УДК 517.956.4

Ю. М. Бернацька (Нац. техн. ун-т України „КПІ", Київ)

ПОВЕДІНКА ПОТЕНЦІАЛУ ПОДВІЙНОГО ШАРУ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ НА МНОГОВИДІ

We prove that a double-layer potential constructed in Riemannian manifold of a nonpositive sectional curvature undergoes a gap on its density surface similar to a double-layer potential in $\mathbb{R}^n$.

Доведено, що потенціал подвійного шару, побудований у рімановому многовиді недодатної секційної кривизни, як і потенціал подвійного шару в $\mathbb{R}^n$, зазнає стрибка при переході через поверхню, на якій задано його густину.

1. Вступ. Нехай задано параболічне рівняння в $\mathbb{R}^n$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{(\partial x^k)^2} = \frac{1}{2}\Delta u, \tag{1}$$

замкнену область D в $\mathbb{R}^n$, обмежену гладкою поверхнею S (будемо вважати останню двічі неперервно диференційовною), і функцію $\mu(t, x)$, яка неперервна на $\Omega = [t_1, t_2] \times S$, $t_1 < t_2$. *Потенціал подвійного шару* (згідно з [1], гл. III, § 10) визначається формулою

$$V(t, x) = \int_{t_1}^{t} d\tau \int_S \mu(\tau, y) \frac{\partial p(t-\tau, x, y)}{\partial \boldsymbol{n}_y} dS_y, \tag{2}$$

де $p(t, x, y)$ — фундаментальний розв'язок рівняння (1), dS_y — елемент площі поверхні S, $\boldsymbol{n}_y$ — зовнішня одинична нормаль до поверхні S у точці y. Вираз (2) можна інтерпретувати як потенціал, створений диполями, розміщеними по поверхні S у напрямку зовнішньої нормалі з густиною $\mu(t, x)$.

Відомо, що потенціал (2) має такі властивості [1] (гл. III, § 10):

i) нескінченно диференційовний за всіма аргументами і задовольняє параболічне рівняння (1) скрізь в $(-\infty, \infty) \times \mathbb{R}^n$, крім поверхні $\overline{\Omega}$;

ii) визначений скрізь в $(-\infty, \infty) \times \mathbb{R}^n$ і зазнає стрибка при переході через Ω, тобто для $(t_0, x_0) \in \Omega$ існують границі

$$V_i(t_0, x_0) = \lim_{\substack{(t,x)\to(t_0,x_0)\\ x\in D}} V(t, x), \qquad V_e(t_0, x_0) = \lim_{\substack{(t,x)\to(t_0,x_0)\\ x\notin D}} V(t, x)$$

та правильними є рівності

$$V_i(t_0, x_0) = -\mu(t_0, x_0) + V(t_0, x_0) =$$
$$= -\mu(t_0, x_0) + \int_{t_1}^{t_0} d\tau \int_S \mu(\tau, y) \frac{\partial p(t_0-\tau, x_0, y)}{\partial \boldsymbol{n}_y} dS_y,$$
$$V_e(t_0, x_0) = \mu(t_0, x_0) + V(t_0, x_0) =$$
$$= \mu(t_0, x_0) + \int_{t_1}^{t_0} d\tau \int_S \mu(\tau, y) \frac{\partial p(t_0-\tau, x_0, y)}{\partial \boldsymbol{n}_y} dS_y.$$

Якщо розглянути параболічне рівняння з матрицею дифузії $A(x) = \| a_{jk}(x) \|$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^j \partial x^k} = \frac{1}{2} \operatorname{tr}[A(x) u''_{xx}], \tag{3}$$

або, іншими словами, параболічне рівняння на рімановому многовиді з метричним тензором $A^{-1}(x)$ [2], то виявиться, що потенціал подвійного шару для рівняння (3) за певних умов на матрицю $A(x)$ має ті самі властивості.

Введений вище ріманів простір позначимо через $\mathcal{M}$, метрику в ньому — через ρ, а геодезичну — через $\varphi(\rho)$. Поверхню S будемо вважати рімановим підмноговидом в $\mathcal{M}$ з іншою метрикою d і геодезичною $\gamma(d)$. Тензор кривизни многовиду $\mathcal{M}$ будемо позначати через $R(x)$. Тензор Річчі та скалярну кривизну введемо за допомогою формул (які відрізняються від загальноприйнятих тільки знаком)

$$\operatorname{Ric}(x)(U, V) = \sum_{k=1}^{n} \langle R(x)(U, e_k)V, e_k \rangle \quad \text{і} \quad r(x) = \operatorname{tr}\operatorname{Ric}(x)$$

відповідно, де $\{e_k\}$ — ортобазис в $T_x\mathcal{M}$.

