УДК 518.9

В. Д. Кошманенко (Ін-т математики НАН України, Київ)

ТЕОРЕМА ПРО КОНФЛІКТ ДЛЯ ПАРИ СТОХАСТИЧНИХ ВЕКТОРІВ*

We investigate the mathematical conflict model with a discrete set of positions.

Досліджується математична модель конфлікту з дискретним набором позицій.

1. Вступ. У даній роботі запропоновано математичну модель конфлікту зі скінченним набором позицій для двох противників. Сумарний розподіл імовірності захоплення довільної позиції дорівнює одиниці для кожного з противників, тобто a priori противники вважаються незнищенними. Боротьба точиться лише за „справедливий" перерозподіл конфліктних позицій.

Нехай $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_d\}$, $d \geq 2$, — скінченна множина позицій, що її претендує зайняти (окупувати) кожна з двох альтернативних сторін (противників), яких позначаємо A та B. Повна ймовірність присутності на множині Ω для обох сторін вважається сталою і нормованою на одиницю, тобто $\mathrm{P}_A(\Omega) = \mathrm{P}_B(\Omega) = 1$. Початковий і незалежний від наявності противника розподіл імовірності присутності кожної зі сторін A та B по позиціях ω_i, $i = 1, 2, \ldots, d$, довільний:

$$1 = \sum_{i=1}^{d} \mathrm{P}_A(\omega_i) = \sum_{i=1}^{d} p_i, p_i \geq 0,$$

$$1 = \sum_{i=1}^{d} \mathrm{P}_B(\omega_i) = \sum_{i=1}^{d} q_i, q_i \geq 0.$$

Суть конфлікту полягає в неможливості окупувати спірну позицію ω_i противниками A та B одночасно. Задача полягає в побудові математичної композиції конфлікту між векторами $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_d)$ та $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_d)$, дослідженні еволюції перерозподілу ймовірностей $\mathrm{P}_A(\omega_i) = p_i$ і $\mathrm{P}_B(\omega_i) = q_i$, $i = 1, 2, \ldots, d$, відносно конфліктної композиції та знаходженні інваріантних станів.

2. Композиція конфлікту для стохастичних векторів. Вектор $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_d) \in R^d$, $d \geq 2$, називається стохастичним, якщо його координати невід'ємні, $p_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, d$, і l^1-норма одинична, $|\mathbf{p}| = \sum_{i=1}^{d} p_i = 1$.

Кожна пара стохастичних векторів $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in R^d$ утворює конфліктну систему, яка нетривіальна, якщо скалярний добуток $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \neq 0$, і тривіальна, якщо $\mathbf{p} \perp \mathbf{q}$. Випадок $\mathbf{p} = \mathbf{q} = \mathbf{1}_i$, де $\mathbf{1}_i = \Big(\underbrace{0, \ldots, 0}_{i-1}, 1, 0, \ldots, 0\Big)$, який відповідає колапс-стану, з подальшого розгляду виключаємо.

Некомутативна конфліктна композиція (позначення $*$) між стохастичними векторами $\mathbf{p}^0$, $\mathbf{q}^0$ з координатами $p_i^{(0)}$, $q_i^{(0)}$, $i = 1, 2, \ldots, d$, визначається таким чином. Парі $\mathbf{p}^0$, $\mathbf{q}^0$ ставиться у відповідність нова пара стохастичних векторів

$$\mathbf{p}^1 := \mathbf{p}^0 * \mathbf{q}^0 \equiv \mathbf{p}^0 \overset{1}{*} \mathbf{q}^0, \quad \mathbf{q}^1 := \mathbf{q}^0 * \mathbf{p}^0 \equiv \mathbf{q}^0 \overset{1}{*} \mathbf{p}^0,$$

з координатами

* Підтримана грантами DFG 436 UKR 113/53 і UKR 113/67, INTAS 00-257.

$$p_i^{(1)} := \frac{1}{z_1} p_i^{(0)} (1 - q_i^{(0)}) \equiv \frac{1}{z_1} p_i^{(0)} q_i^{(0),c}, \qquad p_i^{(0)} \equiv p_i, \qquad q_i^{(0)} \equiv q_i,$$
$$q_i^{(1)} := \frac{1}{z_1} q_i^{(0)} (1 - p_i^{(0)}) \equiv \frac{1}{z_1} q_i^{(0)} p_i^{(0),c}, \tag{1}$$

