УДК 517.988

В. Л. Макаров (Ін-т математики НАН України, Київ),
В. В. Хлобистов (Київ нац. ун-т ім. Т. Шевченка),
Б. Р. Михальчук (Ін-т математики НАН України, Київ)

ІНТЕРПОЛЯЦІЙНІ ІНТЕГРАЛЬНІ ЛАНЦЮГОВІ ДРОБИ

For nonlinear functionals determined in the space of piecewise continuous functions, we construct an interpolational integral chain fraction by using continual piecewise continuous knots. We establish conditions for the existence and uniqueness of interpolants of this sort.

Для нелінійних функціоналів, визначених на просторі кусково-неперервних функцій, побудовано інтерполяційний інтегральний ланцюговий дріб (ІЛД) за континуальними кусково-неперервними вузлами. Знайдено умови існування та єдиності таких інтерполянтів.

1. Вступ. Питання, пов'язані з узагальненням класичної теорії інтерполяції функцій на функціонали і оператори в абстрактних просторах, розглядались у багатьох роботах (див., наприклад, [1 – 5]). Найбільш загальні результати в цій проблематиці отримано в серії статей В. Л. Макарова, В. В. Хлобистова за 1991 – 1995 роки, які потім у систематизованому вигляді ввійшли до монографії [6]. Стан досліджень на 2000 р. відображено у монографії [7]. Слід зауважити, що специфікою ситуації, яка виникає при операторному поліноміальному інтерполюванні в нескінченновимірних просторах, є неєдиність інтерполянта. Для виділення єдиного інтерполяційного полінома потрібно вводити додаткові умови, одними з яких можуть бути континуальні інтерполяційні вузли. Під останніми розуміються елементи з певного простору, що залежать від деякого дійсного параметра, який пробігає відрізок з $\mathbb{R}^1$. Перший результат у цьому напрямку одержано у роботі [8], де для нелінійних функціоналів побудовано інтерполяційний інтегральний поліном типу Ньютона на кусково-сталих континуальних вузлах і доведено його єдиність. Довгий час відкритим лишалося питання про поширення теорії інтерполювання в функціональних просторах на наближення інтегральними ланцюговими дробами. Для функцій, наприклад, було одержано результати, які базувались на теорії гіллястих ланцюгових дробів В. Я. Скоробогатька (див. [9 – 11]), а для функціоналів, а тим більш для операторів таких результатів не було. Хоча наявність основ теорії інтегральних ланцюгових дробів [12, 13] давала підстави сподіватись на можливість одержання відповідних узагальнень. Таке узагальнення одержано в [14], де вперше було знайдено структуру інтерполяційного інтегрального ланцюгового дробу (ІЛД) на континуальних кусково-неперервних вузлах. Слід відмітити, що доведення інтерполяційності, єдиності відповідної конструкції спиралось на формулу (надалі будемо називати її правилом підстановки), яка в [14] наведена без доведення. Але, як виявили автори даної роботи, ця формула справедлива лише для спеціального випадку вузлів (див., наприклад, [8]) і тільки для цього випадку залишається прийнятною техніка доведення основних тверджень у [14].

Метою даної роботи є уточнення і доповнення результатів роботи [14] на випадок довільних континуальних кусково-неперервних інтерполяційних вузлів.

2. Постановка задачі. Нехай функціонал F визначено на просторі $Q[0, 1]$ кусково-неперервних функцій із скінченним числом розривів першого роду. Позначимо через

$$\bar{x}_n\left(t, \bar{\xi}^n\right) \equiv \bar{x}_n(t; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = x_0(t) + \sum_{i=1}^{n} H(t-\xi_i)[\, x_i(t) - x_{i-1}(t)\,], \quad t \in [0, 1], \tag{1}$$

множину континуальних вузлів, що залежать від параметрів ξ_i, $i = \overline{1, n}$, які пробігають область

$$\Omega_{\bar{\xi}^n} = \{(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \colon 0 \le \xi_1 \le \xi_2 \le \ldots \le \xi_n \le 1\}, \tag{2}$$

де $x_i(t)$, $i = \overline{0, n}$, — фіксований елемент з $Q[0, 1]$, $H(z)$ — функція Хевісайда.

