УДК 517.9

А. М. Самойленко (Ін-т математики НАН України, Київ),
Р. І. Петришин, Л. М. Лакуста (Чернівец. нац. ун-т)

ОЦІНКИ ПОХИБКИ МЕТОДУ УСЕРЕДНЕННЯ ДЛЯ ІМПУЛЬСНИХ КОЛИВНИХ СИСТЕМ

We prove new theorems on the justification of averaging method on a segment and semiaxis in multifrequency oscillating systems under impulse action at fixed times.

Доведено нові теореми про обґрунтування методу усереднення на відрізку і півосі в багаточастотних коливних системах, які підлягають імпульсній дії у фіксовані моменти часу.

Розглядається нелінійна коливна система звичайних диференціальних рівнянь з імпульсною дією у фіксовані моменти часу вигляду

$$\frac{dx}{d\tau} = a(x, \varphi, \tau), \quad \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(x, \tau)}{\varepsilon} + b(x, \varphi, \tau), \quad \tau \neq \tau_j^{(k)},$$
$$\Delta x\,|_{\tau=\tau_j^{(k)}} = \varepsilon f^{(k)}\left(x, \varphi, \tau_j^{(k)}\right), \quad \Delta\varphi\,|_{\tau=\tau_j^{(k)}} = \varepsilon g_j^{(k)}(x, \varphi), \tag{1}$$

де $x \in D \subset R^n$, $\varphi \in R^m$, $\tau = \varepsilon t \in J$, $(0, \varepsilon_0] \ni \varepsilon$ — малий параметр, $0 < \tau_1^{(1)} < < \tau_1^{(2)} < \ldots < \tau_1^{(p)} \leq 2\pi\varepsilon$, $\tau_{j+1}^{(k)} - \tau_j^{(k)} = 2\pi\varepsilon$ для всіх $j \geq 1$ і $k = \overline{1, p}$, D — відкрита обмежена область, $J = [0, L]$ або $J = [0, \infty)$, L — додатна стала. Вважатимемо, що функції $a, b, \omega, \dfrac{\partial\omega}{\partial x}, \dfrac{\partial\omega}{\partial\tau}, f^{(k)}, g_j^{(k)}$ неперервні в $G = D \times R^m \times J$ і обмежені числом σ_1, а $a, b, f^{(k)}$ задовольняють в G умову Ліпшиця по x, φ зі сталою σ_1. Нехай a, $f^{(k)}$, $k = \overline{1, p}$, майже періодичні за кожною із компонент φ_l, $l = \overline{1, m}$, вектора φ, причому

$$a(x, \varphi, \tau) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(x, \tau) e^{i\left(\lambda_\nu^{(0)}, \varphi\right)}, \quad f^{(k)}(x, \varphi, \tau) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu^{(k)}(x, \tau) e^{i\left(\lambda_\nu^{(k)}, \varphi\right)}. \tag{2}$$

Тут i — уявна одиниця, $\lambda_0^{(l)} = 0$ і $\lambda_\nu^{(l)} \neq 0$ при $\nu \geq 1$ і $l = \overline{0, p}$, $\left(\lambda_\nu^{(l)}, \varphi\right)$ — скалярний добуток в R^m.

Запишемо усереднену по φ систему рівнянь для повільних змінних

$$\frac{d\bar{x}}{d\tau} = \bar{a}(\bar{x}, \tau) + \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{p} \bar{f}^{(k)}(\bar{x}, \tau), \tag{3}$$

де

$$\left(\bar{a}(\bar{x}, \tau);\ \bar{f}^{(k)}(\bar{x}, \tau)\right) = \lim_{T\to\infty} T^{-m} \int_0^T \ldots \int_0^T \left(a(\bar{x}, \varphi, \tau);\ f^{(k)}(x, \varphi, \tau)\right) d\varphi_1 \ldots d\varphi_m =$$
$$= \left(a_0(\bar{x}, \tau);\ f_0^{(k)}(\bar{x}, \tau)\right).$$

Нехай $\bar{x}(\tau)$ — розв'язок системи (3), який визначений і лежить в D для всіх $\tau \in J$, а $(x(\tau, \varepsilon); \varphi(\tau, \varepsilon))$ — той розв'язок системи (1), для якого $x(0, \varepsilon) = = \bar{x}(0)$, $\varphi(0, \varepsilon)$ — довільне. Ставиться задача: знайти достатні умови для встановлення ефективної оцінки $\|x(\tau, \varepsilon) - \bar{x}(\tau)\|$ на часовому відрізку $[0, L]$ чи півосі $[0, \infty)$. Зазначимо, що такий підхід до побудови гладких усереднених рівнянь для систем стандартного вигляду запропонував А. М. Самойленко [1] і в роботах [2, 3] цей підхід було поширено на коливні системи з гладкими частотами $\omega(\tau)$. У розглядуваному випадку частоти ω в системі (1) залежать і від x, тобто є розривними. Для багаточастотних систем з $\omega = \omega(x, \tau)$ без імпульсної дії основні проблеми, які виникають при обґрунтуванні методу усереднення і його застосуваннях, досліджено в монографіях [4 – 6], а в статтях [7, 8] вивчено застосування методу усереднення до розв'язання крайових задач для спеціального вигляду системи (1).

Позначимо через $P^{(0)}$ і $P^{(k)}$, $k = \overline{1, p}$, відповідно множину тих m-вимірних векторів $\lambda_\nu^{(0)}$ і $\lambda_\nu^{(k)}, \nu \geq 1$, для яких $a_\nu(\bar{x}(\tau), \tau)$ і $f_\nu^{(k)}(\bar{x}(\tau), \tau)$ не є тотожними нулями на J. Нехай спочатку $J = [0, L]$ і

$$A_k(x, \varphi, \tau, \lambda) = (\lambda, \omega(x, \tau))^2 + (\lambda, u(x, \varphi, \tau))\left(\lambda, u^{(k)}(x, \varphi, \tau)\right),$$

$$B_k(x, y, \varphi, \tau, \lambda, s) = ((\lambda, \omega(x, \tau)) - s)^2 + \frac{1}{\|\lambda\|^2}(\lambda, u(y, \varphi, \tau))\left(\lambda, u^{(k)}(y, \varphi, \tau)\right),$$

$$u(x, \varphi, \tau) = \frac{\partial \omega(x, \tau)}{\partial \tau} + \frac{\partial \omega(x, \tau)}{\partial x} a(x, \varphi, \tau), \qquad u^{(k)}(x, \varphi, \tau) = \frac{\partial \omega(x, \tau)}{\partial x} f^{(k)}(x, \varphi, \tau),$$

$$D_\rho = \left\{x \in R^n : \|x - \bar{x}(\tau)\| < \rho \quad \forall\, \tau \in [0, L]\right\},$$

$$\Omega_\lambda(\tau, \varepsilon) = \exp\left\{\frac{i}{\varepsilon}\int_0^\tau \omega(x(t, \varepsilon), t)\, dt\right\},$$

де $x, y \in D$, $\tau \in [0, L]$, $\varphi \in R^m$, $0 \neq \lambda$ — m-вимірний вектор, $s \in Z$, Z — множина всіх цілих чисел, ρ — додатне число, $k = \overline{1, p}$. При зроблених вище припущеннях існує таке $\rho_0 > 0$, що $\overline{D}_{\rho_0} \subset D$.

Припустимо, що виконується нерівність

$$A_k(\bar{x}(\tau), \varphi, \tau, \lambda) \geq \sigma_0^2 \|\lambda\|, \quad \varphi \in R^m, \quad \tau \in [0, L], \quad \lambda \in P^{(0)}, \quad k = \overline{1, p}, \tag{4}$$

з деякою сталою $\sigma_0 > 0$.

Оскільки функції $\dfrac{\partial \omega}{\partial \tau}$ і $\dfrac{\partial \omega}{\partial x}$ рівномірно неперервні на множині $\overline{D}_{\rho_0} \times [0, L] \equiv$ $\equiv K_{\rho_0}$, для кожного $\rho_1 > 0$ існує таке $\alpha(\rho_1) > 0$, що для всіх $(x, \tau) \in K_{\rho_0}$, $(x + y, \tau) \in K_{\rho_0}$ маємо

$$\left\|\frac{\partial \omega(x + y, \tau)}{\partial \tau} - \frac{\partial \omega(x, \tau)}{\partial x}\right\| < \alpha(\rho_1), \qquad \left\|\frac{\partial \omega(x + y, \tau)}{\partial x} - \frac{\partial \omega(x, \tau)}{\partial x}\right\| < \alpha(\rho_1)$$

при $\|y\| < \rho_1$, де $\alpha(\rho_1) \to 0$ при $\rho_1 \to 0$.

