УДК 517.98

М. Ф. Городній (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

l_p-РОЗВ'ЯЗКИ ОДНОГО РІЗНИЦЕВОГО РІВНЯННЯ В БАНАХОВОМУ ПРОСТОРІ

We obtain a criterion of the existence and uniqueness of solutions of a linear difference equation with unbounded operator coefficient that belong to the space $l_p(B)$ of sequences of elements from the Banach space B.

Отримано критерій існування та єдиності розв'язків лінійного різницевого рівняння з необмеженим операторним коефіцієнтом, що належать простору $l_p(B)$ послідовностей елементів банахового простору B.

Нехай B — комплексний банахів простір з нормою $\|\cdot\|$ та нульовим елементом $\vec{0}$; $L(B)$ — банахів простір усіх лінійних обмежених операторів, що діють з B в B; I — одиничний, O — нульовий оператори в B; $\operatorname{Ker} T$, $R(T)$, $\rho(T)$, $\sigma(T)$, $r(T)$ позначають відповідно ядро, образ, резольвентну множину, спектр та спектральний радіус оператора T. Нехай $A_1, A_2, \ldots, A_m$ — фіксовані оператори з $L(B)$; A — замкнений оператор, що діє в B, з областю визначення D.

Зафіксуємо $p \in [1; +\infty)$ і покладемо

$$l_p(B) := \left\{ \vec{x} := \{x_n,\ n \in Z\} \subset B \,\middle|\, |\vec{x}|_p := \left(\sum_{n \in Z} \|x_n\|^p \right)^{1/p} < +\infty \right\}.$$

$\left(l_p(B), |\cdot|_p\right)$ — банахів простір з покоординатними додаванням елементів та множенням на комплексне число. У даній статті досліджується питання про існування та єдиність розв'язку $\vec{x} := \{x_n,\ n \in Z\}$ різницевого рівняння

$$x_{n+1} = A x_n + A_1 x_{n-1} + \ldots + A_m x_{n-m} + y_n, \quad n \in Z, \tag{1}$$

у просторі $l_p(B)$. Тут $\vec{y} := \{y_n,\ n \in Z\}$ — заданий елемент з $l_p(B)$. Аналогічне питання вивчалось у [1] для рівняння

$$x_{n+1} = A_n x_n + y_n, \quad n \in Z,$$

у випадку, коли операторні коефіцієнти A_n, $n \in Z$, належать $L(B)$ і задовольняють умову дискретної дихотомії. Про існування та єдиність обмеженого (за нормою в B) розв'язку рівняння (1), відповідного обмеженій послідовності $\vec{y}$, див. [2, 3], про застосування різницевих рівнянь вигляду (1) — [1, 2].

1. Допоміжні твердження. У подальшому використовуються наведені нижче леми.

Лема 1. *Нехай* $\vec{x} \in l_p(B)$, $\{E_n,\ n \in Z\}$ *— така послідовність операторів з* $L(B)$, *що*

$$C_E := \sum_{n \in Z} \|E_n\| < +\infty.$$

Покладемо

$$\bar{u} := \left\{ \sum_{k \in Z} E_{n-k} x_k,\ n \in Z \right\}.$$

Тоді $\bar{u} \in l_p(B)$, $|\bar{u}|_p \le C_E |\bar{x}|_p$.

Для доведення леми 1 досить застосувати твердження задачі 598 з [4, с. 252] до числових послідовностей $\{\|E_n\|,\ n \in Z\}$ та $\{\|x_n\|,\ n \in Z\}$.