Нехай $Q_n(\bar{y}(\cdot))$ — множина інтегральних ланцюгових дробів (ІЛД) вигляду

$$Q_n(\bar{y}(\cdot)) = \Bigg\{ Q_n \colon Q_n(x(\cdot)) = K_0 + \int_0^1 \cfrac{K_1(z_1)[x(z_1) - y_0(z_1)]dz_1}{1 + \int_{z_1}^1 \cfrac{K_2(z_1, z_2)[x(z_2) - y_1(z_2)]dz_2}{1 + \cfrac{\ddots}{1 + \int\limits_{z_{n-1}}^1 K_n(z_1, z_2, \ldots, z_n)[x(z_n) - y_{n-1}(z_n)]dz_n}}}, \tag{3}$$

$$y_i \in Q[0, 1], \quad i = \overline{0, n} \Bigg\},$$

де $K_i(z_1, \ldots, z_i)$ — функції, кусково-неперервні по кожній змінній окремо на проміжку $[0, 1]$.

Задача інтерполювання полягає в наступному: знайти такий ІЛД $Q_n^I(x(\cdot)) \in \in Q_n(\bar{y}(\cdot))$, що задовольняє інтерполяційні умови

$$Q_n^I(\bar{x}_n(\cdot; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)) = F(\bar{x}_n(\cdot; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)) \quad \forall (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in \Omega_{\bar{\xi}^n}. \tag{4}$$

Зауважимо, що на відміну від функціональних поліномів інтегрального вигляду (див., наприклад, [7, 15]) в ІЛД типу (3) не можна перейти до інтегралів зі сталими границями та симетричними ядрами.

3. Розв'язок задачі інтерполювання. Будемо шукати інтерполянт $Q_n^I(x(\cdot))$ з $Q_n(\bar{y}(\cdot))$, який задовольняє умови (4), у вигляді

$$Q_n(x(\cdot)) = K_0^I + \int_0^1 \cfrac{K_1^I(z_1)[x(z_1) - x_0(z_1)]dz_1}{1 + \int_{z_1}^1 \cfrac{K_2^I(z_1, z_2)[x(z_2) - x_1(z_2)]dz_2}{1 + \cfrac{\ddots}{1 + \int\limits_{z_{n-1}}^1 K_n^I(z_1, z_2, \ldots, z_n)[x(z_n) - x_{n-1}(z_n)]dz_n}}}, \tag{5}$$

де функції $K_n^I(z_1, \ldots, z_i)$, $i = \overline{0, n}$, підлягають визначенню. Припустимо, що похідні

$$\frac{\partial^k}{\partial \xi_1 \ldots \partial \xi_k} F(\bar{x}_k(\cdot; \xi_1, \ldots, \xi_k)) \in Q\big(\Omega_{\bar{\xi}^k}\big), \qquad k = \overline{0, n},$$

тобто є кусково-неперервними функціями по кожній змінній з $\Omega_{\bar{\xi}^k}$. Долаючи суто технічні труднощі, пов'язані з громіздкими перетвореннями, можна сформулювати наступний результат: якщо ІЛД (5) є інтерполяційним (задовольняє умови (4)), то його ядра визначаються формулами

$$K_0^I = F(\bar{x}_0),$$

$$K_p^I(z_1, z_2, \ldots, z_p) = \frac{1}{x_{p-1}(z_p) - x_p(z_p)} \times$$

$$\times \frac{\partial}{\partial z_{p-1}} \left(\frac{\partial}{\partial z_{p-2}} \left(\ldots \left(\frac{\partial}{\partial z_1} F\left(\bar{x}_{p-1}(\cdot)\right) \right)^{-1} \ldots \right)^{-1} \right)^{-1} \times$$

$$\times \frac{\partial}{\partial z_p} \left(\frac{\partial}{\partial z_{p-1}} \left(\ldots \left(\frac{\partial}{\partial z_1} F\left(\bar{x}_p(\cdot)\right) \right)^{-1} \ldots \right)^{-1} \right)^{-1}, \tag{6}$$

$$x_p(z) \neq x_{p-1}(z), \quad p = 1, 2, \ldots, n.$$

Для доведення оберненого твердження можна було б скористатись пропозицією 1.9 з [16] про диференціювання функціоналів за параметром, щоб сформулювати достатні умови справедливості леми 2 з [14] (правило підстановки). Ми доведемо більш сильне твердження.