Виберемо додатне $\rho_1 < \rho_0$ із умови

$$\sigma_1(1 + \sigma_1)(2\sigma_1 + \alpha(\rho_1) + \rho_1)(\alpha(\rho_1) + \rho_1) \leq \frac{1}{2}\sigma_0^2.$$

Цього досить, щоб виконувалась нерівність

$$A_k(x, \varphi, \tau, \lambda) \geq \frac{1}{2}\sigma_0^2 \|\lambda\| \quad \forall\, (x, \varphi, \tau, \lambda) \in K_{\rho_1} \times R^m \times P^{(0)}, \quad k = \overline{1, p}. \tag{5}$$

Лема 1. *Якщо справджується нерівність* (4) *і* $x(\tau, \varepsilon) \in D_{\rho_2}$ $\forall\, (\tau, \varepsilon) \in [0, L] \times$ $\times\, (0, \varepsilon_0]$ *при деякому* $\rho_2 < \rho_1$, *то можна вказати такі сталі* $\varepsilon_1 > 0$ *і* $\sigma_2 > 0$, *що для кожної неперервно диференційовної на* $[0, L]$, *за винятком точок* $\tau_j^{(k)}$, *матриці* $M(\tau, \varepsilon)$,

$$\Delta M(\tau, \varepsilon)\big|_{\tau=\tau_j^{(k)}} = N_j^{(k)}(\varepsilon), \qquad \sup_{\substack{[0, L]\\ \tau\neq\tau_j^{(k)}}} \left\| \frac{d}{d\tau} M(\tau, \varepsilon) \right\| < \infty,$$

і всіх $\lambda \in P^{(0)}$, $\tau \in [0, L]$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 \le \varepsilon_1$, *осциляційний інтеграл*

$$J_\lambda(\tau, \varepsilon) = \int_0^\tau M(t, \varepsilon)\Omega_\lambda(t, \varepsilon)\, dt$$

задовольняє нерівність

$$\|J_\lambda(\tau, \varepsilon)\| \le$$

$$\le \sigma_2\sqrt{\varepsilon}\left[\left(1 + \frac{1}{\|\lambda\|}\right)\sup_{[0, L]}\|M(\tau, \varepsilon)\| + \frac{1}{\|\lambda\|}\left(\sup_{\substack{[0, L]\\ \tau\neq\tau_j^{(k)}}}\left\|\frac{d}{d\tau}M(\tau, \varepsilon)\right\| + \sum_{0<\tau_j^{(k)}<L}\left\|N_j^{(k)}(\varepsilon)\right\|\right)\right]. \tag{6}$$

Доведення. З нерівності (4) випливає, що в кожній точці $t^* \in [0, \tau]$ виконується хоча б одна з двох нерівностей

$$\left|z_\lambda(t^*, \varepsilon)\right| \ge \frac{1}{2}\sigma_0\|\lambda\|, \tag{7}$$

$$\left(\lambda, u\left(x(t^*, \varepsilon), \varphi(t^*, \varepsilon), t^*\right)\right)\left(\lambda, u^{(k)}\left(x(t^*, \varepsilon), \varphi(t^*, \varepsilon), t^*\right)\right) \ge \frac{1}{4}\sigma_0^2\|\lambda\|^2, \tag{8}$$

де $z_\lambda(\tau, \varepsilon) = (\lambda, \omega(x(\tau, \varepsilon), \tau))$. Якщо виконується (7), то на підставі зроблених для системи (1) припущень існує таке $\delta_1 > 0$, не залежне від ε і λ, що

$$\left|z_\lambda(\tau, \varepsilon)\right| \ge \frac{1}{4}\sigma_0\|\lambda\| \quad \forall\, \tau \in \left[t^*, t^* + \delta_1\right] \equiv T_1. \tag{9}$$

Подамо T_1 у вигляді

$$T_1 = \left[t^*, \tau_{j_0}^{(1)}\right] \cup \left[\tau_{j_0}^{(1)}, \tau_{j_0+s_0}^{(p)}\right] \cup \left[\tau_{j_0+s_0}^{(p)}, t^* + \delta_1\right],$$

де $0 \le \tau_{j_0}^{(1)} - t^* \le 2\pi\varepsilon$, $0 \le t^* + \delta_1 - \tau_{j_0+s_0}^{(p)} \le 2\pi\varepsilon$, причому $\tau_{j_0-1}^{(1)} < t^*$, $\tau_{j_0+s_0+1}^{(p)} > > t^* + \delta_1$.

Розкладемо інтеграл по відрізку T_1 від функції

$$F_\lambda(\tau, \varepsilon) = M(\tau, \varepsilon)\Omega_\lambda(\tau, \varepsilon)$$

на суму інтегралів по складових відрізках

$$\left[t^*, \tau_{j_0}^{(1)}\right], \left[\tau_{j_0}^{(1)}, \tau_{j_0}^{(2)}\right], \ldots, \left[\tau_{j_0}^{(p-1)}, \tau_{j_0}^{(p)}\right], \left[\tau_{j_0}^{(p)}, \tau_{j_0+1}^{(1)}\right], \ldots$$
$$\ldots, \left[\tau_{j_0+s_0}^{(p-1)}, \tau_{j_0+s_0}^{(p)}\right], \left[\tau_{j_0+s_0}^{(p)}, t^* + \delta_1\right]. \tag{10}$$

Використовуючи формулу інтегрування частинами на складовому відрізку $\left[\tau_j^{(k)}, \tau_j^{(k+1)}\right]$ множини T_1, отримуємо

$$\int_{\tau_j^{(k)}}^{\tau_j^{(k+1)}} F_\lambda(\tau, \varepsilon)\, d\tau =$$

$$= \frac{\varepsilon}{i}\left[\frac{F_\lambda\left(\tau_j^{(k+1)} - 0, \varepsilon\right)}{z_\lambda\left(\tau_j^{(k+1)} - 0, \varepsilon\right)} - \frac{F_\lambda\left(\tau_j^{(k)} + 0, \varepsilon\right)}{z_\lambda\left(\tau_j^{(k)} + 0, \varepsilon\right)} - \int_{\tau_j^{(k)}}^{\tau_j^{(k+1)}} \Omega_\lambda(\tau, \varepsilon)\frac{d}{d\tau}\left(\frac{F_\lambda(\tau, \varepsilon)}{z_\lambda(\tau, \varepsilon)}\right)d\tau\right]. \tag{11}$$

Останній доданок у квадратних дужках у правій частині рівності (11) на підставі умови (9) і обмеження $\tau_j^{(k+1)} - \tau_j^{(k)} \le 2\pi\varepsilon$ оцінюємо зверху величиною

$$\frac{8\pi}{\sigma_0}\left[\frac{4}{\sigma_0}\sigma_1(1+\sigma_1)q_1 + q_2\right]\frac{\varepsilon}{\|\lambda\|},$$

де

$$q_1 = \sup_{[0,\,L]}\|M(\tau,\varepsilon)\|, \qquad q_2 = \sup_{\substack{[0,\,L]\\ \tau\ne\tau_j^k}}\left\|\frac{d}{d\tau}M(\tau,\varepsilon)\right\|.$$

Зазначимо також, що

$$\left\|\frac{F_\lambda\left(\tau_j^{(k)}+0\right)}{z_\lambda\left(\tau_j^{(k)}+0\right)} - \frac{F_\lambda\left(\tau_j^{(k)}-0\right)}{z_\lambda\left(\tau_j^{(k)}-0\right)}\right\| \le \frac{4\left\|N_j^{(k)}(\varepsilon)\right\|}{\sigma_0\|\lambda\|} + \frac{16\sigma_1^2\varepsilon}{\sigma_0^2\|\lambda\|}q_1. \tag{12}$$

Оскільки довжини першого і останнього відрізків із набору (10) не перевищують $2\pi\varepsilon$, наведені вище міркування дозволяють отримати оцінку вигляду

$$\left\|\int\limits_{t^*}^{t^*+\delta_1} F_\lambda(\tau,\varepsilon)\,d\tau\right\| \le \sigma_3\frac{\varepsilon}{\|\lambda\|}(q_1+q_2+q_3), \tag{13}$$

де

$$q_3 = \sum_{0<\tau_j^{(k)}<L}\left\|N_j^{(k)}(\varepsilon)\right\|.$$

Нехай тепер $\left|z_\lambda(t^*,\varepsilon)\right| < \frac{1}{2}\sigma_0\|\lambda\|$. Тоді існує таке не залежне від ε і λ $\delta_2 > 0$, що $\left|z_\lambda(\tau,\varepsilon)\right| < \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_0\|\lambda\|$ при $\tau\in\left[t^*, t^*+\delta_2\right] = T_2$, у зв'язку з чим з нерівності (5) дістаємо

$$(\lambda, u(x,\varphi,\tau))\left(\lambda, u^{(k)}(x,\varphi,\tau)\right) \ge \frac{1}{6}\sigma_0^2\|\lambda\|^2, \quad \tau\in T_2,$$