Лема 2. *Якщо для довільного* $\bar{y} \in l_p(B)$ *різницеве рівняння*

$$x_{n+1} = Ax_n + y_n, \quad n \in Z, \tag{2}$$

має єдиний розв'язок $\bar{x} \in l_p(B)$, *то*

$$\sigma(A) \cap \{z \in C \mid |z| = 1\} = \varnothing.$$

Доведення. 1. Покладемо

$$D^\infty := \left\{ \bar{x} := \{x_n, n \in Z\} \subset D \,\middle|\, \|\bar{x}\|_p := \left(\sum_{n \in Z} \|x_n\|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{n \in Z} \|Ax_n\|^p \right)^{1/p} < +\infty \right\}.$$

Скориставшись замкненістю оператора A, легко перевірити, що $\left(D^\infty, \|\cdot\|_p\right)$ — комплексний банахів простір з покоординатними додаванням елементів та множенням на скаляр. Зауважимо, що для довільного $\bar{y} \in l_p(B)$ відповідний йому єдиний розв'язок $\bar{x}$ рівняння (2) належить D^∞. Визначимо оператор $G : D^\infty \to l_p(B)$ співвідношенням

$$G\bar{x} := \{(G\bar{x})_n := x_{n+1} - Ax_n,\ n \in Z\}, \quad \bar{x} \in D^\infty.$$

Зазначимо, що $G \in L\left(D^\infty, l_p(B)\right)$, а з умови леми і теореми Банаха про обернений оператор [5, с. 59] випливає, що G має обернений оператор $G^{-1} \in \in L\left(l_p(B), D^\infty\right)$.

Доведемо, що знайдеться набір операторів $\{T_n,\ n \in Z\} \subset L(B)$, для якого виконуються умови:

i) $\forall n \in Z\colon\ T_n : B \to D,\ AT_n \in L(B)$;

ii) оператор G^{-1} зображується у вигляді

$$G^{-1}\bar{y} := \left\{ \left(G^{-1}y\right)_k = \sum_{j \in Z} T_{k-j} y_j,\ k \in Z \right\}, \quad \bar{y} \in l_p(B).$$

Дійсно, оператори T_k, $k \in Z$, визначаються так:

$$\forall y \in B : T_k y = \left(G^{-1}\bar{y}\right)_k,$$

де $\bar{y} = \{y_n,\ n \in Z\}$ – такий елемент з $l_p(B)$, що $y_0 = y$, $y_n = \bar{0}$, $n \ne 0$. Умови i), ii) виконуються внаслідок лінійності різницевого рівняння (2) та включення $G^{-1} \in L\left(l_p(B), D^\infty\right)$.

2. Нехай $P := I - T_1$. Враховуючи замкненість оператора A та узагальнюючи міркування, що використовуються при доведенні теореми 7.6.5 з [6, с. 251], послідовно перевіряємо правильність таких тверджень:

j_1) $T_1 - AT_0 = I$, $T_{k+1} - AT_k = O$, $k \neq 0$;

j_2) $T_n = A^{n-1}(I-P)$, $n \geq 1$, $-P = A^{-n+1}T_n$, $n \leq 0$;

j_3) якщо $\{x_n, n \geq 1\}$ — така послідовність з D, що $\{\ldots, \vec{0}, \vec{0}, x_1, x_2, \ldots\} \in l_p(B)$ і $x_{n+1} = Ax_n$, $n \geq 1$, то $Px_1 = \vec{0}$;

j_4) $P = P^2$, а також

$$\forall x \in \operatorname{Ker} P : x \in D, \quad PAx = APx;$$

j_5) якщо $\{\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \vec{0}, \vec{0}, \ldots\} \in l_p(B)$, $x_n \in D$, $n \leq 1$, і $x_{n+1} = Ax_n$, $n \leq 0$, то $Ax_1 = PAx_1$;

j_6) нехай $x \in R(P)$, $z_n := T_n x$, $n \in Z$, тоді $z_0 \in R(P)$, $z_1 = \vec{0}$;

j_7) $R(P) = A\big(R(P) \cap D\big)$;

j_8) якщо $x \in \big(R(P) \cap D\big)$, $Ax = \vec{0}$, то $x = \vec{0}$;

j_9) оператор A діє бієктивно з $R(P) \cap D$ на $R(P)$, а отже, на $R(P)$ існує арифметичний обернений оператор A^{-1} до оператора A, звідки $T_n = -A^{n-1}P$, $n \leq 0$;

j_{10}) на D справджується рівність $AP = PA$.