де нормуючий коефіцієнт z_1 фіксується умовою стохастичності, $|\mathbf{p}^1| = |\mathbf{q}^1| = 1$:

$$z_1 = 1 - (\mathbf{p}^0, \mathbf{q}^0). \tag{2}$$

Координати $p_i^{(1)}, q_i^{(1)}$ в (1) визначено коректно за винятком випадку, коли $\mathbf{p}^0 = \mathbf{1}_i = \mathbf{q}^0$. Степінь конфліктної композиції (позначення $\overset{n}{\divideontimes}$, $n = 1, 2, \ldots$) між векторами $\mathbf{p}^0$, $\mathbf{q}^0$ визначається індуктивно:

$$\mathbf{p}^n = \mathbf{p}^0 \overset{n}{\divideontimes} \mathbf{q}^0 := \mathbf{p}^{n-1} \divideontimes \mathbf{q}^{n-1},$$
$$\mathbf{q}^n = \mathbf{q}^0 \overset{n}{\divideontimes} \mathbf{p}^0 := \mathbf{q}^{n-1} \divideontimes \mathbf{p}^{n-1},$$

де координати векторів $\mathbf{p}^n$, $\mathbf{q}^n$ задаються формулами

$$p_i^{(n)} := \frac{1}{z_n} p_i^{(n-1)} (1 - q_i^{(n-1)}) \equiv \frac{1}{z_n} p_i^{(n-1)} q_i^{(n-1),c},$$
$$q_i^{(n)} := \frac{1}{z_n} q_i^{(n-1)} (1 - p_i^{(n-1)}) \equiv \frac{1}{z_n} q_i^{(n-1)} p_i^{(n-1),c} \tag{3}$$

з

$$z_n = 1 - (\mathbf{p}^{n-1}, \mathbf{q}^{n-1}).$$

Для фіксованої пари стохастичних векторів $\mathbf{p}^0$, $\mathbf{q}^0$ матриця

$$M^n = \begin{pmatrix} p_1^{(n)} & p_2^{(n)} & \cdots & p_d^{(n)} \\ q_1^{(n)} & q_2^{(n)} & \cdots & q_d^{(n)} \end{pmatrix} \tag{4}$$

називається станом конфліктної системи на n-му кроці конфлікту. Еволюція початкового стану M^0, асоційованого з парою векторів $\mathbf{p}^0$, $\mathbf{q}^0$, задається перетворенням

$$U\left(\overset{n}{\divideontimes}\right) M^0 := M^n, \qquad U\left(\overset{1}{\divideontimes}\right) \equiv U(\divideontimes).$$

У цій роботі для конфліктної системи з довільними початковими векторами $\mathbf{p}^0, \mathbf{q}^0 \in R^d$ доведено існування граничних інваріантних станів $M^\infty = \lim_{n\to\infty} M^n$, $U(\divideontimes) M^\infty = M^\infty$ та частково описано їх структуру.

3. Приклад. Розглянемо в R^2 пару стохастичних векторів $\mathbf{p}^0 = (p_1^{(0)}, p_2^{(0)})$, $\mathbf{q}^0 = (q_1^{(0)}, q_2^{(0)})$, $p_i^{(0)} \neq 0 \neq q_i^{(0)}$. На підставі (1) вже перший крок конфліктної композиції приводить до симетричного стану

$$U\left(\overset{1}{\divideontimes}\right) \begin{pmatrix} p_1^{(0)} & p_2^{(0)} \\ q_1^{(0)} & q_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \qquad 0 \le a, \quad b \le 1.$$

Твердження. *Для довільної пари стохастичних векторів* $\mathbf{p}^0 \neq \mathbf{q}^0$ *з* R^2 *послідовність станів* $M^n = U\binom{n}{\divideontimes}M^0 = \begin{pmatrix} p_1^{(n)} & p_2^{(n)} \\ q_1^{(n)} & q_2^{(n)} \end{pmatrix}$ *збігається до одного з інваріантних станів* $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *або* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Якщо* $\mathbf{p}^0 = \mathbf{q}^0 \neq \mathbf{1}_i$, $i = 1, 2$, *то граничний стан є рівноважним,* $M^\infty = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

