УДК 512.552.12

Б. В. Забавський (Львів. нац. ун-т)

РЕДУКЦІЯ МАТРИЦЬ НАД КІЛЬЦЯМИ БЕЗУ СТАБІЛЬНОГО РАНГУ НЕ БІЛЬШЕ 2

We prove that a commutative Bezout ring is a Hermitian ring if and only if it is a Bezout ring of stable rank 2. We show that a noncommutative Bezout ring of stable rank 1 is a Hermitian ring. This implies that a noncommutative semilocal Bezout ring is a Hermitian ring. We prove that the Bezout domain of stable rank 1 with a two-element group of units is a ring of elementary divisors if and only if it is a duo-domain.

Доведено, що комутативне кільце Безу є ермітовим тоді і тільки тоді, коли воно є кільцем Безу стабільного рангу 2. Показано, що некомутативне кільце Безу стабільного рангу 1 є ермітовим кільцем. Як наслідок, отримано, що некомутативне напівлокальне кільце Безу є ермітовим кільцем. Показано, що область Безу стабільного рангу 1, група одиниць якої двоелементна, є кільцем елементарних дільників тоді і тільки тоді, коли вона є дуо-областю.

У 1955 р. М. Хенріксен [1] поставив питання: чи буде комутативне напівлокальне кільце Безу ермітовим кільцем? У 1974 р. у праці [2] отримано позитивну відповідь на це питання. У даній роботі аналогічна задача розв'язана для випадку некомутативних напівлокальних кілець. Одержаний результат є наслідком більш загальних результатів, що стосуються стабільного рангу кілець. А саме, доведено, що комутативне кільце Безу є ермітовим тоді і тільки тоді, коли воно є кільцем стабільного рангу 2. Показано, що некомутативне кільце Безу стабільного рангу 1 є ермітовим кільцем. Як наслідок, отримано, що напівлокальне кільце Безу є ермітовим кільцем. У другому пункті вивчаються області елементарних дільників. Доведено, що область елементарних дільників є 2-простою, а також показано, що область Безу стабільного рангу 1, група одиниць якої двоелементна, є кільцем елементарних дільників тоді і тільки тоді, коли вона є дуо-областю.

1. Ермітові кільця. Наведемо необхідні означення. Всі кільця, які розглядаються, є асоціативними з $1 \neq 0$. Кільце називається *правим* (*лівим*) *кільцем Безу*, якщо довільний скінченнопороджений правий (лівий) ідеал кільця є головним. Кільце, яке є правим і лівим кільцем Безу, називається *кільцем Безу*. Кільце R називається *правим ермітовим*, якщо для довільного рядка (a, b), де $a, b \in R$, існує зворотна матриця P порядку 2 над R така, що $(a, b)P = (d, 0)$, де $d \in R$. Якщо ж для довільного стовпця $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, де $a, b \in R$, існує зворотна матриця P порядку 2 над R така, що $P\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ 0 \end{pmatrix}$, де $d \in R$, то кільце R називається *лівим ермітовим*. Якщо кільце є правим і лівим ермітовим, то воно називається *ермітовим кільцем*. У випадку комутативних кілець поняття правого і лівого ермітових кілець збігаються [3]. Очевидно, що праве (ліве) ермітове кільце є правим (лівим) кільцем Безу [4].

Кільце R називається кільцем стабільного рангу 1, якщо з умови $aR + bR = R$ випливає, що існує елемент $x \in R$ такий, що $a + bx$ — зворотний елемент R. Кільце R називається кільцем стабільного рангу 2, якщо з умови $aR + bR + cR = R$ випливає, що існують елементи $x, y \in R$ такі, що $(a + cx)R + (b + cy)R = R$ [3, 5].

Теорема 1. *Комутативне кільце Безу є ермітовим кільцем тоді і тільки тоді, коли воно є кільцем стабільного рангу* 2.

Доведення. Той факт, що ермітове кільце є кільцем стабільного рангу 2, встановлено в [3], але для повноти викладу наведемо своє доведення.

Нехай R — ермітове кільце і $aR + bR + cR = R$. Позначимо $aR + bR = dR$.

Тоді $a=a_0d$, $b=b_0d$ і $a_0u+b_0v=1$ для деяких $u, v, a_0, b_0 \in R$ [1]. Оскільки $aR+bR+cR=R$, то $dR+cR=R$. Покажемо, що $(a+cv)R+(b-cu)R=R$. Зауважимо, що $(a+cv)u+(b-cu)v=au+bv=d$ і $(a+cv)b_0+(b-cu)(-a_0)= =c(a_0u+b_0v)=c$, тобто $d, c \in (a+cv)R+(b-cu)R$. Оскільки $dR+cR=R$, то $(a+cv)R+(b-cu)R=R$, що й потрібно довести.