Теорема 1. *Нехай функціонал* $F\colon Q[0, 1] \to \mathbb{R}^1$ *є таким, що*

$$\frac{\partial^2}{\partial z_1 \, \partial z_2} F(x_0(\cdot) + H(\cdot - z_1)(x_1(\cdot) - x_0(\cdot)) + H(\cdot - z_2)(x(\cdot) - x_1(\cdot))) \in Q(\Omega_{\bar{z}^2})$$

$$\forall\, x_0(z), x_1(z), x(z) \in Q[0, 1].$$

Тоді для того щоб було справедливим правило підстановки

$$\left[\frac{\partial}{\partial z_1} F(x_0(\cdot) + H(\cdot - z_1)(x_1(\cdot) - x_0(\cdot)) + H(\cdot - z_2)(x(\cdot) - x_1(\cdot))) \right]_{z_2 = z_1} =$$

$$= \frac{x_1(z_1) - x_0(z_1)}{x(z_1) - x_0(z_1)} \frac{d}{dz_1} F(x_0(\cdot) + H(\cdot - z_1)(x(\cdot) - x_0(\cdot))), \tag{7}$$

$$x(z) \neq x_0(z),$$

необхідно і достатньо, щоб мало місце зображення

$$F(x(\cdot)) = F(x_0(\cdot)) - \int_0^1 \frac{x(z_1) - x_0(z_1)}{x_1(z_1) - x_0(z_1)} \frac{\partial}{\partial z_1} F(x_0(\cdot) + H(\cdot - z_1)(x_1(\cdot) - x_0(\cdot))) \, dz_1 +$$

$$+ \int_0^1 \int_{z_1}^1 \frac{x(z_1) - x_0(z_1)}{x_1(z_1) - x_0(z_1)} \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_2} F(\, x_0(\cdot) + H(\cdot - z_1)(x_1(\cdot) - x_0(\cdot)) +$$

$$+ H(\cdot - z_2)(x(\cdot) - x_1(\cdot)) \,) \, dz_2 dz_1. \tag{8}$$

Доведення. Нехай має місце правило підстановки (7). Тоді третій доданок у правій частині рівності (8) можна перетворити таким чином:

$$\int_0^1 \frac{x(z_1) - x_0(z_1)}{x_1(z_1) - x_0(z_1)} \left\{ \frac{\partial}{\partial z_1} F(x_0(\cdot) + H(\cdot - z_1)(x_1(\cdot) - x_0(\cdot))) - \right.$$

$$- \left[\frac{\partial}{\partial z_1} F(x_0(\cdot) + H(\cdot - z_1)(x_1(\cdot) - x_0(\cdot) + H(\cdot - z_2)(x(\cdot) - x_1(\cdot)))) \right]_{z_2 = z_1} \Bigg\} dz_1 =$$

$$= \int_0^1 \frac{x(z_1) - x_0(z_1)}{x_1(z_1) - x_0(z_1)} \frac{\partial}{\partial z_1} F(x_0(\cdot) + H(\cdot - z_1)(x_1(\cdot) - x_0(\cdot))) dz_1 - F(x_0(\cdot)) + F(x(\cdot)),$$

що разом з першими двома доданками дає ліву частину з (8).

Навпаки, нехай має місце зображення (8) для всіх $x_0(z), x_1(z), x(z) \in Q[0, 1]$. Візьмемо за $x(z)$ вираз

$$x(z) = x_0(z) + H(z - \xi)[x_2(z) - x_0(z)], \tag{9}$$

де ξ — довільний параметр з $[0, 1]$, $x_2(z)$ — довільна функція з $Q[0, 1]$. Підставивши (9) в обидві частини (8), отримаємо

$$F(x_0(\cdot) + H(\cdot - \xi)(x_2(\cdot) - x_0(\cdot))) - F(x_0(\cdot)) =$$

$$= -\int_\xi^1 \frac{\partial}{\partial z_1} F(x_0(\cdot) + H(\cdot - z_1)(x_2(\cdot) - x_0(\cdot))) dz_1 =$$

$$= -\int_\xi^1 \frac{x_2(z_1) - x_0(z_1)}{x_1(z_1) - x_0(z_1)} \times$$

$$\times \left[\frac{\partial}{\partial z_1} F(x_0(\cdot) + H(\cdot - z_1)(x_1(\cdot) - x_0(\cdot)) + H(\cdot - z_2)(x_2(\cdot) - x_1(\cdot))) \right]_{z_2 = z_1} dz_1$$

$$\forall \xi \in [0, 1].$$

Оскільки остання рівність має місце для всіх ξ з $[0, 1]$, звідси приходимо до правила підстановки (7). Теорему доведено.

