}, \qquad M_a = \max\left\{a(\sigma); \frac{\pi}{h}\right\}, \qquad \nu_a = \operatorname{sign}\left\{a(\sigma) - \frac{\pi}{h}\right\}$$

и

$$\left|b^{\psi}_{\sigma,h}(a;f;x)\right| = O(1)\left[\psi(\sigma-h) + \int_{1/a(\sigma)}^{\infty} \frac{\psi(t+\sigma)}{t}\, dt + \right.$$

$$\left. + \int_{a(\sigma)}^{\infty} \frac{\psi(\sigma) - \psi(\sigma - 1/t)}{t}\, dt\right]. \tag{14}$$

Если же $f \in \hat{C}^{\psi}_{\beta} H_{\omega}$, *то для любых* x *и* $\sigma > h \geq 1$

$$\rho_{\sigma,\sigma-h}(f;x) = -\nu_a \frac{\psi(\sigma)}{\pi} \int\limits_{m_a \leq |t| \leq M_a} \delta(x;t) \frac{\sin\left(\sigma t + \frac{\beta\pi}{2}\right)}{t}\, dt + d^{\psi}_{\sigma,h}(a;f;x), \tag{15}$$

где

$$\delta(x;t) = f^{\psi}_{\beta}(x) - f^{\psi}_{\beta}(x+t)$$

и

$$d^{\psi}_{\sigma,h}(a;f;x) = O(1)\left[\psi(\sigma-h) + \int_{1/a(\sigma)}^{\infty} \frac{\psi(t+\sigma)}{t}\, dt + \right.$$

$$\left. + \int_{a(\sigma)}^{\infty} \frac{\psi(\sigma) - \psi(\sigma - 1/t)}{t}\, dt\right] \omega\left(\frac{1}{\sigma - h}\right). \tag{16}$$

В соотношениях (14) *и* (16) *через* $O(1)$ *обозначены величины, равномерно ограниченные по* x, σ *и* β.

Доказательство. С учетом соотношения (10) запишем величину $\rho_{\sigma,c}(f;x)$ в виде

$$\rho_{\sigma,c}(f;x) = \rho^*_{\sigma,c}(f;x) + \Delta_{\sigma,c}(f;x), \tag{17}$$

где

$$\rho^*_{\sigma,c}(f;x) = f(x) - V^*_{\sigma,c}(f;x) = \int_{-\infty}^{\infty} f^{\psi}_{\beta}(x+t)\left(\widehat{\psi\tau^*_{\sigma,c}}\right)(t;\beta)\,dt, \tag{18}$$

$\tau^*_{\sigma,c}(v) = 1-\lambda^*_{\sigma,c}(v)$, а $\lambda^*_{\sigma,c}(v)$ — функция, определенная в соотношении (9).

Если $\varphi \in W^2_c$, то согласно предложению 9 работы [2] справедливо равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x+t)\left(\widehat{\psi\tau^*_{\sigma,c}}\right)(t;\beta)\,dt = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\rho^*_{\sigma,c}(f;x) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x+t)\left(\widehat{\psi\tau^*_{\sigma,c}}\right)(t;\beta)\,dt, \tag{19}$$

где

$$\delta(v) = f^{\psi}_{\beta}(v) - \varphi(v).$$

Исходя из формулы (19), исследуем более детально величину $\rho^*_{\sigma,c}(f;x)$. Согласно равенствам (9)

$$\left(\widehat{\psi\tau^*_{\sigma,c}}\right)(t;\beta) = \frac{\psi(\sigma)}{\pi}\int_{c}^{\sigma}\frac{v-c}{\sigma-c}\cos\left(vt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dv +$$

$$+ \int_{\sigma}^{\infty}\psi(v)\cos\left(vt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dv \overset{\mathrm{df}}{=} I_{\sigma,c}(f;t) + I_{\sigma}(f;t). \tag{20}$$