3. покладемо $B_- := \operatorname{Ker} P$, $B_+ := R(P)$. Внаслідок тверджень j_4), j_9) $B_\pm$ є інваріантними підпросторами для оператора A, а B — прямою сумою цих підпросторів. Нехай $A_\pm$ — звуження оператора A відповідно на $B_\pm$. Тоді $A_- \in L(B_-)$, A_+ — замкнений оператор у B_+ з областю визначення $D \cap B_+$, $\sigma(A) = \sigma(A_+) \cup \sigma(A_-)$.

Доведемо, що

$$\sigma(A_-) \subset \{ z \in C \,|\, |z| < 1 \}\,. \tag{3}$$

Зафіксуємо $y_- \in B_-$. Нехай $\vec{y}_-$ — елемент простору $l_p(B)$ з координатами $y_0 = y_-$, $y_n = \vec{0}$, $n \neq 0$. Врахувавши твердження j_2), j_9), знайдемо спочатку розв'язок $\vec{x} \in l_p(B)$ рівняння $G\vec{x} = \vec{y}_-$, а потім розв'язок $\vec{u} \in l_p(B)$ рівняння $G\vec{u} = \vec{x}$. Зауважимо, що компоненти $\vec{u}$ мають вигляд

$$u_n = \vec{0}, \quad n \leq 1, \quad u_n = (n-1)A_-^{n-2}y_-, \quad n \geq 2.$$

Отже, для довільного $y_- \in B_-$ послідовність $\left\{ \left\| (k+1)A_-^k y_- \right\|, \; k \geq 1 \right\}$ є обмеженою. Тому, внаслідок принципу рівномірної обмеженості,

$$\exists M > 0 \quad \forall k \geq 1 : \left\| (k+1)A_-^k \right\| \leq M.$$

Звідси

$$\forall k \geq 1 : 0 \leq (r(A_-))^k = r\big(A_-^k\big) \leq \left\| A_-^k \right\| \leq \frac{M}{k+1},$$

а отже, $r(A_-) < 1$, тобто виконується включення (3).

Перевіримо правильність включення

$$\sigma(A_+) \subset \{ z \in C \,|\, |z| > 1 \}. \tag{4}$$

Оскільки внаслідок твердження $j_9)$ оператор A_+ має обернений оператор $A_+^{-1} \in L(B_+)$, для доведення включення (4) потрібно встановити, що $r(A_+^{-1}) < < 1$. Для цього достатньо для довільного $x_+ \in B_+$ повторити міркування, за допомогою яких доведено включення (3). З (3), (4) випливає твердження леми 2.

Нехай B^{m+1} позначає декартів добуток $m+1$ екземплярів простору B, тоді B^{m+1} — комплексний банахів простір з покоординатними додаванням та множенням на скаляр і нормою

$$\|\tilde{u}\|_* := \sum_{k=1}^{m+1} \|u_k\|, \qquad \tilde{u} = (u_1, \ldots, u_{m+1})^t \in B^{m+1}.$$

Покладемо

$$\tilde{A} := \begin{pmatrix} O & I & O & \cdots & O & O \\ O & O & I & \cdots & O & O \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ O & O & O & \cdots & O & I \\ A_m & A_{m-1} & A_{m-2} & \cdots & A_1 & A \end{pmatrix},$$

$$\tilde{x}_n := \begin{pmatrix} x_{n-m} \\ x_{n-m+1} \\ \cdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \tilde{y}_n := \begin{pmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \\ \cdots \\ \vec{0} \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Тоді різницеве рівняння (1) можна записати в еквівалентному вигляді

$$\tilde{x}_{n+1} = \tilde{A}\tilde{x}_n + \tilde{y}_n, \quad n \in Z. \tag{5}$$

Тут $\tilde{A}$ — замкнений оператор, що діє в B^{m+1} за правилами матричного числення, з областю визначення

$$\tilde{D} = \left\{ \tilde{u} = (u_1, \ldots, u_{m+1})^t \in B^{m+1} \,\middle|\, u_{m+1} \in D \right\}.$$