При доведенні попередньої теореми було використано властивість функцій Хевісайда

$$\begin{gathered} H(t - \xi) H(t - z) = H(t - z) \quad \forall \xi, z, \\ 0 \le \xi \le z \le 1, \quad \forall t \in [0, 1]. \end{gathered} \tag{10}$$

Наведемо інше зображення функціонала, яке також буде визначати необхідну та достатню умову справедливості правила підстановки.

Теорема 2. *Нехай функціонал* $F: Q[0, 1] \to \mathbb{R}^1$ *задовольняє умови теореми* 1. *Тоді для того щоб було справедливим правило підстановки* (7), *необхідно і достатньо, щоб мало місце зображення*

$$F(x(\cdot)) = F(x_0(\cdot)) +$$

$$+ \int_0^1 \frac{K_1^I(z_1)[x(z_1) - x_0(z_1)] dz_1}{1 + \int_{z_1}^1 K_2^R(z_1, z_2)[x(z_2) - x_1(z_2)] dz_2}, \tag{11}$$

де $K_2^R(z_1, z_2)$ *визначається формулами* (6) *при* $n = 2$, $x_2(z) \equiv x(z)$.

Доведення. Нехай має місце правило підстановки (7). Тоді будемо мати

$$1 + \int_{z_1}^{1} K_2^R(z_1, z_2)[\,x(z_2) - x_1(z_2)\,]dz_2 =$$

$$= 1 + [\,x_1(z_1) - x_0(z_1)\,]K_1^I(z_1)\int_{z_1}^{1} \frac{\partial}{\partial z_2}\left(\frac{\partial}{\partial z_1}F(x_0(\cdot) + H(\cdot - z_1)(x_1(\cdot) - x_0(\cdot)) +\right.$$

$$\left. + H(\cdot - z_2)(x(\cdot) - x_1(\cdot))\,\right)^{-1} dz_2 =$$

$$= -[\,x_1(z_1) - x_0(z_1)\,]K_1^I(z_1)\left[\frac{\partial}{\partial z_1}F(x_0(\cdot) + H(\cdot - z_1)(x_1(\cdot) - x_0(\cdot)) +\right.$$

$$\left. + H(\cdot - z_2)(x(\cdot) - x_1(\cdot))\,\right]_{z_2 = z_1}^{-1} =$$

$$= -[\,x(z_1) - x_0(z_1)\,]K_1^I(z_1)\left[\frac{d}{dz_1}F(x_0(\cdot) + H(\cdot - z_1)(x(\cdot) - x_0(\cdot)))\right]^{-1}. \qquad (12)$$

Після підстановки останнього виразу у праву частину (11) і елементарних перетворень вона перетворюється в $F(x(\cdot))$, а це доводить справедливість зображення (11).

Навпаки, нехай має місце (11). Візьмемо за $x(z)$ вираз (9) і підставимо його в обидві частини (11). Тоді, використовуючи передостанню частину низки рівностей (12) та (10), одержуємо

$$F(x_0(\cdot) + H(\cdot - \xi)(x_2(\cdot) - x_0(\cdot))) - F(x_0(\cdot)) =$$

$$= -\int_{\xi}^{1} \frac{d}{dz}F(x_0(\cdot) + H(\cdot - z)(x_2(\cdot) - x_0(\cdot)))dz =$$

$$= -\int_{\xi}^{1} \frac{x_2(z_1) - x_0(z_1)}{x_1(z_1) - x_0(z_1)}\left[\frac{\partial}{\partial z_1}F(x_0(\cdot) + H(\cdot - z_1)(x_1(\cdot) - x_0(\cdot)) +\right.$$

$$\left. + H(\cdot - z_2)(x_2(\cdot) - x_1(\cdot))\,\right]_{z_2 = z_1} dz_1.$$

Звідси з урахуванням довільності ξ з $[0, 1]$ випливає правило підстановки (7). Теорему доведено.

Наведемо приклади, що ілюструють правило підстановки (7).