Интегрируя по частям и выполняя элементарные преобразования при $c = \sigma - h$, получаем

$$I_{\sigma,\sigma-h}(f;t) = \frac{\psi(\sigma)}{\pi}\left(\frac{\sin\left(\sigma t+\frac{\beta\pi}{2}\right)}{t} - \frac{\sin\left(\frac{2\sigma+h}{2}t+\frac{\beta\pi}{2}\right)\sin\frac{ht}{2}}{ht^2}\right) =$$

$$= \frac{\psi(\sigma)}{\pi}\left(\frac{ht-\sin ht}{ht^2}\sin\left(\sigma t+\frac{\beta\pi}{2}\right) + \frac{1-\cos ht}{ht^2}\cos\left(\sigma t+\frac{\beta\pi}{2}\right)\right), \tag{21}$$

$$I_{\sigma}(f;t) = -\frac{\psi(\sigma)}{\pi t}\sin\left(\sigma t+\frac{\beta\pi}{2}\right) - \frac{1}{2\pi t}\int_{\sigma}^{\infty}\psi'(v)\sin\left(vt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dv. \tag{22}$$

Пусть теперь $a = a(\sigma)$ — произвольная функция, непрерывная при всех $\sigma > 0$ и такая, что $\sigma a(\sigma) > a(0) > 0$. Положим

$$m_a = \min\left\{a(\sigma); \frac{\pi}{h}\right\}, \qquad M_a = \max\left\{a(\sigma); \frac{\pi}{h}\right\}.$$

Тогда величину $\rho^*_{\sigma,c}(f;x)$, $c = \sigma - h$, можно записать в следующем виде:

$$\rho^*_{\sigma,c}(f;x) = \frac{\psi(\sigma)}{\pi}\int_{m_a\le|t|\le M_a}\delta(x+t)\frac{\sin\left(\sigma t+\frac{\beta\pi}{2}\right)}{t}\,dt +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\le a(\sigma)}\delta(x+t)\int\limits_{\sigma}^{\infty}\psi(v)\cos\left(vt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dv\,dt\,-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\le a(\sigma)}\delta(x+t)\int\limits_{\sigma}^{\infty}\psi'(v)\frac{\sin\left(vt+\frac{\beta\pi}{2}\right)}{t}dv\,dt\,+$$

$$+\frac{\psi(\sigma)}{\pi}\int\limits_{-\pi/h}^{\pi/h}\delta(x+t)\left(\frac{ht-\sin ht}{ht^2}\sin\left(\sigma t+\frac{\beta\pi}{2}\right)+\frac{1-\cos ht}{ht^2}\cos\left(\sigma t+\frac{\beta\pi}{2}\right)\right)dt\,-$$

$$-\frac{\psi(\sigma)}{\pi}\int\limits_{|t|\ge\pi/h}\delta(x+t)\frac{\sin\left(\frac{2\sigma+h}{2}t+\frac{\beta\pi}{2}\right)\sin\frac{ht}{2}}{ht^2}\,dt\overset{\mathrm{df}}{=}$$

$$\overset{\mathrm{df}}{=}B^{\psi}_{\sigma,h}(a;f;x)+P^{\psi}_{\sigma}(a;f;x)-R^{\psi}_{\sigma}(a;f;x)+\gamma^{\psi}_{\sigma,h}(a;f;x)+\mu^{\psi}_{\sigma,h}(a;f;x).\quad(23)$$

Найдем оценки сверху для последних четырех слагаемых из правой части соотношения (23). Интегралы

$$P^{\psi}_{\sigma}(a;f;x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\le a(\sigma)}\delta(x+t)\int\limits_{\sigma}^{\infty}\psi(v)\cos\left(vt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dv\,dt$$

и

$$R^{\psi}_{\sigma}(a;f;x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\le a(\sigma)}\delta(x+t)\int\limits_{\sigma}^{\infty}\psi'(v)\frac{\sin\left(vt+\frac{\beta\pi}{2}\right)}{t}dv\,dt$$