де $x = x(\tau,\varepsilon)$, $\varphi = \varphi(\tau,\varepsilon)$. Оскільки $u(x,\varphi,\tau)$ і $u^{(k)}(x,\varphi,\tau)$ обмежені в G, існує така стала $\tilde\sigma_0$, не залежна від λ і ε, що для $\tau\in T_2$ виконуються нерівності

$$|(\lambda, u(x,\varphi,\tau))| \ge \tilde\sigma_0\|\lambda\|, \qquad \left|\left(\lambda, u^{(k)}(x,\varphi,\tau)\right)\right| \ge \tilde\sigma_0\|\lambda\|, \quad k=\overline{1,p}.$$

Враховуючи, що Δx і $\Delta\varphi$ в точках $\tau_j^{(k)}$ пропорційні ε, а $\frac{\partial\omega}{\partial\tau}$ і $\frac{\partial\omega}{\partial x}$ рівномірно неперервні на множині K_{ρ_0}, за рахунок малості ε_0 можна стверджувати, що розривні функції $(\lambda, u(x,\varphi,\tau))$ і $\left(\lambda, u^{(k)}(x,\varphi,\tau)\right)$, в яких $x = x(\tau,\varepsilon)$, $\varphi = \varphi(\tau,\varepsilon)$, на змінюють знак на всьому відрізку T_2 при $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$. Нехай, наприклад,

$$(\lambda, u(x,\varphi,\tau)) \ge \tilde\sigma_0\|\lambda\|, \quad \tau\in T_2, \tag{14}$$

$$\left(\lambda, u^{(k)}(x,\varphi,\tau)\right) \ge \tilde\sigma_0\|\lambda\|, \qquad \tau\in T_2, \quad k=\overline{1,p}. \tag{15}$$

З (14) випливає, що функція $z_\lambda(\tau, \varepsilon) = (\lambda, \omega(x(\tau, \varepsilon), \tau))$ зростає на півінтервалах $\left(\tau_j^{(k)}, \tau_j^{(k+1)}\right]$ чи $\left(\tau_j^{(p)}, \tau_{j+1}^{(1)}\right]$ її неперервності, а в точках розриву маємо

$$z_\lambda\left(\tau_j^{(k)}+0, \varepsilon\right) = \left(\lambda, \omega\left(x\left(\tau_j^{(k)}, \varepsilon\right) + \varepsilon f^{(k)}\left(x\left(\tau_j^{(k)}, \varepsilon\right), \varphi\left(\tau_j^{(k)}, \varepsilon\right), \tau_j^{(k)}\right), \tau_j^{(k)}\right)\right) =$$
$$= z_\lambda\left(\tau_j^{(k)}, \varepsilon\right) + \varepsilon\left(\lambda, u^{(k)}(x, \varphi, \tau)\right)\Big|_{\tau=\tau_j^{(k)}} + R_\lambda. \tag{16}$$

На підставі рівномірної неперервності функції $\dfrac{\partial\omega}{\partial x}$ на множині K_{ρ_0} запишемо зображення

$$\omega(x+y, \tau) = \omega(x, \tau) + \frac{\partial\omega(x, \tau)}{\partial x} y + \tilde{R},$$

в якому

$$\tilde{R} = \int_0^1 \left[\frac{\partial\omega(x+ty, \tau)}{\partial x} - \frac{\partial\omega(x, \tau)}{\partial x}\right] dty$$

і $\left\|\tilde{R}\right\| \le \dfrac{1}{2}\tilde{\sigma}_0$ при $\|y\| \le \rho_3 < \rho_0 - \rho_1$, де ρ_3 залежить від $\tilde{\sigma}_0$. У розглядуваному випадку при

$$\varepsilon_0 \sup_G \left\| f^{(k)}(x, \varphi, \tau)\right\| \le \varepsilon_0 \sigma_1 \le \rho_3$$

дістанемо $\|R_\lambda\| \le \|\lambda\| \varepsilon \dfrac{\tilde{\sigma}_0 \|y\|}{2}$, тому з урахуванням співвідношень (14) і (15) із (16) виводимо нерівність

$$z_\lambda\left(\tau_j^{(k)}+0, \varepsilon\right) \ge z_\lambda\left(\tau_j^{(k)}, \varepsilon\right) + \frac{1}{2}\tilde{\sigma}_0 \varepsilon \|\lambda\|. \tag{17}$$

Отже, $z_\lambda(\tau, \varepsilon)$ як функція τ зростає на всій множині T_2. У зв'язку з цим на T_2 можна виділити відрізок $[\alpha_1, \beta_1]$ довжини $2\mu < \delta_2$ такий, що

$$z_\lambda(\tau, \varepsilon) \ge \tilde{\sigma}_0 \|\lambda\| \mu, \quad \tau \in \left[\beta_1, t^* + \delta_2\right] = T_3, \tag{18}$$

$$z_\lambda(\tau, \varepsilon) \le -\tilde{\sigma}_0 \|\lambda\| \mu, \quad \tau \in \left[t^*, \alpha_1\right] = T_4. \tag{19}$$

Якщо $\alpha_1 = t^*$, то маємо лише нерівність (18), а при $\beta_1 = t^* + \delta_2$ — (19).

Запишемо розклад інтеграла

$$\int_{t^*}^{t^*+\delta_2} F_\lambda(\tau, \varepsilon) d\tau = \int_{t^*}^{\alpha_1} F_\lambda(\tau, \varepsilon) d\tau + \int_{\alpha_1}^{\beta_1} F_\lambda(\tau, \varepsilon) d\tau + \int_{\beta_1}^{t^*+\delta_2} F_\lambda(\tau, \varepsilon) d\tau.$$

Інтеграл по відрізку $[\alpha_1, \beta_1]$ оцінюється величиною

$$2\mu \sup_{[0, L]} \|M(\tau, \varepsilon)\|.$$

Нехай виконується умова (18). Всі точки імпульсної дії розбивають T_3 на складові відрізки. Для кожного такого відрізка $\left[\tau_j^{(k)}, \tau_j^{(k+1)}\right]$ запишемо рівність (11). Останній доданок у квадратних дужках у правій частині (11) на підставі (14) і (18) можна оцінити величиною

$$\frac{2\pi\varepsilon}{\tilde{\sigma}_0 \mu} q_2 + \frac{2\pi\sigma_1(1+\sigma_1)\varepsilon\|\lambda\|}{z_\lambda^2\left(\tau_j^{(k)}+0, \varepsilon\right)} q_1,$$

а нерівність (12) при умовах (14) і (18) набере вигляду

$$\left\| \frac{F_\lambda\left(\tau_j^{(k)}+0,\varepsilon\right)}{z_\lambda\left(\tau_j^{(k)}+0,\varepsilon\right)} - \frac{F_\lambda\left(\tau_j^{(k)}-0,\varepsilon\right)}{z_\lambda\left(\tau_j^{(k)}-0,\varepsilon\right)} \right\| \le \frac{\left\|N_j^{(k)}(\varepsilon)\right\|}{\tilde\sigma_0\|\lambda\|\mu} + \frac{\varepsilon\|\lambda\|\sigma_1}{z_\lambda^2\left(\tau_j^{(k)}-0,\varepsilon\right)}q_1.$$

Оскільки $z_\lambda^2\left(\tau_j^{(k)}-0,\varepsilon\right) \le z_\lambda^2\left(\tau_j^{(k)}+0,\varepsilon\right)$ при $\tau_j^{(k)} \in T_3$, то

$$\left\| \int_{\beta_1}^{t^*+\delta_2} F_\lambda(\tau,\varepsilon)\,d\tau \right\| \le \frac{\sigma_2}{\|\lambda\|}\left(\frac{\varepsilon}{\mu}q_3 + \|\lambda\|^2\varepsilon^2 q_1 \sum_{\beta_1\le\tau_j^{(k)}<t^*+\delta_2} z^{-2}\left(\tau_j^{(k)}-0,\varepsilon\right) + \frac{\varepsilon}{\mu}q_2\right).$$

На підставі нерівностей (14) і (17) маємо

$$z_\lambda\left(\tau_j^{(k+1)}-0,\varepsilon\right) \ge z_\lambda\left(\tau_j^{(k)}-0,\varepsilon\right) + \frac{1}{2}\tilde\sigma_0\varepsilon\|\lambda\|,$$

тому, враховуючи (18), отримуємо нерівності

$$\sum_{\beta_1\le\tau_j^{(k)}<t^*+\delta_2} z^{-2}\left(\tau_j^{(k)}-0,\varepsilon\right) \le \sum_{l=0}^{\infty}\left(\tilde\sigma_0\mu\|\lambda\| + \frac{1}{2}\tilde\sigma_0\varepsilon\|\lambda\| l\right)^{-2} \le$$

$$\le 2\left(\tilde\sigma_0\|\lambda\|\right)^{-2}\left(\frac{1}{\varepsilon\mu} + \frac{1}{\mu^2}\right).$$