Приклади. Нехай $F(x(\cdot)) = \int_0^1 x^2(t)\,dt$. Тоді легко переконатись, що при $u \le v$

$$\frac{\partial}{\partial u}[\,F(\varphi_0(\cdot) + \varphi_1(\cdot)H(\cdot - u) + \varphi_2(\cdot)H(\cdot - v))\,]_{v=u} =$$

$$= -2\varphi_0(u)[\,\varphi_1(u) + \varphi_2(u)\,] - [\,\varphi_1(u) + \varphi_2(u)\,]^2,$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial u}F(\varphi_0(\cdot) + \varphi_1(\cdot)H(\cdot - u) + \varphi_2(\cdot)H(\cdot - v))\right]_{v=u} = -2\varphi_0(u)\varphi_1(u) - \varphi_1^2(u),$$

і правило підстановки для цього функціонала не працює. А для функціонала

$$F(x(\cdot)) = \left[\int_0^1 x(t)\,dt\right]^2,$$

як неважко переконатись, це правило є справедливим.

Розглянемо тепер функціонал

$$F(x(\cdot)) = \frac{\int_0^1 x(u)\,du}{1+\int_0^1 x(u)\,du} = 1 - \frac{1}{1+\int_0^1 x(u)\,du}.$$

Легко пересвідчитись, що для нього справедливе правило підстановки, а зображенні (11) ядра визначаються за формулами

$$K_1^I(z_1) = \left[1 + \int_0^{z_1} x_0(u)\,du + \int_{z_1}^1 x_1(u)\,du\right]^{-2},$$

$$K_2^R(z_1, z_2) = 2\frac{1 + \int_0^{z_1} x_0(u)\,du + \int_{z_1}^{z_2} x_1(u)\,du + \int_{z_2}^1 x(u)\,du}{\left[1 + \int_0^{z_1} x_0(u)\,du + \int_{z_1}^1 x_1(u)\,du\right]^2}.$$

Наведемо одну достатню умову справедливості правила підстановки.

Лема 1. *Нехай функціонал* $F:\ Q[0,1] \to \mathbb{R}^1$ *такий, що*

$$\frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_2} F\big(x_0(\cdot) + \varphi_1(\cdot)H(\cdot - z_1) + \varphi_2(\cdot)H(\cdot - z_2)\big) \in Q(\Omega_{\bar{z}^2})$$

$$\forall\ x_0(z),\ \varphi_1(z),\ \varphi_2(z) \in Q[0,1].$$

Тоді якщо

$$\varphi_1(z) \equiv \varphi_2(z),$$

то правило підстановки має місце.

Доведення. На підставі симетричності функції

$$\frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_2} F\big(x_0(\cdot) + (H(\cdot - z_1) + H(\cdot - z_2))\varphi_1(\cdot)\big)$$

маємо

$$\int_\xi^1 \int_{z_1}^1 \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_2} F\big(x_0(\cdot) + (H(\cdot - z_1) + H(\cdot - z_2))\varphi_1(\cdot)\big)\,dz_2 dz_1 =$$

$$= \frac{1}{2}\int_\xi^1 \int_\xi^1 \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_2} F\big(x_0(\cdot) + (H(\cdot - z_1) + H(\cdot - z_2))\varphi_1(\cdot)\big)\,dz_2 dz_1 \qquad \forall\ \xi \in [0, 1].$$

З останнього співвідношення одержуємо

$$\int_\xi^1 \frac{d}{dz_1} F\big(x_0(\cdot) + H(\cdot - z_1)\varphi_1(\cdot)\big)\,dz_1 -$$

$$- \int_\xi^1 \left[\frac{\partial}{\partial z_1} F\big(x_0(\cdot) + (H(\cdot - z_1) + H(\cdot - z_2))\varphi_1(\cdot)\big)\right]_{z_2 = z_1} dz_1 =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\xi}^{1} \frac{d}{dz_1} F(x_0(\cdot) + H(\cdot - z_1)\varphi_1(\cdot))\,dz_1 -$$

$$- \frac{1}{2}\int_{\xi}^{1} \frac{d}{dz_1} F(x_0(\cdot) + (H(\cdot - z_1) + H(\cdot - \xi))\varphi_1(\cdot))\,dz_1,$$

що приводить до рівності

$$\frac{1}{2}[F(x_0(\cdot)) - F(x_0(\cdot) + 2H(\cdot - \xi))\varphi_1(\cdot))] = \frac{1}{2}\int_{\xi}^{1} \frac{d}{dz_1} F(x_0(\cdot) + 2H(\cdot - z_1)\varphi_1(\cdot))\,dz_1 =$$

$$= \int_{\xi}^{1} \left[\frac{\partial}{\partial z_1} F(x_0(\cdot) + (H(\cdot - z_1) + H(\cdot - z_2))\varphi_1(\cdot))\right]_{z_2 = z_1} dz_1.$$

Оскільки параметр ξ набуває будь-яких значень із відрізка $[0, 1]$, звідси приходимо до правила підстановки.