изучались в работе [1], где было показано, что для любой функции $f\in\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}$

$$\left|P^{\psi}_{\sigma}(a;f;x)\right|\le K\left(\psi(\sigma)+\int\limits_{1/a(\sigma)}^{\infty}\frac{\psi(t+\sigma)}{t}dt\right),\quad(24)$$

$$\left|R^{\psi}_{\sigma}(a;f;x)\right|\le K\left(\psi(\sigma)+\int\limits_{a(\sigma)}^{\infty}\frac{\psi(\sigma)-\psi(\sigma-1/t)}{t}dt\right),\quad(25)$$

а для любой функции $f\in\hat{C}^{\psi}_{\beta}H_{\omega}$

$$\left|P^{\psi}_{\sigma}(a;f;x)\right|\le K\left(\psi(\sigma)+\int\limits_{1/a(\sigma)}^{\infty}\frac{\psi(t+\sigma)}{t}dt\right)\omega\left(\frac{1}{\sigma}\right),\quad(26)$$

$$\left|R^{\psi}_{\sigma}(a;f;x)\right|\le K\left(\psi(\sigma)+\int\limits_{a(\sigma)}^{\infty}\frac{\psi(\sigma)-\psi(\sigma-1/t)}{t}dt\right)\omega\left(\frac{1}{\sigma}\right).\quad(27)$$

Для оценки оставшихся интегралов из соотношения (23) будем использовать метод, предложенный в работе [4]. Сначала рассмотрим интеграл

$$I_1(f;\sigma;h)=\int\limits_{0}^{\pi/h}\delta(x+t)\frac{ht-\sin ht}{ht^2}\sin\left(\sigma t+\frac{\beta\pi}{2}\right)dt.\quad(28)$$

Положим

$$G(x) = \int_0^x \frac{ht - \sin ht}{ht^2} \sin\left(\sigma t + \frac{\beta\pi}{2}\right) dt$$

и при достаточно большом σ обозначим через $t_1, t_2, \ldots, t_N$ нули функции $\sin(\sigma t + \beta\pi/2)$, лежащие на промежутке $[0; \pi/h]$ и занумерованные в порядке возрастания. Поскольку функция

$$g(t) = g_h(t) = \frac{ht - \sin ht}{ht^2}, \quad h > 0,$$

не убывает на промежутке $(0; \pi/h)$, то на каждом из отрезков $[0; t_1]$, $[t_1; t_2], \ldots, [t_{N-1}; t_N]$ функция $G(x)$ один раз обратится в нуль в некоторой точке x_k, $k = 0, 1, \ldots, N-1$, причем $x_0 = 0$. Применяя лемму III.1.3 из работы [4], когда

$$J = \left[0; \frac{\pi}{h}\right], \quad f(t) = \delta(x; t), \quad \varphi(t) = \frac{ht - \sin ht}{ht^2} \sin\left(\sigma t + \frac{\beta\pi}{2}\right),$$

получаем

$$|I_1(f; \sigma; h)| \le \omega(\Delta) \int_0^{\pi/h} \left|\frac{ht - \sin ht}{ht^2}\right| dt + \max_{x_{N-1} \le t \le \pi/h} |\delta(x+t)| \int_{x_{N-1}}^{\pi/h} \left|\frac{ht - \sin ht}{ht^2}\right| dt.$$

В рассматриваемом случае

$$\Delta = \max_k (x_{k+1} - x_k) < \frac{2\pi}{\sigma}.$$

Поэтому из последнего соотношения, принимая во внимание свойства модулей непрерывности, находим

$$|I_1(f; \sigma; h)| \le K\omega\left(\frac{1}{\sigma}\right).$$

Ясно, что аналогичная оценка справедлива и для отрицательных t. Таким образом, для любой функции $f \in \hat{C}_\beta^\psi H_\omega$

$$\left| \int_{-\pi/h}^{\pi/h} \delta(x+t) \frac{ht - \sin ht}{ht^2} \sin\left(\sigma t + \frac{\beta\pi}{2}\right) dt \right| \le K\omega\left(\frac{1}{\sigma}\right). \tag{29}$$