Отже,

$$\left\| \int_{\beta_1}^{t^*+\delta_2} F_\lambda(\tau,\varepsilon)\,d\tau \right\| \le \frac{\tilde\sigma_4\varepsilon}{\mu\|\lambda\|}\left[q_3 + \left(1+\frac{\varepsilon}{\mu}\right)q_1 + q_2\right].$$

Легко перевірити, що таку ж нерівність задовольняє інтеграл від $F_\lambda(\tau,\varepsilon)$ по відрізку T_4. Таким чином,

$$\left\| \int_{t^*}^{t^*+\delta_2} F_\lambda(\tau,\varepsilon)\,d\tau \right\| \le \sigma_5\left[\left(\mu + \frac{\varepsilon}{\mu\|\lambda\|} + \frac{\varepsilon^2}{\mu^2}\right)q_1 + \frac{\varepsilon}{\mu\|\lambda\|}(q_2+q_3)\right]. \tag{20}$$

Якщо функції $(\lambda, u(x,\varphi,\tau))$ і $\left(\lambda, u^{(k)}(x,\varphi,\tau)\right)$, в яких $x = x(\tau,\varepsilon)$, $\varphi = \varphi(\tau,\varepsilon)$, від'ємні на T_2, то вигляд оцінки (20) не зміниться.

Позначимо $\delta = \min\{\delta_1;\delta_2\}$ і подамо $J_\lambda(\tau,\varepsilon)$ у вигляді

$$J_\lambda(\tau,\varepsilon) = \sum_{l=0}^{l_0}\int_{l\delta}^{(l+1)\delta} F_\lambda(\tau,\varepsilon)\,d\tau + \int_{(l_0+1)\delta}^{\tau} F_\lambda(\tau,\varepsilon)\,d\tau,$$

де $0 \le \tau - \delta(l_0+1) < \delta$.

Покладаючи відповідно $t^* = l\delta$, $l = \overline{0, l_0+1}$, і використовуючи нерівності (13) або (20) при $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ і $\mu = \sqrt{\varepsilon}$, одержуємо оцінку (6). Лему доведено.

***Зауваження* 1.** Якщо $M(\tau,\varepsilon) \equiv M(\varepsilon)$ і не залежить від τ, то оцінку (6) можна покращити відносно порядку по $\|\lambda\|$. Справді, аналіз нерівностей (13) і (20) показує, що найкращий порядок оцінки по $\|\lambda\|$ буде в тому випадку, коли покласти $\mu = \sqrt{\varepsilon}$ при $\|\lambda\| \le 1$ і $\mu = \sqrt{\varepsilon}\|\lambda\|^{-\frac{1}{3}}$ при $\|\lambda\| > 1$. Тоді дістанемо

$$\|J_\lambda(\tau,\varepsilon)\| \le \tilde\sigma_3\sqrt{\varepsilon}\left(\|\lambda\|^{-1} + \|\lambda\|^{-\frac{1}{3}}\right)\|M(\varepsilon)\|. \tag{21}$$

Розглянемо випадок двочастотної $(m = 2)$ системи (1). Зазначимо, що для гладкої системи при відсутності імпульсної дії оцінку (6) осциляційного інтеграла можна отримати на підставі умови В. І. Арнольда [4]

$$\inf_{(x,\varphi,\tau)\in G}\left|\omega_1\frac{d\omega_2}{d\tau}-\omega_2\frac{d\omega_1}{d\tau}\right| > 0.$$

На відміну від (4) ця умова не виражається через λ. Аналогічний результат можна встановити і для імпульсної двочастотної системи. Позначимо

$$F_{1k} = \omega_1 + \frac{d\omega_1}{d\tau}\frac{d\omega_1^{(k)}}{d\tau},$$

$$F_{2k} = \begin{vmatrix}\omega_1 & \omega_2\\ \dfrac{d\omega_1}{d\tau} & \dfrac{d\omega_2}{d\tau}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\omega_1 & \omega_2\\ \dfrac{d\omega_1^{(k)}}{d\tau} & \dfrac{d\omega_2^{(k)}}{d\tau}\end{vmatrix} - \left(\frac{1}{2}\begin{vmatrix}\dfrac{d\omega_1}{d\tau} & \dfrac{d\omega_2}{d\tau}\\ \dfrac{d\omega_1^{(k)}}{d\tau} & \dfrac{d\omega_2^{(k)}}{d\tau}\end{vmatrix}\right)^2,$$

де

$$\omega_s = \omega_s(x,\tau), \qquad \frac{d\omega_s}{d\tau} = \frac{\partial\omega_s(x,\tau)}{\partial\tau} + \frac{\partial\omega_s(x,\tau)}{\partial x}a(x,\varphi,\tau),$$

$$\frac{d\omega_s^{(k)}}{d\tau} = \frac{\partial\omega_s(x,\tau)}{\partial x}f^{(k)}(x,\varphi,\tau), \qquad s = 1,2, \quad k = \overline{1,p}.$$

Лема 2. *Якщо*

$$\inf_{(x,\varphi,\tau)\in G} F_{1k} > 0, \qquad \inf_{(x,\varphi,\tau)\in G} F_{2k} > 0, \quad k = \overline{1,p},$$

то осциляційний інтеграл $J_\lambda(\tau,\varepsilon)$ *справджує оцінку* (6) *для всіх* $\lambda \neq 0$.

Доведення. Розглянемо квадратичну форму

$$A_k(x,\varphi,\tau,\xi) = (\xi_1\omega_1+\xi_2\omega_2)^2 + \left(\xi_1\frac{d\omega_1}{d\tau}+\xi_2\frac{d\omega_2}{d\tau}\right)\left(\xi_1\frac{d\omega_1^{(k)}}{d\tau}+\xi_2\frac{d\omega_2^{(k)}}{d\tau}\right)$$

змінних $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, $\|\xi\| = 1$. Після очевидних перетворень одержимо рівність

$$A_k(x,\varphi,\tau,\xi) = F_{1k}\left[\left(\xi_1 + \frac{2\omega_1\omega_2 + \dfrac{d\omega_1}{d\tau}\dfrac{d\omega_2^{(k)}}{d\tau} + \dfrac{d\omega_2}{d\tau}\dfrac{d\omega_1^{(k)}}{d\tau}}{2F_{1k}}\xi_2\right)^2 + \frac{F_{2k}}{F_{1k}}\xi_2^2\right],$$

з якої на підставі зроблених припущень випливає існування такої сталої $\sigma_0^2 > 0$, що

$$A_k(x,\varphi,\tau,\xi) \geq \sigma_0^2 \quad \forall\,(x,\varphi,\tau)\in G, \quad \|\xi\| = 1, \quad k = \overline{1,p}.$$

Покладаючи $\xi = \lambda\|\lambda\|^{-1}$, отримуємо нерівність

$$A_k(x,\varphi,\tau,\lambda) \geq \sigma_0^2\|\lambda\|^2,$$

яка і веде до оцінки (6) для всіх $\lambda \neq 0$. Лему доведено.

Розглянемо тепер осциляційну суму

$$\bar{J}_\lambda(\tau,\varepsilon) = \varepsilon\sum_{0<\tau_j^{(k)}<\tau}\Omega_\lambda\left(\tau_j^{(k)},\varepsilon\right)$$

і припустимо, що

$$B_k(x, \bar{x}(\tau), \varphi, \tau, \lambda, s) \geq \gamma_0^2 \quad \forall\, (x, \tau, \varphi, \lambda, s) \in K_{\rho_1} \times R^m \times \bigcup_{l=1}^{p} P^{(l)} \times Z, \quad k = \overline{1, p}. \tag{22}$$

Тут γ_0 — додатне число, причому, не втрачаючи загальності, можна вважати, що $\gamma_0 < 1$, а додатне число $\rho_1 < \rho_0$ вибрано з умови

$$\sigma_1(1+\sigma_1)(2\sigma_1 + \alpha(\rho_1) + \rho_1)(\alpha(\rho_1) + \rho_1) \leq \frac{1}{2}\gamma_0^2.$$

Лема 3. *Якщо* $x(\tau, \varepsilon) \in D_{\rho_2}$ $\forall\, (\tau, \varepsilon) \in [0, L] \times (0, \varepsilon_0]$ *при деякому* $\rho_2 \in (0, \rho_1)$ *і виконується умова* (22), *то при досить малому* $\varepsilon_0 > 0$ *для всіх* $\tau \in [0, L]$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\lambda \in P^{(k)}$, $k = \overline{1, p}$, *справедлива оцінка*

$$\left|\bar{J}_\lambda(\tau, \varepsilon)\right| \leq \sigma_6 \sqrt{\varepsilon}\left(\|\lambda\| + \frac{1}{\|\lambda\|}\right) \tag{23}$$

зі сталою σ_6, *не залежною від* ε, λ.