Теорема 3. *Нехай функціонал* $F:\ Q[0,1] \to \mathbb{R}^1$ *є таким, що*

$$\Phi_{n+1}(\overline{z}^{n+1}) \equiv \frac{\partial^{n+1}}{\partial z_1 \ldots \partial z_{n+1}} F\left(x_0(\cdot) + \sum_{p=1}^{n+1} H(\cdot - z_p)\big(x_p(\cdot) - z_{p-1}(\cdot)\big)\right) \in Q(\Omega_{\overline{z}^{n+1}}),$$

і для нього має місце зображення (8). *Тоді справедлива формула*

$$F(x(\cdot)) = F(x_0(\cdot)) +$$

$$+ \int_0^1 \cfrac{K_1^I(\overline{z}^1)[x(z_1) - x_0(z_1)]\,dz_1}{1 + \int_{z_1}^1 \cfrac{K_2^I(\overline{z}^2)[x(z_2) - x_1(z_2)]\,dz_2}{1 + \cfrac{\ddots}{1 + \int_{z_{n-1}}^1 \cfrac{K_n^I(\overline{z}^n)[x(z_n) - x_{n-1}(z_n)]\,dz_n}{1 + \int_{z_n}^1 K_{n+1}^R(\overline{z}^{n+1})[x(z_{n+1}) - x_n(z_{n+1})]\,dz_{n+1}}}}}, \tag{13}$$

де $K_{n+1}^R(\overline{z}^{n+1})$ *визначається формулами* (6) *при* $p = n+1$, $x_{n+1}(z) = x(z)$.

Доведення. Розглянемо останні два поверхи в ІЛД (13):

$$1 + \int_{z_n}^{1} K_{n+1}^R(\overline{z}^{n+1})[x(z_{n+1}) - x_n(z_{n+1})]\,dz_{n+1} =$$

$$= 1 + \int_{z_n}^{1} \frac{1}{x_n(z_{n+1}) - x(z_{n+1})} \frac{\partial}{\partial z_n}\left(\frac{\partial}{\partial z_{n-1}}\left(\ldots\left(\frac{\partial}{\partial z_1} F(\overline{x}_n)\right)^{-1} \ldots\right)^{-1}\right)^{-1} \times$$

$$\times \frac{\partial}{\partial z_{n+1}}\left(\frac{\partial}{\partial z_n}\left(\ldots\left(\frac{\partial}{\partial z_1} F(x_0(\cdot) + (x_1(\cdot) - x_0(\cdot))H(\cdot - z_1) + \ldots\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\ldots + (x(\cdot) - x_n(\cdot))H(\cdot - z_{n+1}))\right)^{-1} \ldots\right)^{-1}\right)^{-1} [x(z_{n+1}) - x_n(z_{n+1})]\,dz_{n+1} =$$

$$= 1 - \frac{\partial}{\partial z_n}\left(\frac{\partial}{\partial z_{n-1}}\left(\ldots\left(\frac{\partial}{\partial z_1}F(\overline{x}_n)\right)^{-1}\ldots\right)^{-1}\right)^{-1} \times$$

$$\times \left(\frac{\partial}{\partial z_n}\left(\frac{\partial}{\partial z_{n-1}}\left(\ldots\left(\frac{\partial}{\partial z_1}F(x_0(\cdot)+(x_1(\cdot)-x_0(\cdot))\,H(\cdot-z_1)+\ldots\right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left.\ldots + \;(x(\cdot)-x_n(\cdot))\,H(\cdot-z_{n+1}))\right)^{-1}\ldots\right)^{-1}\right)^{-1}\right)^{-1}\Bigg|_{z_{n+1}=z_n}^{z_{n+1}=1} =$$

$$= \left[\frac{x_n(z_n)-x_{n-1}(z_n)}{x(z_n)-x_{n-1}(z_n)}\right]^{-1}\frac{\partial}{\partial z_n}\left(\frac{\partial}{\partial z_{n-1}}\left(\ldots\left(\frac{\partial}{\partial z_1}F(\overline{x}_n)\right)^{-1}\ldots\right)^{-1}\right)^{-1} \times$$

$$\times \left(\frac{\partial}{\partial z_n}\left(\frac{\partial}{\partial z_{n-1}}\left(\ldots\left(\frac{\partial}{\partial z_1}F(x_0(\cdot)+(x_1(\cdot)-x_0(\cdot))\,H(\cdot-z_1)+\ldots\right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left.\ldots + \;(x(\cdot)-x_{n-1}(\cdot))\,H(\cdot-z_n))\right)^{-1}\ldots\right)^{-1}\right)^{-1}\right)^{-1} = \frac{K_n^I(\overline{z}^n)}{K_n^R(\overline{z}^n)}.$$