Нам залишилося довести, що комутативне кільце Безу R стабільного рангу 2 є ермітовим кільцем. Нехай a, b — довільні елементи R. Оскільки R — кільце Безу, то $aR+bR=dR$ для деякого $d \in R$. Тоді існують елементи $a_0, b_0, u, v \in \in R$ такі, що $au+bv=d$, $a=a_0d$, $b=b_0d$. Позначимо $c_0=1-a_0u-b_0v$, тоді $dc_0=0$ і $a_0R+b_0R+c_0R=R$. Оскільки R — кільце стабільного рангу 2, то існують елементи $x, y \in R$ такі, що $(a_0+c_0x)R+(b_0+c_0y)R=R$. Звідси $(a_0+ +c_0x)k+(b_0+c_0y)t=1$ для деяких $k; t \in R$. Очевидно, що матриця

$$P = \begin{pmatrix} a_0+c_0x & b_0+c_0y \\ -t & k \end{pmatrix}$$

є зворотною. Легко перевірити, що $(a, b)P^{-1}=(d, 0)$, тобто R — праве ермітове кільце. Оскільки R — комутативне, то R є лівим ермітовим кільцем[6].

Теорему доведено.

У випадку некомутативних кілець справедлива така теорема.

Теорема 2. *Праве кільце Безу стабільного рангу* 1 *є правим ермітовим кільцем.*

Доведення. Нехай R — праве кільце Безу стабільного рангу 1, а a, b — довільні елементи R. Оскільки R — праве кільце Безу, то існує $d \in R$ таке, що $aR+bR=dR$. Звідси існують елементи $a_0, b_0, u, v \in R$ такі, що $au+bv=d$, $a=a_0d$, $b=b_0d$. Позначимо $c_0=1-a_0u-b_0v$, тоді $dc_0=0$ і $a_0R+b_0R+c_0R= =R$. Оскільки R — кільце стабільного рангу 1, то існують такі $x, y \in R$, що $a_0+b_0x+c_0y=u$ — зворотний елемент кільця R. Звідси $du=d(a_0+b_0x+ +c_0y)=da_0+db_0x=a+bx$. Тоді

$$(a, b)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -u^{-1}b_0 \\ x & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (d, 0).$$

Очевидно, що матриця

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -u^{-1}b_0 \\ x & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

є зворотною і такою, що $(a, b)P=(d, 0)$, що й потрібно було довести.

Теорему доведено.

Зауважимо, що для кілець Безу стабільного рангу 1 на підставі твердження 8 із [6] і теореми 2, як очевидний наслідок, отримаємо такий результат.

***Наслідок* 1.** *Кільце Безу стабільного рангу* 1 *є ермітовим кільцем.*

Оскільки напівлокальне кільце Безу є кільцем Безу стабільного рангу 1, то у випадку некомутативних кілець справедливі наступні результати, які є відповіддю на питання М. Хенріксена [1]. Слід зауважити, що питання М. Хенріксена стосується комутативних кілець.

***Наслідок* 2.** *Напівлокальне* (*праве*) *кільце Безу є* (*правим*) *ермітовим кільцем.*

2. Кільця елементарних дільників стабільного рангу 1. Наведемо необхідні означення і факти.

Дві матриці A та B над кільцем R називаються еквівалентними, якщо існують зворотні матриці P і Q відповідних розмірів такі, що $A = PBQ$. Будемо говорити, що матриця A має канонічну діагональну редукцію, якщо A еквівалентна діагональній матриці $D = (d_{ij})$ (тобто $d_{ij} = 0$, коли $i \neq j$), причому $Rd_{i+1,\,i+1}R \subseteq d_{i,\,i}R \bigcap Rd_{i,\,i}$. Зауважимо, що дана діагональна матриця D називається канонічною діагональною формою матриці A. Якщо над кільцем R довільна матриця має канонічну діагональну редукцію, то R називається *кільцем елементарних дільників* [4].

Нагадаємо, що кільце R є *простим*, якщо R не містить нетривіальних ідеалів. Зауважимо, що R — просте кільце тоді і тільки тоді, коли для довільного ненульового елемента $a \in R$ маємо $RaR = R$. Для $a \in R$ і натурального числа n покладемо $(RaR)_n = \{ u_1 a v_1 + \ldots + u_n a v_n \mid u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n \in R \}$. Назвемо R *n-простим*, якщо для довільного ненульового $a \in R$ $(RaR)_n = R$. Зауважимо, що кільце матриць порядку n над довільним полем є n-простим і не є $(n-1)$-простим [7]. Назвемо елемент a кільця R 2-простим, якщо існують елементи $u_1, v_1, u_2, v_2 \in R$ такі, що $u_1 a v_1 + u_2 a v_2 = 1$. Кільце, в якому довільний однобічний ідеал є двобічним, називається *дуо-кільцем*. Кільце називається *дистрибутивним справа*, якщо його гратка правих ідеалів є дистрибутивною. Кільце, яке дистрибутивне справа і зліва, називається *дистрибутивним* [8].