Принимая во внимание монотонность функции

$$z(t) = z_h(t) = \frac{1 - \cos ht}{ht^2}, \quad h > 0,$$

на промежутке $(0; \pi/h)$ и проводя рассуждения, аналогичные тем, с помощью которых была получена оценка (29), находим

$$\left| \int_{-\pi/h}^{\pi/h} \delta(x+t) \frac{1 - \cos ht}{ht^2} \cos\left(\sigma t + \frac{\beta\pi}{2}\right) dt \right| \le K\omega\left(\frac{1}{\sigma}\right). \tag{30}$$

Сопоставляя соотношения (29) и (30), получаем оценку

$$|\gamma_{\sigma, h}(a; f; x)| \le K\psi(\sigma)\omega\left(\frac{1}{\sigma}\right), \tag{31}$$

которая справедлива для любой функции $f \in \hat{C}_\beta^\psi H_\omega$. Если же $f \in \hat{C}_{\beta,\infty}^\psi$, то, принимая во внимание неравенства

$$|g(t)| \le \frac{h}{\pi}, \qquad |z(t)| \le \frac{h}{2}, \quad t \in \left(0; \frac{\pi}{h}\right),$$

находим

$$|\gamma_{\sigma,h}(a; f; x)| \le K\psi(\sigma). \tag{32}$$

Записывая последний интеграл из соотношения (23) в виде

$$\mu_{\sigma,h}(a; f; x) = \frac{\psi(\sigma)}{\pi}\left(\int\limits_{|t|\ge\pi/h} \delta(x+t)\frac{\cos\left((\sigma-h)t + \frac{\beta\pi}{2}\right)}{t^2}\,dt - \right.$$

$$\left. - \int\limits_{|t|\ge\pi/h} \delta(x+t)\frac{\cos\left(\sigma t + \frac{\beta\pi}{2}\right)}{t^2}\,dt\right),$$

учитывая монотонность функции $1/t^2$, $t \in [\pi/h; \infty)$, и рассуждая так же, как и при доказательстве соотношения (29), для любой функции $f \in \hat{C}^{\psi}_{\beta} H_{\omega}$ получаем

$$\left|\mu_{\sigma,h}(a; f; x)\right| \le K\psi(\sigma)\omega\left(\frac{1}{\sigma - h}\right). \tag{33}$$

Если же $f \in \hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}$, то очевидна оценка

$$|\mu_{\sigma,h}(a; f; x)| \le K\psi(\sigma). \tag{34}$$

Сопоставляя соотношения (23) – (27) и (31) – (34), получаем

$$\rho^*_{\sigma,c}(f; x) = \frac{\psi(\sigma)}{\pi}\int\limits_{m_a \le |t| \le M_a} \delta(x+t)\frac{\sin\left(\sigma t + \frac{\beta\pi}{2}\right)}{t}\,dt + r^{\psi}_{\sigma,h}(a; f; x), \tag{35}$$

где если $f \in \hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}$, то $\delta(x+t) = f^{\psi}_{\beta}(x+t)$ и

$$\left|r^{\psi}_{\sigma,h}(a; f; x)\right| \le K\left(\psi(\sigma) + \int\limits_{1/a(\sigma)}^{\infty}\frac{\psi(t+\sigma)}{t}\,dt + \int\limits_{a(\sigma)}^{\infty}\frac{\psi(\sigma) - \psi(\sigma - 1/t)}{t}\,dt\right);$$

если же $f \in \hat{C}^{\psi}_{\beta} H_{\omega}$, то $\delta(x+t) = f^{\psi}_{\beta}(x+t) - f^{\psi}_{\beta}(x)$ и

$$\left|r^{\psi}_{\sigma,h}(a; f; x)\right| \le$$

$$\le K\left(\psi(\sigma) + \int\limits_{1/a(\sigma)}^{\infty}\frac{\psi(t+\sigma)}{t}\,dt + \int\limits_{a(\sigma)}^{\infty}\frac{\psi(\sigma) - \psi(\sigma - 1/t)}{t}\,dt\right)\omega\left(\frac{1}{\sigma - h}\right).$$