Тут ми скористались правилом підстановки, яке має місце, оскільки виконується умова про зображення (8). Останній вираз приводить до співвідношення

$$1 + \int\limits_{z_{n-1}}^{1}\frac{K_n^I(\overline{z}^n)[x(z_n)-x_{n-1}(z_n)]\,dz_n}{1+\int_{z_n}^{1}K_{n+1}^R(\overline{z}^{n+1})[x(z_{n+1})-x_n(z_{n+1})]\,dz_{n+1}} =$$

$$= 1 + \int\limits_{z_{n-1}}^{1}K_n^R(\overline{z}^n)[x(z_n)-x_{n-1}(z_n)]\,dz_n.$$

Таким чином, $(n+1)$-поверховий ІЛД (13) ми звели до ІЛД такої самої структури, але на поверх менше. Продовжуючи аналогічні перетворення, врешті-решт приходимо до того, що права частина в (13) набирає вигляду

$$F(x_0(\cdot)) + \int\limits_0^1 K_1^R(z_1)[x(z_1)-x_0(z_1)]\,dz_1 =$$

$$= F(x_0(\cdot)) - \int\limits_0^1\frac{\partial}{\partial z_1}F(x_0(\cdot)+H(\cdot-z_1)(x(\cdot)-x_0(\cdot)))\,dz_1 = F(x(\cdot)),$$

що й потрібно було довести. Теорему доведено.

Спираючись на цю теорему, можна викласти основне твердження даної роботи.

Теорема 4. *Нехай виконуються умови теореми* 3. *Тоді для інтерполяційності ІЛД* (5) *на континуальних вузлах* (1) *необхідно і достатньо, щоб його ядра визначались формулами* (6).

Доведення. *Необхідність.* Нехай ядра ІЛД (5) визначаються формулами (6). Покажемо, що тоді він буде інтерполяційним на континуальних вузлах (1). Оскільки виконуються умови теореми 3, буде мати місце зображення (13). Підставимо в обидві частини (13) замість $x(z)$ вираз $\overline{x}_n(z, \overline{\xi}^n)$ і розглянемо ядро $K_{n+1}^R(\overline{z}^{n+1})$. Оскільки на підставі (10)

$$x_0(z) + \sum_{j=1}^{n} H(z-z_j)\big[x_j(z)-x_{j-1}(z)\big] + H(z-z_{n+1})\big[\overline{x}_n(z,\overline{\xi}^n)-x_n(z)\big] =$$

$$= x_0(z) + \sum_{j=1}^{n} H(z-z_j)\big[x_j(z)-x_{j-1}(z)\big] = \overline{x}(z,\overline{\xi}^n),$$

тобто аргумент функціонала F, що входить до визначення ядра $K_{n+1}^R(\overline{z}^{n+1})$, не залежить від z_{n+1}, то похідна $\dfrac{\partial}{\partial z_{n+1}}$ згідно з формулою (6) при $p = n+1$ буде дорівнювати нулю, а разом з нею буде дорівнювати нулю $K_{n+1}^R(\overline{z}^{n+1})$, і ми приходимо до рівності

$$F\Big(\overline{x}_n(\cdot,\overline{\xi}^n)\Big) = Q_n^I\Big(\overline{x}_n(\cdot,\overline{\xi}^n)\Big) \qquad \forall\ \overline{\xi}^n \in \Omega_{\overline{\xi}^n},$$

що й потрібно було довести.