Доведення. Без втрати загальності можна покласти $M^0 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, $0 < a < 1/2$, $b = 1 - a$. Тоді $M^1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix}$, де $a_1 = \dfrac{a^2}{a^2+b^2} = ak_1$, $k_1 = \dfrac{a}{2a^2-2a+1} < 1$, оскільки $a < a^2 + b^2$ при $a < 1/2$. Отже, $a_1 < a$. За індукцією для довільного $n \geq 1$

$$a_n = a_{n-1}k_n \equiv a\prod_{i=1}^{n} k_i,$$

де усі $k_i < 1$ і $k_i \not\to 1$. Це означає, що $a_n \to 0$ (відповідно $b_n \to 1$) при $n \to \infty$. У випадку $\mathbf{p}^0 = \mathbf{q}^0 \neq \mathbf{1}_i$ безпосередньо перевіряється, що не пізніше ніж на першому кроці конфліктна композиція приводить до рівноважного стану $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

4. Теорема про конфлікт.

Теорема. *Для довільної пари стохастичних векторів* $\mathbf{p}^0, \mathbf{q}^0 \in R^d$, $d \geq 2$, $\mathbf{p}^0 \neq \mathbf{q}^0$, *які утворюють нетривіальну конфліктну систему,* $(\mathbf{p}^0, \mathbf{q}^0) \neq 0$, *існують границі*

$$p_i^{(\infty)} = \lim_{n\to\infty} p_i^{(n)}, \qquad q_i^{(\infty)} = \lim_{n\to\infty} q_i^{(n)}, \quad i = 1, \ldots, d,$$

а послідовність станів M^n, *визначених згідно з* (1)–(4), *збігається до інваріантного стану*

$$M^\infty = \lim_{n\to\infty} M^n = \begin{pmatrix} p_1^{(\infty)} & p_2^{(\infty)} & \ldots & p_d^{(\infty)} \\ q_1^{(\infty)} & q_2^{(\infty)} & \ldots & q_d^{(\infty)} \end{pmatrix}, \qquad U(\divideontimes)M^\infty = M^\infty. \tag{5}$$

При цьому граничні вектори $\mathbf{p}^\infty = (p_1^{(\infty)}, p_2^{(\infty)}, \ldots, p_d^{(\infty)})$, $\mathbf{q}^\infty = (q_1^{(\infty)}, q_2^{(\infty)}, \ldots, q_d^{(\infty)})$, *асоційовані з станом* M^∞, *ортогональні,*

$$\mathbf{p}^\infty \perp \mathbf{q}^\infty. \tag{6}$$

Якщо початкові вектори однакові, $\mathbf{p}^0 = \mathbf{q}^0$, *та для усіх* $i = 1, 2, \ldots, d$ *координати* $p_i^{(0)} = q_i^{(0)} \neq 0$, *то граничні вектори також існують, є однаковими,* $\mathbf{p}^\infty = \mathbf{q}^\infty$, *і мають рівномірний розподіл*

$$p_i^{(\infty)} = q_i^{(\infty)} = 1/d. \tag{7}$$

Доведення. У випадку $d = 2$ справедливість теореми випливає з твердження. Нехай $d \geq 3$. Припустимо, що $\mathbf{p}^0 \neq \mathbf{q}^0$. Тоді якщо для якогось i $p_i^{(0)} >$

$> q_i^{(0)}$, то на підставі (1) $p_i^{(1)} > q_i^{(1)}$ також, і, отже, $p_i^{(n)} > q_i^{(n)}$ для усіх n. Більш того, якщо для фіксованого i $p_i^{(0)} > q_i^{(0)}$, то з необхідністю

$$q_i^{(n)} \to 0, \quad n \to \infty. \tag{8}$$

Для доведення (8) достатньо показати, що

$$c_i^{(n)} := \frac{p_i^{(n)}}{q_i^{(n)}} \to \infty, \quad n \to \infty.$$

Очевидно, що $c_i^{(0)} > 1$. А внаслідок того, що $p_i^{(0)} > q_i^{(0)}$, числа $k_i^{(0)} := := \dfrac{1-q_i^{(0)}}{1-p_i^{(n)}} > 1$ також. Тому $c_i^{(0)} < c_i^{(1)} = c_i^{(0)} k_i^{(0)}$. За індукцією

$$1 < c_i^{(0)} < c_i^{(1)} < \ldots < c_i^{(n)} < c_i^{(n+1)} = c_i^{(n)} k_i^{(n)} = c_i^{(0)} k_i^{(0)} \ldots k_i^{(n)}.$$