Найдем теперь оценку для второго слагаемого из правой части соотношения (17). Воспользовавшись разультатами работы [6, с. 616, 617], можно записать

$$\left\|\hat{\delta}_{\sigma,c}\right\|_1 = \int\limits_{-\pi/h}^{\pi/h}\left|\hat{\delta}_{\sigma,c}(t)\right|dt + \int\limits_{|t|\ge\pi/h}\left|\hat{\delta}_{\sigma,c}(t)\right|dt \le K(\psi(\sigma - h) - \psi(\sigma)) \times$$

$$\times\left(\int\limits_{-\pi/h}^{\pi/h}\left|\frac{ht - \sin ht}{ht^2}\sin\left(\sigma t + \frac{\beta\pi}{2}\right) + \frac{1 - \cos ht}{ht^2}\cos\left(\sigma t + \frac{\beta\pi}{2}\right)\right|dt + 1\right).$$

Отсюда с учетом леммы 1 и неравенств

$$E_{\sigma-h}\left(f_\beta^\psi\right) \le 1 \quad \forall f \in \hat{C}^\psi_{\beta,\infty},$$

$$E_{\sigma-h}\left(f_\beta^\psi\right) \le \omega\left(\frac{1}{\sigma-h}\right) \quad \forall f \in \hat{C}^\psi_\beta H_\omega$$

получаем

$$\left\|\Delta_{\sigma,\sigma-h}(f;x)\right\|_C \le K(\psi(\sigma-h)-\psi(\sigma)) \quad \forall f \in \hat{C}^\psi_{\beta,\infty} \tag{36}$$

и

$$\left\|\Delta_{\sigma,\sigma-h}(f;x)\right\|_C \le K(\psi(\sigma-h)-\psi(\sigma))\,\omega\left(\frac{1}{\sigma-h}\right) \quad \forall f \in \hat{C}^\psi_\beta H_\omega. \tag{37}$$

Сопоставляя соотношения (17), (36) и (37), приходим к утверждению теоремы.

Теорема доказана.

Исходя из теоремы 1, найдем асимптотические равенства для величин (7). Поскольку классы $\hat{C}^\psi_\beta \mathfrak{N}$, где $\mathfrak{N}$ есть S_∞ или H_ω, инвариантны относительно сдвига по аргументу, то

$$\mathscr{E}\left(\hat{C}^\psi_\beta \mathfrak{N}; V_{\sigma,c}\right) = \sup_{f\in \hat{C}^\psi_\beta \mathfrak{N}} \left|\rho_{\sigma,c}(f;0)\right|. \tag{38}$$

Если $f \in \hat{C}^\psi_\beta \mathfrak{N}$, то согласно определению $f^\psi_\beta \in \mathfrak{N}$. С другой стороны, для любого $\varphi \in \mathfrak{N}$ в классе $\hat{C}^\psi_\beta \mathfrak{N}$ существует функция $f(\cdot)$ такая, что почти везде $f^\psi_\beta(\cdot) = \varphi(\cdot)$. Поэтому вследствие равенств (13) – (16) получаем

$$\mathscr{E}\left(\hat{C}^\psi_{\beta,\infty}; V_{\sigma,\sigma-h}\right) = \sup_{\varphi\in S_\infty} \frac{\psi(\sigma)}{\pi} \left| \int\limits_{m_a \le |t| \le M_a} \varphi(t) \frac{\sin\left(\sigma t + \frac{\beta\pi}{2}\right)}{t}\, dt \right| + r_1(a), \tag{39}$$

где

$$|r_1(a)| = O(1)\left[\psi(\sigma-h) + \int\limits_{1/a(\sigma)}^{\infty} \frac{\psi(t+\sigma)}{t}\, dt + \int\limits_{a(\sigma)}^{\infty} \frac{\psi(\sigma)-\psi(\sigma-1/t)}{t}\, dt\right], \tag{40}$$

$$\mathscr{E}\left(\hat{C}^\psi_\beta H_\omega; V_{\sigma,\sigma-h}\right) = \sup_{\varphi\in H_\omega} \frac{\psi(\sigma)}{\pi} \left| \int\limits_{m_a \le |t| \le M_a} (\varphi(t)-\varphi(0)) \frac{\sin\left(\sigma t + \frac{\beta\pi}{2}\right)}{t}\, dt \right| + r_2(a), \tag{41}$$