Доведення. На підставі нерівності (22) і обмеження на ρ_1 випливає

$$B_k(x, x, \varphi, \tau, \lambda, s) \geq \frac{1}{2}\gamma_0^2, \qquad (x, \tau, \varphi, \lambda, s) \in K_{\rho_1} \times R^m \times \bigcup_{l=1}^{p} P^{(l)} \times Z, \quad k = \overline{1, p}. \tag{24}$$

Розглянемо довільне $t_* \in [0, \tau)$ і позначимо через s_0 найближче ціле число до $z_\lambda(t_*, \varepsilon)$. Припустимо, що

$$\frac{1}{4}\gamma_0 < \left|z_\lambda(t_*, \varepsilon) - s_0\right| \leq \frac{1}{2}.$$

Оскільки в точках диференційовності $\left|\dfrac{d}{d\tau} z_\lambda(\tau, \varepsilon)\right| \leq \sigma_1(1+\sigma_1)\|\lambda\|$ і $\left\|\Delta x|_{\tau=\tau_j^{(k)}}\right\| \leq$ $\leq \varepsilon\sigma_1$, то можна вибрати таке не залежне від ε і λ додатне число δ_3, що

$$\frac{1}{8}\gamma_0 \leq \left|z_\lambda(\tau, \varepsilon) - s_0\right| \leq \frac{3}{4}, \quad \tau \in \left[t_*, t_* + \delta_3\|\lambda\|^{-1}\right]. \tag{25}$$

Якщо ж $\left|z_\lambda(t_*, \varepsilon) - s_0\right| \leq \dfrac{1}{4}\gamma_0$, то виконується нерівність

$$\left|z_\lambda(\tau, \varepsilon) - s_0\right| \leq \frac{1}{2}\gamma_0, \quad \tau \in \left[t_*, t_* + \delta_4\|\lambda\|^{-1}\right] \tag{26}$$

при деякому додатному δ_4, не залежному від ε і λ, причому згідно з (24) в такому випадку отримаємо

$$(\lambda, u(x, \varphi, \tau))\left(\lambda, u^{(k)}(x, \varphi, \tau)\right) \geq \frac{1}{4}\gamma_0^2\|\lambda\|^2, \quad \tau \in \left[t_*, t_* + \delta_4\|\lambda\|^{-1}\right]. \tag{27}$$

Тут $x = x(\tau, \varepsilon)$, $\varphi = \varphi(\tau, \varepsilon)$. Покладемо $\tilde{\delta} = \min\{\delta_3; \delta_4\}$ і розглянемо суму

$$\bar{J}'_\lambda = \varepsilon \sum_{t_* \leq \tau_j^{(k)} < t_* + \tilde{\delta}\|\lambda\|^{-1}} \Omega_\lambda\left(\tau_j^{(k)}, \varepsilon\right).$$

Нехай спочатку виконується умова (25) при $\delta_3 = \tilde{\delta}$ і $\tau_{j_0}^{(1)}$ — перша з точок $\tau_j^{(k)}$ з верхнім індексом 1, а $\tau_{j_0}^{(p)}$ — остання з таких точок з верхнім індексом p, що попали на відрізок $\left[t_*, t_* + \tilde{\delta}\|\lambda\|^{-1}\right] = T_5$. Подамо $\bar{J}'_\lambda$ у вигляді

$$\bar{J}'_\lambda = \varepsilon \sum{}' \Omega_\lambda\left(\tau_j^{(k)}, \varepsilon\right) + \varepsilon \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=j_0}^{l_0} \Omega_\lambda\left(\tau_j^{(k)}, \varepsilon\right) + \varepsilon \sum{}'' \Omega_\lambda\left(\tau_j^{(k)}, \varepsilon\right), \tag{28}$$

де $\sum{}'$ і $\sum{}''$ позначають суму не більше $p-1$ доданків, які відповідають тим $\tau_j^{(k)} \in T_5$, що $\tau_j^{(k)} < \tau_{j_0}^{(1)}$ і $\tau_j^{(k)} > \tau_{l_0}^{(p)}$.

Розглянемо суму

$$K = \varepsilon \sum_{j=j_0}^{l_0} \Omega_\lambda\left(\tau_j^{(k)}, \varepsilon\right)$$

і перетворимо її так, як і в [2, с. 59]. Тоді отримаємо нерівність

$$|K| \le \sigma_7 \left(\varepsilon + \varepsilon \sum_{j=j_0+1}^{l_0-1} \left| \frac{\Omega_\lambda\left(\tau_{j-1}^{(k)}, \tau_j^{(k)}, \varepsilon\right) - \Omega_\lambda\left(\tau_j^{(k)}, \tau_{j+1}^{(k)}, \varepsilon\right)}{\left(\Omega_\lambda\left(\tau_{j-1}^{(k)}, \tau_j^{(k)}, \varepsilon\right) - 1\right)\left(\Omega_\lambda\left(\tau_j^{(k)}, \tau_{j+1}^{(k)}, \varepsilon\right) - 1\right)} \right| \right),$$

де

$$\Omega_\lambda(t, \tau, \varepsilon) = \exp\left\{ \frac{i}{\varepsilon} \int_t^\tau (\lambda, \omega(x(y, \varepsilon), y))\, dy \right\}, \quad \sigma_7 = \text{const}.$$

Враховуючи, що $\tau_{j+1}^{(k)} - \tau_j^{(k)} = 2\pi\varepsilon$, і використовуючи умову (25) при $\delta_3 = \tilde{\delta}$, одержуємо нерівності

$$\left| \Omega_\lambda\left(\tau_{j-1}^{(k)}, \tau_j^{(k)}, \varepsilon\right) - \Omega_\lambda\left(\tau_j^{(k)}, \tau_{j-1}^{(k)}, \varepsilon\right) \right| \le$$

$$\le \frac{1}{\varepsilon} \|\lambda\| \int_{\tau_j^{(k)}}^{\tau_{j+1}^{(k)}} \|\omega(x(\tau - 2\pi\varepsilon, \varepsilon), \tau - 2\pi\varepsilon) - \omega(x(\tau, \varepsilon), \tau)\| d\tau \le \sigma_8 \varepsilon \|\lambda\|,$$

$$\left| \Omega_\lambda\left(\tau_\mu^{(k)}, \tau_{\mu+1}^{(k)}, \varepsilon\right) - 1 \right| = 2 \left| \sin \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\tau_\mu^{(k)}}^{\tau_{\mu+1}^{(k)}} z_\lambda(\tau, \varepsilon)\, d\tau \right| \ge 2 \sin \frac{\pi\gamma_0}{8} \ge \frac{\gamma}{2}$$

для $\mu = j-1, j$ зі сталою σ_8, не залежною від λ і ε. Оскільки довжина відрізка T_5 дорівнює $\tilde{\delta}\|\lambda\|^{-1}$, то

$$|K| \le \sigma_7 \left(1 + \frac{2\sigma_8 \tilde{\delta}}{\pi \gamma_0^2} \right) \varepsilon$$

і

$$\left| \bar{J}'_\lambda \right| \le \sigma_9 \varepsilon. \tag{29}$$

Нехай тепер виконуються умови (26) і (27) при $\delta_4 = \tilde{\delta}$. Як і при доведенні леми 1, встановлюємо монотонність $z_\lambda(\tau, \varepsilon)$ на T_5, що дозволяє виділити такий відрізок $[\alpha_2, \beta_2] \in T_5$, що $\beta_2 - \alpha_2 \le 2\mu\|\lambda\|^{-1}$ і

$$|z_\lambda(\tau, \varepsilon) - s_0| > \sigma_{10}\mu, \quad \tau \in T_5 \setminus [\alpha_2, \beta_2], \tag{30}$$

де стала σ_{10} не залежить від t^*, λ і ε. Це дає можливість записати

$$\bar{J}'_\lambda = \varepsilon \sum_{\alpha_2 \le \tau_j^{(k)} < \beta_2} \Omega_\lambda\left(\tau_j^{(k)}, \varepsilon\right) + \varepsilon \sum_{\beta_2 \le \tau_j^{(k)} < t_* + \tilde{\delta}\|\lambda\|^{-1}} \Omega_\lambda\left(\tau_j^{(k)}, \varepsilon\right) + \varepsilon \sum_{t_* \le \tau_j^{(k)} < \alpha_2} \Omega_\lambda\left(\tau_j^{(k)}, \varepsilon\right). \tag{31}$$