Лема 3. *Для того щоб ненульове число* λ *належало* $\rho(\tilde{A})$, *необхідно і достатньо, щоб оператор*

$$\Psi(\lambda) := \lambda^{m+1} I - A\lambda^m - A_1\lambda^{m-1} - \ldots - A_{m-1}\lambda - A_m \tag{6}$$

мав обернений оператор $\Psi^{-1}(\lambda) \in L(B)$.

Доведення. *Необхідність.* Якщо $\lambda \in \rho(\tilde{A})$, то внаслідок теореми Банаха про обмежений оператор для довільного $y \in B$ система

$$\begin{cases} x_2 - \lambda x_1 = \vec{0}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{m+1} - \lambda x_m = \vec{0}, \\ A_m x_1 + \ldots + A_1 x_m + A x_{m+1} - \lambda x_{m+1} = y \end{cases} \tag{7}$$

має єдиний розв'язок. Якщо виразити в (7) усі невідомі через x_1, можна записати $(m+1)$-ше рівняння з (7) у вигляді $\Psi(\lambda)x_1 = y$. Тому для довільного $y \in B$ рівняння $\Psi(\lambda)x = y$ має розв'язок. Якщо, від супротивного, цей розв'язок не єдиний, то існує такий ненульовий елемент $u \in B$, що $\Psi(\lambda)u = \vec{0}$. Але в цьому випадку система (7) при $y = \vec{0}$ має ненульовий розв'язок $x_k = \lambda^{k-1}u$, $1 \le \le k \le m+1$, що суперечить включенню $\lambda \in \rho(\tilde{A})$. Отже, застосовуючи теорему Банаха про обернений оператор до замкненого оператора $\Psi(\lambda)$, переконуємось, що існує оператор $\Psi^{-1}(\lambda) \in L(B)$.

Достатність. Неважко перевірити, що у випадку, коли існує $\Psi^{-1}(\lambda)$, для довільних k, $1 \le k \le m+1$, та $y_k \in B$ система

$$\begin{cases} x_2 - \lambda x_1 = \vec{0}, \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_k - \lambda x_{k-1} = \vec{0}, \\ x_{k+1} - \lambda x_k = y_k, \\ x_{k+2} - \lambda x_{k+1} = \vec{0}, \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_{m+1} - \lambda x_m = \vec{0}, \\ A_m x_1 + \ldots + A_1 x_m + A x_{m+1} - \lambda x_{m+1} = \vec{0} \end{cases}$$

має єдиний розв'язок. Тому для довільного $\tilde{y} \in B^{m+1}$ існує єдиний розв'язок операторного рівняння $\tilde{A}\tilde{x} - \lambda\tilde{x} = \tilde{y}$, тобто $\lambda \in \rho(\tilde{A})$.

Лему 3 доведено.

Лема 4. *Для довільного $\vec{y} \in l_p(B)$ різницеве рівняння (1) має єдиний розв'язок $\vec{x} \in l_p(B)$ тоді і тільки тоді, коли для довільної послідовності $\{\tilde{v}_n,\ n \in Z\} \in l_p(B^{m+1})$ різницеве рівняння*

$$\tilde{u}_{n+1} = \tilde{A}\tilde{u}_n + \tilde{v}_n, \quad n \in Z, \tag{8}$$

має єдиний розв'язок $\{\tilde{u}_n,\ n \in Z\}$ у просторі $l_p(B^{m+1})$.