где

$$|r_2(a)| = O(1)\left[\psi(\sigma-h) + \int\limits_{1/a(\sigma)}^{\infty} \frac{\psi(t+\sigma)}{t}\, dt + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{a(\sigma)}^{\infty} \frac{\psi(\sigma)-\psi(\sigma-1/t)}{t}\, dt\right] \omega\left(\frac{1}{\sigma-h}\right). \tag{42}$$

Если $a(\sigma) \le \pi/h$, то, используя метод построения экстремальных функций, предложенный в [4], можно показать, что

$$\sup_{\varphi\in S_\infty}\left|\int\limits_{m_a\le|t|\le M_a}\varphi(t)\frac{\sin\left(\sigma t+\frac{\beta\pi}{2}\right)}{t}\,dt\right| = \frac{4}{\pi}\ln\frac{\pi}{a(\sigma)h}+O(1) \tag{43}$$

и

$$\sup_{\varphi\in H_\omega}\left|\int\limits_{m_a\le|t|\le M_a}(\varphi(t)-\varphi(0))\frac{\sin\left(\sigma t+\frac{\beta\pi}{2}\right)}{t}\,dt\right| =$$

$$= \frac{2\theta_\omega}{\pi}\ln\frac{\pi}{a(\sigma)h}\int\limits_0^{\pi/2}\omega\left(\frac{2t}{\sigma}\right)\sin t\,dt+O(1), \quad \frac{2}{3}\le\theta_\omega\le 1. \tag{44}$$

Аналогично, в случае, когда $a(\sigma)\ge\pi/h$, получим

$$\sup_{\varphi\in S_\infty}\left|\int\limits_{m_a\le|t|\le M_a}\varphi(t)\frac{\sin\left(\sigma t+\frac{\beta\pi}{2}\right)}{t}\,dt\right| = \frac{4}{\pi}\ln\frac{\pi a(\sigma)}{h}+O(1) \tag{45}$$

и

$$\sup_{\varphi\in H_\omega}\left|\int\limits_{m_a\le|t|\le M_a}(\varphi(t)-\varphi(0))\frac{\sin\left(\sigma t+\frac{\beta\pi}{2}\right)}{t}\,dt\right| =$$

$$= \frac{2\theta_\omega}{\pi}\ln\frac{\pi a(\sigma)}{h}\int\limits_0^{\pi/2}\omega\left(\frac{2t}{\sigma}\right)\sin t\,dt+O(1), \quad \frac{2}{3}\le\theta_\omega\le 1. \tag{46}$$

Выберем в качестве $a(\sigma)$ величину

$$a^*(\sigma) = \frac{1}{\eta(\sigma)-\sigma}.$$

В работе [7] показано, что $\forall\,\psi\in F_0$

$$\int\limits_{1/a^*(\sigma)}^{\infty}\frac{\psi(t+\sigma)}{t}\,dt+\int\limits_{a^*(\sigma)}^{\infty}\frac{\psi(\sigma)-\psi(\sigma-1/t)}{t}\,dt \le K\psi(\sigma), \tag{47}$$

причем включение $\sigma\in N$ не принципиально.

Таким образом, сопоставляя теорему 1 и соотношения (39)–(47), получаем следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть* $\psi\in F_0$. *Тогда для любых чисел* $\sigma>h\ge 1$ *справедливы равенства*

$$\mathcal{E}\left(\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty};V_{\sigma,\sigma-h}\right) = \frac{4}{\pi^2}\psi(\sigma)\left|\ln\frac{\eta(\sigma)-\sigma}{h}\right|+O(1)\psi(\sigma-h), \tag{48}$$

$$\mathcal{E}\left(\hat{C}^{\psi}_{\beta}H_\omega;V_{\sigma,\sigma-h}\right) = \frac{2\theta_\omega}{\pi^2}\psi(\sigma)\left|\ln\frac{\eta(\sigma)-\sigma}{h}\right|\times$$

$$\times\int\limits_0^{\pi/2}\omega\left(\frac{2t}{\sigma}\right)\sin t\,dt+O(1)\psi(\sigma-h)\omega\left(\frac{1}{\sigma-h}\right), \tag{49}$$