2. Побудова потенціалу подвійного шару. Для параболічного рівняння на многовиді потенціал подвійного шару також визначається формулою (2), якщо під $p(t, x, y)$ розуміти фундаментальний розв'язок (3), а n_y замінити на одиничну нормаль $\mathbf{v}_y$ до поверхні S у $\mathcal{M}$:

$$V(t, x) = \int_{t_1}^{t} d\tau \int_S \mu(\tau, y) \frac{\partial p(t-\tau, x, y)}{\partial \mathbf{v}_y} dS_y. \tag{4}$$

Фундаментальний розв'язок (3) в $\mathbb{R}^n$ будується методом параметриксу [3] (гл. I, § 2):

$$p(t, x, y) = q(t, x, y) + \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} r(\tau, z, y) q(t-\tau, x, z) dz, \tag{5}$$

де початкове наближення $q(t, x, y)$ має вигляд

$$q(t, x, y) = \frac{1}{(2\pi t)^{n/2} \sqrt{\det A(y)}} \exp\left\{ -\frac{\langle A^{-1}(y)(x-y), x-y \rangle}{2t} \right\}, \tag{6}$$

а функція $r(t, x, y)$ визначається з рівняння Вольтерри

$$r(t, x, y) = M(t, x, y) + \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} M(t-\tau, x, z) r(\tau, z, y) \, dz,$$

$M(t, x, y)$ — нев'язка рівняння (3), тобто

$$M(t, x, y) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}[A(x) q''_{xx}(t, x, y)] - \frac{\partial q(t, x, y)}{\partial t}.$$

Виявляється, зручніше будувати фундаментальний розв'язок в $\mathcal{M}$. Якщо $\mathcal{M}$ — простір недодатної секційної кривизни, то відомо [4], що в ньому також можна застосувати метод параметриксу, якщо просторовий інтеграл брати по $\mathcal{M}$ і замість традиційного початкового наближення (6) використовувати

$$m(t,x,y) = q(t,x,y)\exp\left\{-\frac{\phi(x,y)}{2}\right\},$$

де (7)

$$q(t,x,y) = \frac{1}{(2\pi t)^{n/2}}\exp\left\{-\frac{\rho^2(x,y)}{2t}\right\},$$

а функція $\phi(x,y)$ визначається в термінах базисних полів Якобі $Z_k(\rho)$:

$$\phi(x,y) = \int_0^{\rho(x,y)} \frac{a(\varphi(s),y)}{s}ds, \qquad a(\varphi(\rho),y) = \sum_k \langle \rho Z_k'(\rho) - Z_k(\rho), Z_k(\rho)\rangle.$$

Тоді фундаментальний розв'язок можна зобразити у вигляді

$$p(t,x,y) = m(t,x,y) + l(t,x,y),$$

(8)

$$l(t,x,y) = \int_0^t d\tau \int_{\mathcal{M}} m(t-\tau,x,z)r(\tau,z,y)dS_z.$$

Нехай тензор кривизни простору $\mathcal{M}$ задовольняє такі умови:

1а) $\langle R(x)(U,V)U,V\rangle \geq 0$ для всіх $x \in \mathcal{M}$, $U,V \in T_x\mathcal{M}$, тобто секційна кривизна многовиду недодатна;

1б) для довільних ортобазисів $\{e_k\}$, $\{\varphi_k\}$ у $T_x\mathcal{M}$

$$\sum_k |\langle R(x)(U,e_k)U,\varphi_k\rangle| \leq c\sqrt{\mathrm{Ric}(x)(U,U)\mathrm{Ric}(x)(V,V)},$$

причому стала c не залежить від x;

1в) уздовж будь-якої геодезичної скалярна кривизна спадає досить швидко, тобто $\int_0^\infty sr(\gamma(s))ds < c$, де c не залежить від γ;

1г) для коваріантних похідних тензора кривизни справджуються оцінки

$$\left\|\left(\nabla_{X(s)}R\right)(\gamma(s))(Y(s),\dot\gamma(s))Z(s)\right\| \leq f_1(\gamma(s))\|X(s)\|\|Y(s)\|\|Z(s)\|,$$

$$\left\|\nabla_{U(s)}\nabla_{X(s)}R(\gamma(s))(Y(s),\dot\gamma(s))Z(s)\right\| \leq f_2(\gamma(s))\|X(s)\|\|Y(s)\|\|Z(s)\|\|U(s)\|,$$

де функції f_1 та f_2 такі, що вздовж будь-якої геодезичної γ

$$\int_0^\infty s^2 f_k(\gamma(s))ds < c$$

і c не залежить від γ.