Більш того, числа $k_i^{(n)}$ строго зростають при $n \to \infty$:

$$1 < k_i^{(0)} < k_i^{(1)} < \ldots < k_i^{(n)}. \tag{9}$$

Справді, для $k_i^{(1)}$ маємо

$$k_i^{(1)} = \frac{1-q_i^{(1)}}{1-p_i^{(1)}} = \frac{1-\frac{1}{z_1} q_i^{(0)}(1-p_i^{(0)})}{1-\frac{1}{z_1} p_i^{(0)}(1-q_i^{(0)})} = \frac{z_1 - q_i^{(0)}(1-p_i^{(0)})}{z_1 - p_i^{(0)}(1-q_i^{(0)})} =$$

$$= \frac{1-q_i^{(0)} - (\mathbf{p}^0, \mathbf{q}^0) + q_i^{(0)} p_i^{(0)}}{1-p_i^{(0)} - (\mathbf{p}^0, \mathbf{q}^0) + q_i^{(0)} p_i^{(0)}} = \frac{1-q_i^{(0)} - I_i^0}{1-p_i^{(0)} - I_i^0},$$

де

$$0 < I_i^0 := (\mathbf{p}^0, \mathbf{q}^0) - p_i^{(0)} q_i^{(0)} = \sum_{k \neq i} p_k^{(0)} q_k^{(0)} < \sum_{k \neq i} p_k^{(0)} = 1 - p_i^{(0)}.$$

Тепер очевидно, що

$$k_i^{(0)} = \frac{1-q_i^{(0)}}{1-p_i^{(0)}} < k_i^{(1)} = \frac{1-q_i^{(0)} - I_i^0}{1-p_i^{(0)} - I_i^0}.$$

Аналогічно доводиться, що $k_i^{(1)} < k_i^{(2)}$, і за індукцією одержуємо (9). Отже, з $p_i^{(0)} > q_i^{(0)}$ випливає $c_i^{(n)} \to \infty$, і тому $q_i^{(n)} \to 0$, оскільки всі $p_i^{(n)}$ обмежені. Аналогічно, з $p_k^{(0)} < q_k^{(0)}$ для якогось фіксованого k випливає $p_k^{(n)} \to 0$. На підставі $\mathbf{p}^0 \neq \mathbf{q}^0$, це означає, що $(\mathbf{p}^n, \mathbf{q}^n) \to 0$ і $z_n \to 1$ при умові, що у векторів $\mathbf{p}^n, \mathbf{q}^n$ усі відповідні координати різні, тобто що є порожньою множина індексів Ω:

$$\Omega_0 := \{ i : p_i^{(0)} = q_i^{(0)} \neq 0 \} = \varnothing.$$

У свою чергу це означає, що послідовності $p_i^{(n)}, q_k^{(n)}$ при $p_i^{(0)} > q_i^{(0)}$ та $q_k^{(0)} > > p_k^{(0)}$ також збігаються на проміжку [0, 1]:

$$p_i^{(n)} \to p_i^{(\infty)}, \quad q_k^{(n)} \to q_k^{(\infty)}, \quad n \to \infty.$$

При цьому внаслідок того, що $q_i^{(n)} \to 0$, $p_k^{(n)} \to 0$, граничний стан системи буде інваріантним відносно конфліктної композиції, що й доводить (5). Оскільки $(\mathbf{p}^\infty, \mathbf{q}^\infty) = 0$, то співвідношення (6) є справедливим.