Дослідимо спочатку прості області елементарних дільників.

Твердження 1. *Проста область елементарних дільників є 2-простою.*

Доведення. Нехай R — проста область елементарних дільників. Тоді для довільного ненульового елемента $a \in R$ матриця $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ має канонічну діагональну редукцію, тобто існують зворотні матриці $P = (p_{ij})$, $Q = (q_{ij})$ такі, що

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} P = Q \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \tag{1}$$

де $RbR \subset zR \bigcap Rz$. З (1) випливає $RaR = RzR$. Оскільки R — просте кільце, то можливі два випадки: 1) z — зворотний елемент; 2) $b = 0$. Оскільки R — область, то у другому випадку з рівності (1) випливає

$$ap_{12} = 0, \quad ap_{22} = 0. \tag{2}$$

А оскільки $a \neq 0$, то рівність (2) має місце, коли $p_{12} = 0$, $p_{22} = 0$. Внаслідок того, що матриця P зворотна, існують $u, v \in R$ такі, що $up_{12} + vp_{22} = 1$, а це неможливо, коли $p_{12} = 0$, $p_{22} = 0$. Отже, випадок (2) неможливий. Нехай z — зворотний елемент. З точністю до еквівалентності матриць можемо вважати $z = 1$. Тоді з рівності (1) отримаємо

$$ap_{11} = q_{11}, \quad ap_{21} = q_{21}. \tag{3}$$

Оскільки матриця Q зворотна, то існують $x, y \in R$ такі, що $xq_{11} + yq_{21} = 1$. Звідси на підставі рівності (3) отримаємо $xap_{11} + yap_{21} = 1$, тобто елемент a є 2-простим. Отже, R є 2-простою областю.

Твердження доведено.

Оскільки проста область головних ідеалів є областю елементарних дільників [4], як наслідок, отримаємо наступний результат.

Наслідок 3. *Проста область головних ідеалів є 2-простою.*

Твердження 2. *Нехай R — кільце стабільного рангу* 1 *і a, b — ненульові елементи кільця R, для яких існують елементи $u_1, u_2, v_1, v_2 \in R$ такі, що $u_1 a v_1 + u_2 b v_2 = 1$. Тоді матриця $\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ має канонічну діагональну редукцію.*

Доведення. Згідно з обмеженнями, накладеними на елементи $a, b \in R$, маємо $u_1 aR + u_2 bR = R$. Оскільки R — кільце стабільного рангу 1, то існують такі $t \in R$ і зворотний елемент $w_1 \in R$, що

$$u_1 at + u_2 b = w_1. \tag{4}$$

Звідси $u_1 aR + u_2 R = R$. Оскільки R — кільце стабільного рангу 1, то існують елементи $s \in R$ і зворотний елемент $w_2 \in R$ такі, що $u_1 as + u_2 = w_2$. Звідси

$$u_2 = w_2 - u_1 as. \tag{5}$$

Підставивши (5) в (4), отримаємо $u_1 at + w_2 b - u_1 asb = w_1$. Звідси $u_1 a(t - sb) + w_2 b = w_1$ і $w_2^{-1} u_1 a(t-sb) + b = w_2^{-1} w_1$. Тобто доведено, що існують такі $x, y \in R$ і зворотний елемент $w \in R$, що $xay + b = w$. Звідси

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b + xay & xa \\ ay & a \end{pmatrix} = B.$$

Оскільки $w = a + xay$ — зворотний елемент R, то очевидно, що матриця B, а отже і матриця $\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, має канонічну діагональну редукцію.

Теорему доведено.

Як наслідок, з тверджень 1 та 2 отримуємо наступні результати.

Теорема 3. *Над простою областю Безу R стабільного рангу* 1 *довільна діагональна матриця має канонічну діагональну редукцію тоді і тільки тоді, коли R є* 2-*простим кільцем.*

Доведення. *Необхідність* випливає з твердження 1. Доведемо *достатність*. Нехай R — 2-проста область Безу стабільного рангу 1 і $a, b \in R$. Якщо $a = 0$ або $b = 0$, то очевидно, що матриця $\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ має канонічну діагональну редукціїо. Отже, нехай $a \neq 0$ і $b \neq 0$, тоді $ab \neq 0$. Оскільки R є 2-простим, то існують $u_1, u_2, v_1, v_2 \in R$ такі, що $u_1 abv_1 + u_2 abv_2 = 1$. Звідси $u_1 av_1 + u_3 bv_2 = 1$, де $u_3 = u_2 a$. На підставі твердження 2 для матриці $\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ існують зворотні матриці P, Q такі, що

$$P\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}.$$

Індукція за кількістю рядків матриці доводить теорему.