Припустимо, що для підмноговиду S виконується така умова:

2) коваріантна похідна від нормалі до S уздовж будь-якої геодезичної γ є обмеженою: $\left|\nabla_{\dot\gamma}\mathbf{v}\right| < c$, $y \in S$.

За умов 1 згідно з [5] похідну фундаментального розв'язку $\partial p(t,x,y)/\partial \mathbf{v}_y$ вздовж нормалі до поверхні S можна зобразити у вигляді

$$\langle \mathrm{grad}_y p(t,x,y), \mathbf{v}_y\rangle = -\frac{\rho(x,y)}{t}p(t,x,y)\langle \mathrm{grad}_y\rho(t,x), \mathbf{v}_y\rangle +$$

$$+ \langle F(t,x,y), \mathbf{v}_y\rangle q(t,x,y),$$

де векторне поле F задовольняє нерівності $\|F(t,x,y)\| < c_1$, $t > 0$, $x,y \in \mathcal{M}$. Потенціал подвійного шару має вигляд (якщо позначити $\mathrm{grad}_y\rho(x,y) = \dot\varphi(\rho) = \dot\varphi_y$)

$$V(t,x) = -\int_{t_1}^{t} d\tau \int_S \mu(\tau,y)\frac{\rho(x,y)}{t-\tau} p(t-\tau,x,y)\left\langle \dot{\varphi}_y, \mathbf{v}_y \right\rangle dS_y +$$

$$+\int_{t_1}^{t} d\tau \int_S \mu(\tau,y)\left\langle F(t-\tau,x,y), \mathbf{v}_y \right\rangle q(t-\tau,x,y)\,dS_y. \tag{9}$$

Коли $x = x_0$, $x_0 \in S$, обидва інтеграли стають невласними. Покажемо, що вони існують. Достатньо дослідити підінтегральну функцію на ділянці S_ε поверхні S поблизу точки x_0, де $|\mu(t,y)| < \varepsilon$, $y \in S$. Перший інтеграл з формули (9) подамо у вигляді суми двох інтегралів, враховуючи рівності (8). Для першого доданка, виконуючи заміну

$$\eta = \frac{\rho^2}{2(t-\tau)}, \qquad \frac{1}{t-\tau} = \frac{2\eta}{\rho^2}, \qquad d\tau = \frac{\rho^2}{2\eta^2}d\eta \tag{10}$$

і обчислюючи за змінною τ інтеграл

$$\int_{-\infty}^{t} \frac{\exp\left\{-\rho^2(x,y)/(2t)\right\}}{(t-\tau)^{n/2+1}}d\tau = \frac{2^{n/2}}{\rho^n}\int_0^{\infty} e^{-\eta}\eta^{n/2-1}d\eta = \frac{2^{n/2}\Gamma(n/2)}{\rho^n}, \tag{11}$$

одержуємо

$$\left|\int_{t_1}^{t} d\tau \int_{S_\varepsilon} \mu(\tau,y)\frac{\rho(x,y)}{t-\tau} m(t-\tau,x,y)\left\langle \dot{\varphi}_y, \mathbf{v}_y \right\rangle dS_y\right| \le$$

$$\le \frac{\varepsilon\Gamma(n/2)}{\pi^{n/2}}\int_{S_\varepsilon} \frac{\exp\{-\phi(x,y)/2\}}{\rho^{n-1}(x,y)}dS_y.$$

Користуючись оцінкою $|l(t,x,y)| < c_2 t e^{c_2 t} q(t,x,y)$ з [5], для другого доданка отримуємо нерівність

$$\left|\int_{t_1}^{t} d\tau \int_S \mu(\tau,y)\frac{\rho(x,y)}{t-\tau} l(t-\tau,x,y)\left\langle \dot{\varphi}_y, \mathbf{v}_y \right\rangle dS_y\right| <$$

$$< c_2\int_{t_1}^{t} d\tau \int_S |\mu(\tau,y)|\rho(x,y)e^{c_2(t-\tau)}q(t-\tau,x,y)\,dS_y,$$

де права частина є неперервною функцією [3]. Другий інтеграл з формули (9) оцінюється виразом

$$\left|\int_{t_1}^{t} d\tau \int_S \mu(\tau,y)\left\langle F(t-\tau,x,y), \mathbf{v}_y \right\rangle q(t-\tau,x,y)\,dS_y\right| <$$

$$< c_1\int_{t_1}^{t} d\tau \int_S |\mu(\tau,y)|q(t-\tau,x,y)\,dS_y,$$

який також є неперервною функцією [3].