У випадку $\Omega_0 \neq \varnothing$ доведення теореми ускладнюється. Звичайно, граничні значення $p_i^{(\infty)}, q_k^{(\infty)}$ для $i, k \notin \Omega_0$ існують, як і в попередньому випадку. Це видно з формул (3), оскільки, як і раніше, $q_i^{(n)} \to 0$ при $p_i^{(0)} > q_i^{(0)}$, а також $p_k^{(n)} \to 0$ при $q_k^{(0)} > p_k^{(0)}$. Тому в даному випадку нормуючий коефіцієнт можна записати у вигляді

$$z_n = 1 - \sum_{j \in \Omega_0} (p_j^{(n)})^2 - \varepsilon_n,$$

де $\varepsilon_n \to 0$. З формул (3) випливає, що хоча б для якоїсь підпослідовності n_k відношення $1 - p_j^{(n_k)}$ до $1 - \varepsilon_n - \sum_{j \in \Omega_0} (p_j^{(n_k)})^2$ прямує до одиниці, що можливо лише при $p_j^{(n_k)} \to 0$. Отже, $(\mathbf{p}^n, \mathbf{q}^n) \to 0$, $n \to \infty$, в загальному випадку, що гарантує справедливість тверджень теореми.

Тепер припустимо, що $\mathbf{p}^0 = \mathbf{q}^0$ і для всіх $i = 1, 2, \ldots, d$ координати $p_i^{(0)} = q_i^{(0)} \neq 0$. Тоді з (1) очевидно випливає, що $p_i^{(n)} = q_i^{(n)} \neq 0$ для усіх n. Без втрати загальності координати вектора $\mathbf{p}^0$ можна вважати впорядкованими:

$$0 < p_1^{(0)} \leq p_2^{(0)} \leq \ldots \leq p_d^{(0)} < 1. \tag{10}$$

Оскільки $\mathbf{p}^0 = \mathbf{q}^0$, з (10) випливає, що числа $q_i^{(0),c} := 1 - q_i^{(0)}$ мають зворотну впорядкованість

$$1 > q_1^{(0),c} \geq q_2^{(0),c} \geq \ldots \geq q_d^{(0),c} > 0. \tag{11}$$

З (11) випливає

$$q_1^{(0),c} > z_1 > q_d^{(0),c}. \tag{12}$$

Справді, за означенням

$$z_1 = 1 - (\mathbf{p}^0, \mathbf{q}^0) = \sum_i p_i^{(0)} q_i^{(0),c}.$$

Тому, замінюючи в останній сумі всі числа $q_i^{(0),c}$ на $q_1^{(0),c}$ (або на $q_d^{(0),c}$) і використовуючи рівність $\sum_i p_i^{(0)} = 1$, з (11) одержуємо (12).

Тепер покажемо, що координати вектора $\mathbf{p}^1$ задовольняють нерівності

$$p_1^{(0)} \leq p_1^{(1)} \leq p_i^{(1)} \leq p_d^{(1)} \leq p_d^{(0)}, \qquad i = 1, 2, \ldots, d. \tag{13}$$

Справді, з (12) безпосередньо випливає, що $p_1^{(0)} \leq p_1^{(1)}$ та $p_d^{(1)} \leq p_d^{(0)}$. Для доведення нерівностей $p_1^{(1)} \leq p_i^{(1)} \leq p_d^{(1)}$ зауважимо, що їх, завдяки $p_i^{(0)} = q_i^{(0)} \neq 0$, можна переписати в еквівалентному вигляді

$$p_1^{(0)}(1 - p_1^{(0)}) \leq p_i^{(0)}(1 - p_i^{(0)}) \leq p_d^{(0)}(1 - p_d^{(0)}).$$

А ці співвідношення справедливі внаслідок того, що функція $y = x(1-x)$, $x \in [0, 1]$, має симетричний графік відносно точки $x = 1/2$, в якій вона досягає максимуму. Тому

$$y(p_1^{(0)}) \leq y(x) \leq y(1 - p_d^{(0)})$$

для будь-якої точки $x = p_i^{(0)} \in (0, 1)$ при умовах $d \geq 3$, $\sum_i p_i^{(0)} = 1$ та $\min_i p_i^{(0)} \leq x \leq \max_i p_i^{(0)}$. Тепер за індукцією нерівності (13) продовжуються на координати вектора $\mathbf{p}^n$ з довільним n:

$$p_1^{(0)} \le p_1^{(1)} \le \ldots \le p_1^{(n)} \le p_i^{(n)} \le p_d^{(n)} \le \ldots \le p_d^{(1)} \le p_d^{(0)}.$$

Звідси на підставі стохастичності векторів $\mathbf{p}^n, \mathbf{q}^n$ з необхідністю одержуємо

$$\lim_{n\to\infty} p_i^{(n)} = 1/d = \lim_{n\to\infty} q_i^{(n)}, \quad i = 1, 2, \ldots, d, \tag{14}$$

що доводить (7). Зрозуміло, що у випадку $p_i^{(0)} = q_i^{(0)} \neq 0$ лише для $i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, m < d$ границі в (14) дорівнюють $1/m$.