Далі розглянемо випадок області Безу стабільного рангу 1, група одиниць якої є двоелементною. Спочатку доведемо допоміжний результат.

Твердження 3. *Нехай R — кільце Безу стабільного рангу* 1, *а елемент $a \in R$ є* 2-*простим. Тоді існують $t \in R$ і зворотні елементи $u, w \in R$ такі, що $ta + au = w$.*

Доведення. Згідно з означенням 2-простого елемента існують $u_1, u_2, v_1, v_2 \in R$ такі, що $u_1 av_1 + u_2 av_2 = 1$. Оскільки поняття стабільного рангу є ліво-(право)симетричним [5] і $Rav_1 + Rav_2 = R$, то існують такі $l \in R$ і w_1 — зворотний елемент R, що $av_1 + lav_2 = w_1$. А оскільки $aR + laR = R$, то існує $s \in R$ і w — зворотний елемент R такі, що $la + as = w$. Звідси $Ra + Rs = R$, тоді, аналогічно, існує $k \in R$ і зворотний елемент $u \in R$ такі, що $ka + s = u$. Звідси $s = u - ka$, тоді $la + au - aka = w$, $(l - ak)a + au = w$. Поклавши $t = l - ak$, отримаємо даний результат.

Твердження доведено.

Теорема 4. *Нехай R — область Безу стабільного рангу 1, група одиниць якої є двоелементною. Тоді R є кільцем елементарних дільників тоді і тільки тоді, коли R є дуо-областю.*

Доведення. Достатність випливає з [6]. Нехай R — область елементарних дільників стабільного рангу 1, група одиниць якої є двоелементною. Розглянемо 2-простий елемент $a \in R$. Згідно з твердженням 3 існують $t \in R$ і зворотні елементи $u, w \in R$ такі, що $ta + au = w$. Оскільки група одиниць кільця R двоелементна, то рівність $ta + au = w$ має вигляд $ta + a = 1$, або $ta - a = 1$. Очевидно, що це можливо лише тоді, коли a — зворотний елемент R, тобто в даній області R 2-простими елементами є лише одиниці R.

Покажемо, що в області R з умов $aR + bR = R$ $(Ra + Rb = R)$ завжди випливає $Ra + Rb = R$ $(aR + bR = R)$.

Нехай $aR + bR = R$. Звідси випливає $RaR + RbR = R$. Розглянемо матрицю $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$. Оскільки R — кільце елементарних дільників, то існують зворотні матриці $P = (p_{ij})$ і $Q = (q_{ij})$ такі, що

$$P\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}Q = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}, \qquad (6)$$

де $RcR \subseteq zR \cap Rz$. Слід зауважити, що в дійсності $c = 0$, але це не є суттєвим. Оскільки $RaR + RbR = RzR$, то $RzR = R$. Згідно з теоремою 3 елемент z є 2-простим, а отже, як ми показали, z є зворотним елементом R. З точністю до еквівалентності матриць можна вважати, що $z = 1$. Тоді, розписавши рівність (6), отримаємо $(p_{11}a + p_{12}b)q_{11} = 1$, а значить, $p_{11}a + p_{12}b$ є зворотним елементом R. Звідси $Ra + Rb = R$. Випадок, коли $Ra + Rb = R$, доводиться аналогічно $\left(\text{розглядається матриця} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$. Тоді на підставі [8] отримаємо, що R є дистрибутивною областю, а отже, дуо-областю.

Теорему доведено.

1. *Henriksen M.* Some remarks about elementary divisor rings // Mich. Math. J. – 1955/56. – **3**. – P. 159–163.
2. *Larsen M., Lewis W., Shores T.* Elementary divisor rings and finitely presented modules // Trans. Amer. Math. Soc. – 1974. – **187**. – P. 231–248.
3. *Menal P., Moncasi J.* On regular rings with stable range 2 // J. Pure and Appl. Algebra. – 1982. – **24**. – P. 25–40.
4. *Kaplansky I.* Elementary divisors and modules // Trans. Amer. Math. Soc. – 1949. – **66**. – P. 464–491.
5. *Васерштейн Л. Н.* Стабильный ранг колец и размерность топологических пространств // Функцион. анализ. – 1971. – **5**. – С. 17–27.
6. *Гаталевич А. І.* Про дуо-кільця елементарних дільників // Алгебра і топологія. – Львів, 1996. – С. 58–65.
7. *Olszewski J.* On ideals of products of rings // Demonstr. math. – 1994. – **1**. – P. 1–7.
8. *Забавський Б. В., Комарницький М. Я.* Дистрибутивні області елементарних дільників // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 7. – С. 339–344.

Одержано 21.06.2001