Легко бачити, що перший доданок у правій частині рівності (31) можна оцінити величиною $\sigma_{11}\left(\varepsilon+\mu\|\lambda\|^{-1}\right)$. Позначимо через $\bar{J}_\lambda''$ другий доданок у правій частині (31) і запишемо для нього рівність вигляду (28), у якій замість T_5 потрібно покласти $T_6=\left[\beta_2, t_*+\tilde{\delta}\|\lambda\|^{-1}\right]$. Нехай, наприклад, $z_\lambda(\tau,\varepsilon)$ зростає, тому $y_\lambda(\tau,\varepsilon)=z_\lambda(\tau,\varepsilon)-s_0$ також зростає на T_6, причому

$$\mu\sigma_{10} < y_\lambda(\tau,\varepsilon) < \frac{1}{2}\gamma_0, \quad \tau\in T_6.$$

Оскільки

$$\left|\sin\frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_{\tau_j^{(k)}}^{\tau_{j+1}^{(k)}} z_\lambda(\tau,\varepsilon)\,d\tau\right| \geq \frac{1}{\pi\varepsilon}\psi_\lambda\left(\tau_j^{(k)}, \tau_{j+1}^{(k)}, \varepsilon\right),$$

$$\psi_\lambda\left(\tau_{j-1}^{(k)}, \tau_j^{(k)}, \varepsilon\right) < \psi_\lambda\left(\tau_j^{(k)}, \tau_{j+1}^{(k)}, \varepsilon\right),$$

де

$$\psi_\lambda(\xi,\eta) = \int\limits_\xi^\eta y_\lambda(\tau,\varepsilon)\,d\tau,$$

то

$$\sum_{j=j_0+1}^{l_0-1}\left|\frac{\Omega_\lambda\left(\tau_{j-1}^{(k)}, \tau_j^{(k)}, \varepsilon\right)-\Omega_\lambda\left(\tau_j^{(k)}, \tau_{j+1}^{(k)}, \varepsilon\right)}{\left(\Omega_\lambda\left(\tau_{j-1}^{(k)}, \tau_j^{(k)}, \varepsilon\right)-1\right)\left(\Omega_\lambda\left(\tau_j^{(k)}, \tau_{j+1}^{(k)}, \varepsilon\right)-1\right)}\right| \leq$$

$$\leq \frac{\pi^2}{4}\varepsilon\left|\sum_{j=j_0+1}^{l_0-1}\left(\frac{1}{\psi_\lambda\left(\tau_{j-1}^{(k)}, \tau_j^{(k)}, \varepsilon\right)}-\frac{1}{\psi_\lambda\left(\tau_j^{(k)}, \tau_{j+1}^{(k)}, \varepsilon\right)}\right)\right| \leq$$

$$\leq \frac{\pi^2}{4}\varepsilon\left(\frac{1}{\psi_\lambda\left(\tau_{j_0}^{(k)}, \tau_{j_0+1}^{(k)}, \varepsilon\right)}+\frac{1}{\psi_\lambda\left(\tau_{l_0-1}^{(k)}, \tau_{l_0}^{(k)}, \varepsilon\right)}\right) \leq \frac{\pi}{4\sigma_{10}}\|\lambda\|\mu^{-1}.$$

Отже,

$$\left|\varepsilon\sum_{\beta_2\leq\tau_j^{(k)}<t_*+\tilde{\delta}\|\lambda\|^{-1}}\Omega_\lambda\left(\tau_j^{(k)},\varepsilon\right)\right| \leq \sigma_{12}\left(\varepsilon+\varepsilon\mu^{-1}\right).$$

Остання оцінка не зміниться, якщо $z(\tau,\varepsilon)$ спадає на T_6. Аналогічно оцінюємо і третій доданок у правій частині (31). Таким чином, при виконанні (26) і (27) отримаємо нерівність

$$\left|\bar{J}_\lambda'\right| \leq \sigma_{13}\left(\varepsilon+\varepsilon\mu^{-1}+\mu\|\lambda\|^{-1}\right). \tag{32}$$

Якщо тепер подати $[0,\tau]$ у вигляді

$$[0,\tau] = \bigcup_{l=0}^{l_0-1}\left[l\tilde{\delta}\|\lambda\|^{-1}, (l+1)\tilde{\delta}\|\lambda\|^{-1}\right]\cup\left[l_0\delta\|\lambda\|^{-1}, \tau\right],$$

де l_0 — ціла частина числа $\tau\|\lambda\|\tilde{\delta}^{-1}$, покласти $t_*=l\tilde{\delta}\|\lambda\|^{-1}$ і скористатися нерівностями (29) або (32) при $\mu=\sqrt{\varepsilon}$ в залежності від виконання умов (25) або (26), то дістанемо оцінку (23). Лему доведено.

Зауваження 2. Нехай матриця $\tilde{M}(\tau, \varepsilon)$ неперервна по τ на $[0, L]$, за винятком точок $\tau_j^{(k)}$, причому

$$\Delta M(\tau, \varepsilon)|_{\tau=\tau_j^{(k)}} = \tilde{N}_j^{(k)}(\varepsilon),$$

а на кожному півінтервалі $(\xi, \eta]$ неперервності задовольняє умову Ліпшиця по τ зі сталою $c(\varepsilon)$, не залежною від інтервалу. Тоді при виконанні умов леми 3, як і в роботі [9], одержимо оцінку

$$\left\| \varepsilon \sum_{0<\tau_j^{(k)}<\tau} \tilde{M}\left(\tau_j^{(k)}, \varepsilon\right) \Omega_\lambda\left(\tau_j^{(k)}, \varepsilon\right) \right\| \le$$

$$\le \tilde{\sigma}_6 \sqrt{\varepsilon}\left(\|\lambda\| + \frac{1}{\|\lambda\|}\right)\left[\sup_{[0, L]}\left\|\tilde{M}(\tau, \varepsilon)\right\| + \sum_{0<\tau_j^{(k)}<\tau}\left\|\tilde{N}_j^{(k)}(\varepsilon)\right\| + c(\varepsilon)\right]. \qquad (33)$$

Припустимо, що коефіцієнти Фур'є $a_\nu(x, \tau)$ і $f_\nu^{(k)}(x, \tau)$ при $x = \bar{x}(\tau)$ задовольняють умови

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\left(1 + \frac{1}{\left\|\lambda_\nu^{(0)}\right\|}\right)\max\|a_\nu\| + \frac{1}{\left\|\lambda_\nu^{(0)}\right\|}\left(\max\left\|\frac{\partial a_\nu}{\partial \tau}\right\| + \max\left\|\frac{\partial a_\nu}{\partial x}\right\|\right)\right] \le \sigma_1,$$

$$\sum_{k=1}^{p}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\left(\left\|\lambda_\nu^{(k)}\right\|^2 + \frac{1}{\left\|\lambda_\nu^{(k)}\right\|}\right)\max\left\|f_\nu^{(k)}\right\| + \right.$$

$$\left. + \left(\left\|\lambda_\nu^{(k)}\right\| + \frac{1}{\left\|\lambda_\nu^{(k)}\right\|}\right)\left(\max\left\|\frac{\partial f_\nu^{(k)}}{\partial \tau}\right\| + \max\left\|\frac{\partial f_\nu^{(k)}}{\partial x}\right\|\right)\right] \le \sigma_1, \qquad (34)$$

в яких максимум береться по $\tau \in [0, L]$.

Теорема 1. *Якщо розв'язок* $\bar{x}(\tau)$ *усередненої системи* (3) *визначений і лежить в* D *для всіх* $\tau \in [0, L]$, *виконуються нерівності* (4), (22), (34), *а функції* $a, b, \omega, f^{(k)}$ *і їх частинні похідні першого порядку по* x, φ, τ *неперервні і обмежені в* G, *то існують такі додатні сталі* ε_2 *і* σ_{14}, *що кожний розв'язок* $(x(\tau, \varepsilon); \varphi(\tau, \varepsilon))$, $x(0, \varepsilon) = \bar{x}(0)$, $\varphi(0, \varepsilon)$ — *довільне, імпульсної системи* (1) *визначений при* $\tau \in [0, L]$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 \le \varepsilon_2$, *і*

$$\|x(\tau, \varepsilon) - \bar{x}(\tau)\| \le \sigma_{14}\sqrt{\varepsilon} \quad \forall\, (\tau, \varepsilon) \in [0, L] \times (0, \varepsilon_0]. \qquad (35)$$

Доведення. Виберемо додатне число ρ_1, яке визначається умовами

$$2\sigma_1(1+\sigma_1)(2\sigma_1 + \alpha(\rho_1) + \rho_1)(\alpha(\rho_1) + \rho_1) \le \min\left\{\sigma_0^2; \gamma_0^2\right\}, \quad \rho_1 < \rho_0.$$