5. Дискусія. Згідно з доведеною вище теоремою про конфлікт композиція $\divideontimes$ (див. (1)) має чисто відштовхувальний ефект. В результаті нескінченної (в загальному випадку) боротьби різні супротивники з нетривіальної конфліктної системи (вектори $\mathbf{p}^n, \mathbf{q}^n$ не тотожні і їх скалярний добуток не нульовий, $(\mathbf{p}^n, \mathbf{q}^n) \neq 0$) розходяться по різних позиціях (вектори $\mathbf{p}^\infty, \mathbf{q}^\infty$ ортогональні). При цьому на границі спірні позиції відсутні: принаймні одна з координат $p_i^{(\infty)}$ або $q_i^{(\infty)}$ дорівнює нулю. Рівномірний (паритетний) розподіл реалізується лише для ідентичних сторін.

Зрозуміло, що для побудови досконалішої моделі конфліктів необхідно також забезпечити наявність притягального ефекту. Реально він проявляється в зростанні коефіцієнтів претензій (координат векторів $\mathbf{p}^n, \mathbf{q}^n$) окупувати певні позиції одночасно кожною з протилежних сторін при $n \to \infty$. Математично цього можна досягти введенням функціональної (керованої) залежності цих координат від часу: $p_i^{(n)}(t)$, $q_i^{(n)}(t)$. Зокрема, на кожному кроці композиції $\divideontimes$ координати $p_i^{(n)}, q_i^{(n)}$ можуть додатково степенево або експоненціально залежати від аргументу t. Це означає перехід до побудови конфліктних моделей з керуванням (див., наприклад, [1]). Закон перетворення функцій розподілу відповідних станів, як і координат $p_i^{(n)}(t)$, $q_i^{(n)}(t)$, можна задавати стохастичними квадратними матрицями.

Зауважимо, що в запропонованій тут моделі конфліктної системи не використовуються поняття платіжної функції — основного об'єкту звичайної теорії ігор [2 – 7]. Але в досконалішому варіанті конфліктної композиції ця функція з необхідністю з'являється (див. [8]).

На завершення зауважимо, що в цій роботі введено принцип незнищенності противників. Жодна з сторін не може ані виграти, ані програти, а результатом боротьби є безконфліктний стан. У наступній публікації буде показано, що введена в цій статті композиція конфлікту $\divideontimes$ породжує в просторі $R^d \times R^d$ векторну динамічну систему, значно складнішу за одновимірну [9].

1. *Чикрий А., Дзюбенко К. Г.* Билинейные марковские процессы поиска движущихся объектов // Пробл. управления и информатики. – 1999. – № 1. – С. 92 – 106.
2. *Vorob'ev N. N.* Translated and supplemented by S. Kotz. Applications of mathematics // Game Theory. Lect. Econ. and Syst. Sci. – New York; Berlin: Springer, 1977. – 178 p.
3. *Jones A. J.* Mathematics and its applications. Game theory: mathematical models of conflict. – New York etc.: Halsted Press, 1980. – 309 p.
4. *Owen G.* Game theory. – Third edition. – San Diego: Acad. Press, 1995. – 447 p.
5. *Armstrong J. S.* Assessing game theory, role playing and unaided judgment // Int. J. Forecasting. – 2002. – **18**, № 3. – P. 345 – 352.
6. *Gintis H.* A Markov model of production, trade, and money: theory and artificial life simulation // Comput. Math. Organ. Theory. – 1997. – **3**, № 1. – P. 19 – 41.
7. *Green K. C.* Forecasting decisions in conflict situations: A comparison of game theory, role-playing and unaided judgment // Int. J. Forecasting. – 2002. – **18**, № 3. – P. 321 – 344.
8. *Koshmanenko V.* The theorem on conflict for probability measures // Int. J. Game Theory. – 2002 (to appear).
9. *W. de Melo, S. van Strien.* One-dimensional dynamics. – Berlin: Springer, 1993. – 605 p.

Одержано 14.06.2002