Достатність. Нехай ІЛД (5) є інтерполяційним на континуальних вузлах (1). Покажемо, що тоді його ядра будуть визначатися формулами (6). Маємо

$$F\Big(\overline{x}_1(\cdot,\overline{\xi}^1)\Big) = K_0^I + \int_{\xi_1}^{1} K_1^I(z_1)[x_1(z_1)-x_0(z_1)]dz_1,$$

звідки одержуємо формулу для $K_1^I(\xi_1)$. Нехай ми знайшли ядра $K_1^I(\overline{z}^i)$, $i = \overline{1, p-1}$. Тоді

$$F\Big(\overline{x}_p(\cdot,\overline{\xi}^p)\Big) = Q_n^I\Big(\overline{x}_p(\cdot,\overline{\xi}^p)\Big) =$$

$$= K_0^I + \int_{\xi_1}^{1} \cfrac{K_1^I(z_1)\big[\overline{x}_p(z_1,\overline{\xi}^p)-x_0(z_1)\big]dz_1}{1+\int_{\xi_2}^{1} \cfrac{K_2^I(\overline{z}^2)\big[\overline{x}_p(z_2,\overline{\xi}^p)-x_1(z_2)\big]dz_2}{1+ \cfrac{\ddots}{1+\int_{\xi_p}^{1} K_p^I(\overline{z}^p)\big[\overline{x}_p(z_p,\overline{\xi}^p)-x_{p-1}(z_p)\big]dz_p}}} =$$

$$= K_0^I + \int_{\xi_1}^{\xi_2} \cfrac{K_1^I(z_1)[x_1(z_1)-x_0(z_1)]dz_1}{1+\int_{\xi_2}^{\xi_3} \cfrac{K_2^I(\overline{z}^2)[x_2(z_2)-x_1(z_2)]dz_2}{1+ \cfrac{\ddots}{1+\int_{\xi_p}^{1} K_p^I(\overline{z}^p)\big[x_p(z_p)-x_{p-1}(z_p)\big]dz_p}} + \ldots} + \ldots, \quad (14)$$

де на кожному поверсі три крапки означають доданок, що не залежить від ξ_i. З (14) елементарними перетвореннями одержуємо формули (6). Теорему доведено.

З теореми 4 випливає такий наслідок.

Наслідок. *За умов теореми 3 у класі ІЛД вигляду* (3) *ІІЛД* (5), (6) *єдиний.*

1. *Prenter P. M.* Lagrange and Hermite interpolation in Banach spaces // Approxim. Theory. – 1971. – **4**, № 4. – P. 419 – 432.
2. *Porter W. A.* Data interpolation, causality structure and system identification // Inform. and Contr. – 1975. – **29**. – P. 217 – 233.
3. *Соболевский П. И.* Интерполяция функционалов и некоторые приближенные формулы для интегралов по гауссовой мере // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1975. – № 2. – С. 5 – 12.
4. *Янович Л. А.* Приближенные вычисления континуальных интегралов по гауссовым мерам. – Минск: Наука и техника, 1976. – 384 с.
5. *Porter W. A.* Synthesis of polynomic system // SIAM J. Math. Anal. – 1980. – **11**, № 2. – P. 308 – 315.
6. *Макаров В. Л., Хлобыстов В. В.* Основы теории полиномиального операторного интерполирования. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1998. – 278 с.
7. *Макаров В. Л., Хлобыстов В. В., Янович Л. А.* Интерполирование операторов. – Киев: Наук. думка, 2000. – 406 с.
8. *Макаров В. Л., Хлобыстов В. В.* Интерполяционная формула типа Ньютона для нелинейных функционалов // Докл. АН СССР. – 1989. – **307**, № 3. – С. 534 – 537.
9. *Кучминская Х. Й.* Приближенные вычисления функций двух переменных цепными дробями с полиномиальными компонентами // Мат. сб. – Киев: Наук. думка, 1976. – С. 31 – 34.
10. *Кучминская Х. Й.* Аппроксимация и интерполяция функций цепными и ветвящимися цепными дробями: Дис. … канд. физ.-мат. наук. – Львов, 1976. – 125 с.
11. *Скоробогатько В. Я.* Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике. – М.: Наука, 1983. – 312 с.
12. *Сявавко М. С.* Інтегральні ланцюгові дроби. – Київ: Наук. думка, 1994. – 205 с.
13. *Михальчук Р. И.* Континуальный аналог цепных дробей: Автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук. – Донецк, 1986. – 16 с.
14. *Михальчук Б. Р.* Інтерполяція нелінійних функціоналів за допомогою інтегральних ланцюгових дробів // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 3. – С. 364 – 375.
15. *Пупков К. И., Капалин В. И., Ющенко А. С.* Функциональние ряды в теории нелинейных систем. – М.: Наука, 1976. – 448 с.
16. *Авербух В. И., Смолянов О. Г.* Теория дифференцирования в линейных топологических пространствах // Успехи мат. наук. – 1967. – **22**, № 6. – С. 201 – 260.

Одержано 03.06.2002