Нехай $x(\tau, \varepsilon) \in \overline{D}_{\rho_1}$ при $\tau \in [0, L_1(\varepsilon)]$ і $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, де $L_1(\varepsilon) \le L$. Якщо позначити $\upsilon(\tau, \varepsilon) = \|x(\tau, \varepsilon) - \bar{x}(\tau)\|$, то із систем (1), (3) для всіх $\tau \in [0, L_1(\varepsilon)]$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ дістанемо нерівність

$$\upsilon(\tau, \varepsilon) \le \sigma_1 \int_0^\tau \upsilon(t, \varepsilon)\,dt + \varepsilon\sigma_1 \sum_{0<\tau_j^{(k)}<\tau} \upsilon\left(\tau_j^{(k)}, \varepsilon\right) +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{\infty}\left\|\int_0^\tau a_\nu(\bar{x}(t), t)\, e^{i\left(\lambda_\nu^{(0)}, \theta(t, \varepsilon)\right)}\Omega_{\lambda_\nu^{(0)}}(t, \varepsilon)\,dt\right\| +$$

$$+\left\|\varepsilon \sum_{0<\tau_j^{(k)}<\tau} \bar{f}^{(k)}\left(\bar{x}\left(\tau_j^{(k)}\right), \tau_j^{(k)}\right) - \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{p}\int_0^\tau \bar{f}^{(k)}(x(t), t)\,dt\right\| +$$

$$+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left\|\varepsilon \sum_{0<\tau_j^{(k)}<\tau} f_\nu^{(k)}(\bar{x}(\tau), \tau)\, e^{i\left(\lambda_\nu^{(k)}, \theta(\tau,\varepsilon)\right)} \Omega_{\lambda_\nu^{(k)}}(\tau, \varepsilon)\Big|_{\tau=\tau_j^{(k)}}\right\|, \tag{36}$$

де

$$\theta(\tau, \varepsilon) = \varphi(\tau, \varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau \omega(x(t, \varepsilon), t)\,dt. \tag{37}$$

При $\tau \geq 4\pi\varepsilon$ легко встановлюються оцінки

$$Q \equiv \left\|\varepsilon \sum_{j=1}^{j_0} \bar{f}^{(k)}\left(\bar{x}\left(\tau_j^{(k)}\right), \tau_j^{(k)}\right) - \frac{1}{2\pi}\int_0^\tau \bar{f}^{(k)}(\bar{x}(t), t)\,dt\right\| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{j_0}\int_{\tau_j^{(k)}}^{\tau_{j+1}^{(k)}} \left\|\bar{f}^{(k)}\left(\bar{x}\left(\tau_j^{(k)}\right), \tau_j^{(k)}\right) - \bar{f}^{(k)}(\bar{x}(\tau), \tau)\right\| d\tau + 3\sigma_1\varepsilon \leq$$

$$\leq \sigma_1[2L(1+\sigma_1(p+1))+3]\varepsilon,$$

в яких j_0 — ціла частина числа $\dfrac{L_1(\varepsilon)}{2\pi\varepsilon} - 1$. Якщо ж $\tau < 4\pi\varepsilon$, то, очевидно, $Q \leq 4\sigma_1\varepsilon$. Тому, використовуючи нерівності (6) і (33) відповідно при

$$M(\tau, \varepsilon) = a_\nu(\bar{x}(\tau), \tau)\, e^{i\left(\lambda_\nu^{(0)}, \theta(\tau,\varepsilon)\right)}, \qquad \tilde{M}(\tau, \varepsilon) = f_\nu^{(k)}(\bar{x}(\tau), \tau)\, e^{i\left(\lambda_\nu^{(k)}, \theta(\tau,\varepsilon)\right)},$$

на підставі припущень (34) із (36) одержимо

$$\upsilon(\tau, \varepsilon) \leq \sigma_1 \int_0^\tau \upsilon(t, \varepsilon)\,dt + \varepsilon\sigma_1 \sum_{0<\tau_j^{(k)}<\tau} \upsilon\left(\tau_j^{(k)}, \varepsilon\right) + \sigma_{15}\sqrt{\varepsilon}.$$

З останньої нерівності випливає оцінка

$$\upsilon(\tau, \varepsilon) \leq \sigma_{14}\sqrt{\varepsilon} \quad \forall\, (\tau, \varepsilon) \in [0, L_1(\varepsilon)] \times (0, \varepsilon_0]$$

з не залежною від ε сталою σ_1 і досить малим $\varepsilon_0 > 0$, яке визначається лемами 1, 2. Якщо покласти

$$\varepsilon_0 \leq \left(2\sigma_{14}\rho_1^{-1}\right)^{-2},$$

то $L_1(\varepsilon) = L$. Теорему доведено.

Для обґрунтування методу усереднення можна дещо послабити припущення на функції $a, b, f^{(k)}$, замінивши умову існування неперервних обмежених частинних похідних першого порядку по x, φ, τ умовою Ліпшиця по x, φ та умовою Гельдера по τ, а також послабити обмеження (34) на коефіцієнти Фур'є. Проте при цьому погіршується точність оцінки похибки методу усереднення стосовно порядку по ε.

Нехай $a, f^{(k)}, k = \overline{1, p}$, розкладаються в рівномірно по φ збіжний в G ряд Фур'є (2) і

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\left\|\lambda_\nu^{(0)}\right\|}+\frac{1}{\left\|\lambda_\nu^{(0)}\right\|^{1/3}}\right)\left\|a_\nu(\bar{x}(\tau),\tau)\right\| \leq \sigma_1,$$

$$\sum_{k=1}^{p}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\left\|\lambda_\nu^{(k)}\right\|+\frac{1}{\left\|\lambda_\nu^{(k)}\right\|}\right)\left\|f_\nu^{(k)}(\bar{x}(\tau),\tau)\right\| \leq \sigma_1, \quad \tau\in[0,L]. \tag{38}$$

Теорема 2. *Нехай:* 1) $\bar{x}(\tau)\in D \quad \forall\,\tau\in[0,L]$ *і виконуються нерівності* (4), (22), (38); 2) $\omega, \dfrac{\partial\omega}{\partial x}, \dfrac{\partial\omega}{\partial\tau}$ *неперервні в* $D\times[0,L]$; $a,\ b,\ f^{(k)},\ k=\overline{1,p}$, *неперервні й обмежені в* G, *задовольняють умову Ліпшиця по* x, φ, *а* $f^{(k)}$ *і* a *— умову Гельдера по* τ *з показником* $\beta\in(0,1]$. *Тоді при досить малому* $\varepsilon_0>0$

$$\|x(\tau,\varepsilon)-\bar{x}(\tau)\| \leq \tilde{\sigma}_{14}\varepsilon^{\frac{\beta}{2(\beta+1)}} \quad \forall\,\tau\in[0,L], \quad \varepsilon\in(0,\varepsilon_0], \tag{39}$$

де $\tilde{\sigma}_{14}$ *— стала, яка не залежить від* ε, $x(0,\varepsilon)=\bar{x}(0)$, $\varphi(0,\varepsilon)\in R^m$.

Доведення. Виберемо додатне число h досить малим і при $\tau>h$ подамо відрізок $[0,\tau]$ у вигляді

$$[0,\tau] = \bigcup_{l=0}^{l_0-1}[lh,(l+1)h]\cup\left[l_0h,\tau\right],$$

де l_0 — ціла частина числа τh^{-1}. Згідно з (1) функція $\theta(\tau,\varepsilon)$, яка означена рівністю (37), задовольняє умови

$$\frac{d\theta}{d\tau} = b(x,\varphi,\tau), \quad \tau\neq\tau_j^{(k)}, \qquad \Delta\theta\big|_{\tau=\tau_j^{(k)}} = \varepsilon g_j^{(k)}(x,\varphi),$$

тому для $\tau'<\tau''$, τ', $\tau''\in[lh,(l+1)h]$, виконуються нерівності

$$\left\|\theta(\tau'',\varepsilon)-\theta(\tau',\varepsilon)\right\| \leq$$

$$\leq \left\|\int_{\tau'}^{\tau''}b(x(\tau,\varepsilon),\varphi(\tau,\varepsilon),\tau)\,d\tau\right\| + \varepsilon\left\|\sum_{\tau'\leq\tau_j^{(k)}<\tau''}g_j^{(k)}\left(x\left(\tau_j^{(k)},\varepsilon\right),\varphi\left(\tau_j^{(k)},\varepsilon\right)\right)\right\| \leq \sigma_{16}\left(h+\frac{\varepsilon}{h}\right).$$