где $O(1)$ — *величина, равномерно ограниченная по* σ *и* β, $\eta(\sigma) = \eta(\sigma; \psi) = \psi^{-1}(\psi(\sigma)/2)$, *а* $\theta_\omega \in [2/3; 1]$, *причем* $\theta_\omega = 1$, *если* $\omega(t)$ — *выпуклый модуль непрерывности.*

Сделаем несколько замечаний к доказанной теореме. Обозначим через F_∞ множество функций $\psi \in F_0$, для которых

$$\lim_{\sigma\to\infty} (\eta(\psi; \sigma) - \sigma) = \infty.$$

Очевидно, что $\mathfrak{A}_C \subset F_\infty$.

Пусть $\psi \in F_\infty$ и числа $h = h(\sigma)$ выбраны таким образом, чтобы

$$\lim_{\sigma\to\infty} \frac{\eta(\psi; \sigma) - \sigma}{h} = \infty. \tag{50}$$

Поскольку в этом случае

$$\omega\left(\frac{1}{\sigma - h}\right) = O(1)\,\omega\left(\frac{1}{\sigma}\right), \quad \sigma \to \infty,$$

и

$$\psi(\sigma - h) = O(1)\psi(\sigma), \quad \sigma \to \infty,$$

из теоремы 2 получаем такое следствие.

Следствие. *Пусть* $\psi \in F_\infty$ *и выполнено условие* (50). *Тогда при* $\sigma \to \infty$

$$\mathcal{E}\left(\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}; V_{\sigma,\sigma-h}\right) = \frac{4}{\pi^2}\psi(\sigma)\left|\ln\frac{\eta(\sigma) - \sigma}{h}\right| + O(1)\psi(\sigma), \tag{51}$$

$$\mathcal{E}\left(\hat{C}^{\psi}_{\beta} H_\omega; V_{\sigma,\sigma-h}\right) = \frac{2\theta_\omega}{\pi^2}\psi(\sigma)\left|\ln\frac{\eta(\sigma) - \sigma}{h}\right| \times$$

$$\times \int_0^{\pi/2} \omega\left(\frac{2t}{\sigma}\right)\sin t\, dt + O(1)\psi(\sigma)\omega\left(\frac{1}{\sigma}\right), \tag{52}$$

где $O(1)$ — *величина, равномерно ограниченная по* σ *и* β, $\eta(\sigma) = \eta(\sigma; \psi) = \psi^{-1}(\psi(\sigma)/2)$, *а* $\theta_\omega \in [2/3; 1]$, *причем* $\theta_\omega = 1$, *если* $\omega(t)$ — *выпуклый модуль непрерывности.*

Равенства (51) и (52) обеспечивают решение задачи Колмогорова – Никольского для операторов Валле Пуссена на классах $\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}$ и $\hat{C}^{\psi}_{\beta} H_\omega$ соответственно.

1. *Степанец А. И.* Приближение операторами Фурье функций, заданных на действительной оси // Укр. мат. журн. – 1988. – **40**, № 2. – С. 198 – 209.
2. *Степанец А. И.* Классы функций, заданных на действительной оси, и их приближение целыми функциями. I // Там же. – 1990. – **42**, № 1. – С. 102 – 112.
3. *Степанец А. И.* Классы функций, заданных на действительной оси, и их приближение целыми функциями. II // Там же. – № 2. – С. 210 – 222.
4. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 268 с.
5. *Рукасов В. И.* Приближение операторами Валле Пуссена функций, заданных на действительной оси // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 5. – С. 682 – 690.
6. *Степанец А. И.* Приближения в пространствах локально интегрируемых функций // Там же. – 1994. – **46**, № 5. – С. 597 – 625.
7. *Степанец А. И.* Классификация периодических функций и скорость сходимости их рядов Фурье // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1986. – **50**, № 1. – С. 101 – 136.

Получено 27. 05. 2002