3. Властивості потенціалу подвійного шару. Потенціал подвійного шару $V(t,x)$ для параболічного рівняння на многовиді (3) нескінченно диференційовний за всіма аргументами і задовольняє рівняння скрізь в $(-\infty,\infty)\times\mathcal{M}$, крім поверхні $\overline{\Omega}$. Це випливає з властивостей фундаментального розв'язку.

Теорема. *Якщо многовид* $\mathcal{M}$ *задовольняє умови* 1, *а підмноговид* S — *умову* 2, *потенціал подвійного шару* $V(t, x)$ *визначений скрізь в* $(-\infty, \infty) \times \mathcal{M}$ *і зазнає стрибка при переході через* Ω, *тобто при* $(t_0, x_0) \in \Omega$ *існують границі*

$$V_i(t_0, x_0) = \lim_{\substack{(t,x)\to(t_0,x_0)\\ x\in D}} V(t, x), \qquad V_e(t_0, x_0) = \lim_{\substack{(t,x)\to(t_0,x_0)\\ x\notin D}} V(t, x)$$

та справджуються рівності

$$V_i(t_0, x_0) = -\mu(t_0, x_0) + V(t_0, x_0) =$$

$$= -\mu(t_0, x_0) + \int_{t_1}^{t_0} d\tau \int_S \mu(\tau, y) \frac{\partial p(t_0 - \tau, x_0, y)}{\partial \mathbf{v}_y} dS_y,$$

$$V_e(t_0, x_0) = \mu(t_0, x_0) + V(t_0, x_0) =$$

$$= \mu(t_0, x_0) + \int_{t_1}^{t_0} d\tau \int_S \mu(\tau, y) \frac{\partial p(t_0 - \tau, x_0, y)}{\partial \mathbf{v}_y} dS_y.$$

Доведення. Очевидно, вся особливість міститься в інтегралі

$$V_1(t, x) = \int_{t_1}^{t} d\tau \int_S \mu(\tau, y) \frac{\rho(x, y)}{t - \tau} m(t - \tau, x, y) \left\langle \dot{\varphi}_y, \mathbf{v}_y \right\rangle dS_y,$$

оскільки решта інтегралів (позначимо її через $V_2(t, x)$) є неперервною функцією змінних (t, x):

$$\lim_{(t,x)\to(t_0,x_0)} V_2(t, x) = V_2(t_0, x_0).$$

Зосередимо увагу на доданку $V_1(t, x)$.

1. Почнемо розгляд з випадку, коли $\mu(t, x) \equiv 1$, $t_1 = -\infty$. Відповідний потенціал позначимо через $V_0(t, x)$, так що

$$V_0(t, x) = -\int_{-\infty}^{t} d\tau \int_S \frac{\rho(x, y)}{t - \tau} m(t - \tau, x, y) \left\langle \dot{\varphi}_y, \mathbf{v}_y \right\rangle dS_y =$$

$$= -\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_S \rho(x, y) \left\langle \dot{\varphi}_y, \mathbf{v}_y \right\rangle \exp\{-\phi(x, y)/2\} \left(\int_{-\infty}^{t} \frac{\exp\left\{-\rho^2/(2(t-\tau))\right\}}{(t-\tau)^{n/2+1}} d\tau \right) dS_y.$$

Виконаємо у внутрішньому інтегралі заміну змінних (10). Тоді з урахуванням (11) отримаємо

$$V_0(t, x) = \frac{\Gamma(n/2)}{\pi^{n/2}} \int_S \frac{\left\langle \dot{\varphi}_y, \mathbf{v}_y \right\rangle}{\rho^{n-1}} \exp\{-\phi(x, y)/2\} dS_y. \tag{12}$$

Нас цікавить поведінка $V_0(t, x)$ при переході через поверхню Ω. Запишемо $V_0(t, x)$ у вигляді

$$V_0(t, x) = W^{\delta}(t, x) + W'(t, x),$$

$$W^{\delta}(t, x) = \frac{\Gamma(n/2)}{\pi^{n/2}} \int_{S_\delta(x_0)} \frac{\left\langle \dot{\varphi}_y, \mathbf{v}_y \right\rangle}{\rho^{n-1}} \exp\{-\phi(x, y)/2\} dS_y,$$

$$W'(t,x) = \frac{\Gamma(n/2)}{\pi^{n/2}} \int\limits_{S \setminus S_\delta(x_0)} \frac{\langle \dot{\varphi}_y, \mathbf{v}_y \rangle}{\rho^{n-1}} \exp\{-\phi(x,y)/2\} dS_y,$$

де $S_\delta(x_0)$ — $(n-1)$-вимірна геодезична куля малого радіуса δ з центром у точці x_0, яка розташована на поверхні S.