Доведення. Внаслідок лінійності різницевих рівнянь, що розглядаються, та еквівалентності рівнянь (1) і (5) для доведення леми достатньо перевірити правильність наступного твердження: якщо для довільного $\vec{y} \in l_p(B)$ рівняння (1) має єдиний розв'язок, то при фіксованих k, $1 \le k \le m$, та $\{w_n,\ n \in Z\} \in \in l_p(B)$ існує єдиний розв'язок різницевого рівняння (8), відповідний такій послідовності $\{\tilde{v}_n = (v_n(1), \ldots, v_n(m+1))^t,\ n \in Z\}$, що $v_n(k) = w_n$, $v_n(j) = \vec{0}$, $j \ne k$. Для цього достатньо записати рівняння (8) покоординатно, виразити перші m координат векторів $\tilde{u}_n$, $n \in Z$, через елементи послідовностей $\{u_n(m+1),\ n \in Z\}$ та $\{w_n,\ n \in Z\}$ і підставити в рівняння для $(m+1)$-ї координати. В результаті отримаємо, що послідовність $\{u_n(m+1),\ n \in Z\}$ є єдиним у просторі $l_p(B)$ розв'язком різницевого рівняння (1), відповідним деякій послідовності $\{y_n,\ n \in Z\}$, побудованій за допомогою $\{w_n,\ n \in Z\}$, а інші m координат векторів $\tilde{u}_n$, $n \in Z$, однозначно визначаються через елементи $\{u_n(m+1),\ n \in Z\}$.

Лему 4 доведено.

2. Основний результат. Покладемо

$$\Theta := \Big\{ \{C_n,\ n \in Z\} \subset L(B) \mid \forall n \in Z\colon\ C_n\colon B \to D,\ AC_n \in L(B);$$

$$\exists\, 0 < t_0 < 1 < t_1\colon \sum_{j=-\infty}^{-1} \big(\|C_j\| + \|AC_j\|\big)t_0^j + \sum_{j=0}^{\infty} \big(\|C_j\| + \|AC_j\|\big)t_1^j < +\infty;$$

$$\forall q \in Z\colon\ AC_q + A_1C_{q-1} + \ldots + A_mC_{q-m} = C_qA + C_{q-1}A_1 + \ldots + C_{q-m}A_m \text{ на } D \Big\}.$$

Теорема. *Наведені нижче твердження є еквівалентими*:

a) *існує такий набір операторів* $\{C_n,\ n \in Z\} \in \Theta$, *що для довільного* $\bar{y} \in l_p(B)$ *рівняння* (1) *має розв'язок* $\bar{x} \in l_p(B)$ *вигляду*

$$\bar{x} = \Big\{ x_n = \sum_{k \in Z} C_{n-k} y_k,\ n \in Z \Big\};$$

b) *для довільного* λ, $|\lambda| = 1$, *визначений співвідношенням* (6) *оператор* $\Psi(\lambda)$ *має обернений оператор* $\Psi^{-1}(\lambda) \in L(B)$;

c) *для довільного* $\bar{y} \in l_p(B)$ *рівняння* (1) *має єдиний розв'язок* $\bar{x}$ *у просторі* $l_p(B)$.

Доведення. З урахуванням леми 1 правильність імплікацій a) $\Leftrightarrow$ b), b) $\Rightarrow$ c) перевіряється тим же способом, що й при доведенні теореми 1 з [3]. Імплікація c) $\Rightarrow$ b) є безпосереднім наслідком лем 2 – 4.

Теорему доведено.

1. *Баскаков А. Г.* Об условиях обратимости и фредгольмовости разностных операторов // Докл. РАН. – 2000. – **372**, № 3. – С. 309–310.
2. *Дороговцев А. Я.* Периодические и стационарные режимы бесконечномерных детерминированных и стохастических динамических систем. – Киев: Выща шк., 1992. – 319 с.
3. *Городний М. Ф.* Ограниченные и периодические решения одного разностного уравнения и его стохастического аналога в банаховом пространстве // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 1. – С. 41–46.
4. *Кириллов А. А., Гвишиани А. Д.* Теоремы и задачи функционального анализа. – М.: Мир, 1985. – 384 с.
5. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 829 с.
6. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. – М.: Мир, 1985. – 376 с.

Одержано 06.05.2001