Якщо вважати, що $x=x(\tau,\varepsilon)$, $\bar{x}=\bar{x}(\tau)$, $\varphi=\varphi(\tau,\varepsilon)$, $x^0=\bar{x}(\tau^0)$, $\theta^0 = \theta(\tau^0,\varepsilon)$, $\tau^0=hl$, $\tilde{a}(x,\varphi,\tau)=a(x,\varphi,\tau)-\bar{a}(x,\tau)$, $\tilde{f}^{(k)}(x,\varphi,\tau) = f^{(k)}(x,\varphi,\tau) - \bar{f}^{(k)}(x,\tau)$, то на підставі оцінок (21) і (23) будемо мати

$$\left\|\int_{lh}^{(l+1)h}\tilde{a}(\bar{x},\varphi,\tau)\,d\tau\right\| \leq \left\|\int_{lh}^{(l+1)h}\tilde{a}\left(x^0,\theta^0+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau\omega(x,\tau)\,d\tau,\tau^0\right)d\tau\right\| +$$

$$+ \int_{lh}^{(l+1)h}\left\|\tilde{a}(\bar{x},\varphi,\tau)-\tilde{a}\left(x^0,\theta^0+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau\omega(x,\tau)\,d\tau,\tau^0\right)\right\|d\tau \leq$$

$$\leq \sum_{\nu=1}^{\infty}\left\|a_\nu\left(x^0,\tau^0\right)\right\|\left|\int_{lh}^{(l+1)h}\Omega_{\lambda_\nu^{(0)}}(\tau,\varepsilon)\,d\tau\right| + \sigma_{17}\left(h^{1+\beta}+\varepsilon\right) \leq \sigma_{18}\sqrt{\varepsilon}+\sigma_{17}h^{1+\beta},$$

$$\left\| \varepsilon \sum_{lh \le \tau_j^{(k)} < (l+1)h} \tilde{f}^{(k)}(x, \varphi, \tau)\Big|_{\tau=\tau_j^{(k)}} \right\| \le$$

$$\le \left\| \varepsilon \sum_{lh \le \tau_j^{(k)} < (l+1)h} \tilde{f}^{(k)}\left(x^0, \theta^0 + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\tau_j^{(k)}} \omega(x, \tau)\, d\tau, \tau^0 \right) \right\| +$$

$$+ \varepsilon \sum_{lh \le \tau_j^{(k)} < (l+1)h} \left\| \tilde{f}^{(k)}(x, \varphi, \tau) - \tilde{f}^{(k)}\left(x^0, \theta^0 + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\tau} \omega(x, \tau)\, d\tau, \tau^0 \right) \right\|\Bigg|_{\tau=\tau_j^{(k)}} \le$$

$$\le \sum_{\nu=1}^{\infty} \left\| f_\nu^k\left(x^0, \tau^0\right) \right\| \left| \varepsilon \sum_{lh \le \tau_j^{(k)} < (l+1)h} \Omega_{\lambda_\nu^{(k)}}\left(\tau_j^{(k)}, \varepsilon\right) \right| + \sigma_{19}\left(h^{1+\beta} + \varepsilon\right) \le$$

$$\le \sigma_{20}\sqrt{\varepsilon} + \sigma_{19} h^{1+\beta}.$$

Аналогічно оцінюємо відповідні інтеграл і суму по відрізку $\left[l_0 h, \tau\right]$. На підставі нерівності (36) знаходимо

$$\upsilon(\tau, \varepsilon) \le \tilde{\sigma}_1 \int_0^{\tau} \upsilon(t, \varepsilon)\, dt + \varepsilon \tilde{\sigma}_1 \sum_{0 < \tau_j^{(k)} < \tau} \upsilon\left(\tau_j^{(k)}, \varepsilon\right) + \sigma_{21}\left(h^{\beta} + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{h}\right),$$

або

$$\upsilon(\tau, \varepsilon) \le \sigma_{22}\left(h^{\beta} + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{h}\right), \quad \tau \in [h, L], \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0],$$

де $\tilde{\sigma}_1$ — стала Ліпшиця. Остання оцінка залишиться вірною і при $\tau \in [0, h]$. Звідси випливає, що найкращий порядок оцінки по ε буде в тому випадку, коли $h = \varepsilon^{1/(2(\beta+1))}$. Теорему доведено.

Використовуючи теореми 1 і 2, як і в [3], можна обґрунтувати метод усереднення на півосі. Доведення теорем 3 і 4 по суті повторює доведення теорем 3.4.2 і 3.4.3 роботи [3], тому лише сформулюємо їх. Позначимо

$$G_1 = D \times R^m \times [0, \infty), \qquad G_2 = D \times [0, \infty),$$

$$c(x, \tau) = \overline{a}(x, \tau) + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{p} \bar{f}^{(k)}(x, \tau).$$

Теорема 3. *Нехай:* 1) *існує рівномірно асимптотично стійкий розв'язок* $\overline{x}(\tau)$ *системи* (3), *який лежить в* D *разом із своїм* ρ_0*-околом при* $\tau \in [0, \infty)$; 2) *виконуються умови* (4) *і* (22) *при* $\tau \in [0, \infty)$; 3) *функції* ω, $\dfrac{\partial \omega}{\partial \tau}$, $\dfrac{\partial \omega}{\partial x}$ *обмежені й рівномірно неперервні в* G_2; 4) *функції* a, b, $f^{(k)}$, $k = \overline{1, p}$, *неперервні й обмежені в* G_1, *задовольняють умову Ліпшиця по* x, φ, *а* $f^{(k)}$, $k = \overline{1, p}$, *і* a *— умову Гельдера по* τ *і справджується нерівність* (38) *для* $\tau \in [0, \infty)$. *Тоді для довільного* $\eta > 0$ *існує таке* $\varepsilon_0(\eta) > 0$, *що для кожного розв'язку* $(x(\tau, \varepsilon); \varphi(\tau, \varepsilon))$ *системи* (1), *для якого* $x(0, \varepsilon) = \overline{x}(0)$, $\varphi(0, \varepsilon)$ *— довільне, справедлива оцінка*

$$\| x(\tau, \varepsilon) - \overline{x}(\tau) \| < \eta \quad \forall\, (\tau, \varepsilon) \in [0, \infty) \times (0, \varepsilon_0(\eta)].$$

Для одержання кількісної залежності оцінки від величини малого параметра ε потрібно посилити вимоги на систему (1).

Теорема 4. *Припустимо, що:* а) *існує розв'язок* $\bar{x}(\tau)$ *системи* (3), *який лежить в* D *разом із своїм* ρ_0*-околом для всіх* $\tau \in [0, \infty)$, *причому матрицант* $X(\tau, t)$ *системи у варіаціях* $\dfrac{dy}{d\tau} = \dfrac{\partial c(\bar{x}(\tau), \tau)}{\partial x} y$ *задовольняє нерівність*

$$\| X(\tau, t) \| \leq d_1 e^{-d_2(\tau - t)} \quad \forall \tau \geq t \in [0, \infty)$$

з деякими додатними сталими d_1 *і* d_2; б) *функції* a, b, $f^{(k)}$, $k = \overline{1, p}$, *і їх частинні похідні першого порядку неперервні й обмежені в* G_1, *а* $\dfrac{\partial c(x, \tau)}{\partial x}$ *рівномірно неперервна в* G_2; в) *виконуються умови* 2, 3 *теореми* 3 *і нерівність* (34) *при* $\tau \in [0, \infty)$. *Тоді можна вказати такі сталі* $\varepsilon_3 > 0$ *і* $\sigma_{23} > 0$, *що*

$$\| x(\tau, \varepsilon) - \bar{x}(\tau) \| < \sigma_{23} \sqrt{\varepsilon}, \quad \tau \in [0, \infty), \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_3].$$

1. *Самойленко А. М.* Метод усреднения в системах с толчками // Мат. физика. – 1971. – Вып. 9. – С. 101 – 117.
2. *Астафьева М. Н.* Усреднение многочастотных колебательных систем с импульсным воздействием: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1989. – 103 с.
3. *Петришин Я. Р.* Усереднення багатоточкових задач для нелінійних коливних систем з повільно змінними частотами: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук. – Київ, 2001. – 131 с.
4. *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1979. – 304 с.
5. *Хапаев М. М.* Усреднение в теории устойчивости. – М.: Наука, 1986. – 192 с.
6. *Самойленко А. М., Петришин Р. І.* Багаточастотні коливання нелінійних систем. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1998. – 340 с.
7. *Самойленко А. М., Петришин Р. І., Лакуста Л. М.* Усереднення крайових задач з параметрами для багаточастотних імпульсних систем // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 9. – С. 1241 – 1253.
8. *Петришин Р. І., Лакуста Л. М.* Оцінки похибки методу усереднення в імпульсних крайових задачах з параметрами // Нелінійні коливання. – 2002. – **5**, № 2. – С. 193 – 207.
9. *Петришин Р. І., Сопронюк Т. М.* Експоненціальна оцінка фундаментальної матриці лінійної імпульсної системи // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 8. – С. 1101 – 1108.

Одержано 23.12.2002