Очевидно, що в інтегралі W' змінна інтегрування y задовольняє нерівність $\rho(x,y) \geq \text{const} > 0$ для всіх x, достатньо близьких до x_0. Тому інтеграл W' неперервний у деякому малому околі точки (t_0, x_0):

$$\lim_{(t,x)\to(t_0,x_0)} W'(t,x) = W'(t_0,x_0).$$

Розглянемо тепер $W^\delta(t,x)$. Зведемо чисельник і знаменник підінтегрального дробу в (12) до зручного вигляду. Для цього звернемось до диференціальної геометрії.

Побудуємо трикутник на точках $x \in \mathcal{M}$ і x_0, $y \in S$, з'єднаних геодезичними у відповідних метриках: точки x_0 і x фіксовані, а y пробігає простір $S_\delta(x_0)$. Геодезична, що з'єднує точки x_0 і y, залежить від y як від параметра; нехай цим параметром буде відстань $d(x_0,y) \overset{\Delta}{=} t$. В'язку геодезичних, що з'єднують x і $y = \gamma(t)$, будемо позначати через $\varphi(\rho(x,\gamma(t)),t)$.

Лема 1. *Якщо виконується умова 2, то справджується рівність*

$$\frac{\langle \dot{\varphi}_y, \mathbf{v}_y \rangle}{\rho^{n-1}} = \frac{\rho(x_0,x) + h_1(x,x_0,y)}{\left(\rho^2(x_0,x) + d^2(x_0,y) + h_2(x,x_0,y)\right)^{n/2}},$$

де

$$h_1(x,x_0,y) = \int\limits_0^{d(x_0,y)} \langle B_\tau, \mathbf{v}_{\gamma(\tau)} \rangle d\tau + \int\limits_0^{d(x_0,y)} \rho(x,\gamma(\tau)) \langle \dot{\varphi}_{\gamma(\tau)}, \nabla_{\dot{\gamma}} \mathbf{v}_{\gamma(\tau)} \rangle d\tau,$$

$$h_2(x,x_0,y) = 2 \int\limits_0^{d(x_0,y)} \langle B_\tau, \dot{\gamma}(\tau) \rangle (t-\tau) d\tau +$$

$$+ 2 \int\limits_0^{d(x_0,y)} \rho(x,\gamma(\tau)) \langle \dot{\varphi}_{\gamma(\tau)}, \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}(\tau) \rangle (t-\tau) d\tau.$$

Доведення. Диференціюючи тотожність $\varphi(\rho(x,\gamma(t)),t) \equiv \gamma(t)$, отримуємо

$$\dot{\varphi}_{\gamma(\tau)} \langle \dot{\varphi}_{\gamma(\tau)}, \dot{\gamma}(t) \rangle + Z_t(\rho) = \dot{\gamma}(t), \tag{13}$$

де $Z_t(s) = \left.\dfrac{\partial \varphi(s, t+\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}$ — поле Якобі вздовж $\varphi(s,t)$. Далі ця рівність буде використана при доведенні.

Введемо дві функції: $w(t) \overset{\Delta}{=} \rho(x,\gamma(t)) \langle \dot{\varphi}_{\gamma(t)}, \mathbf{v}_{\gamma(t)} \rangle$, $u(t) \overset{\Delta}{=} \rho^2(x,\gamma(t))$, через які вихідний дріб можна виразити так:

$$\frac{\langle \dot{\varphi}_y, \mathbf{v}_y \rangle}{\rho^{n-1}} = \frac{w(t)}{(u(t))^{n/2}}.$$

Розкладемо обидві функції за формулою Тейлора по t в околі нуля, записуючи залишковий член в інтегральному вигляді.

Функцію $w(t)$ розкладемо з точністю до нульового члена. Її похідна має вигляд

$$w'(t) = \left\langle \dot{\varphi}_{\gamma(t)}, \dot{\gamma}(t) \right\rangle \left\langle \dot{\varphi}_{\gamma(t)}, \mathbf{v} \right\rangle + \rho \left\langle \dot{\varphi}_{\gamma(t)}, \nabla_{\dot{\gamma}} \mathbf{v}_{\gamma(t)} \right\rangle + \rho \left\langle \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\varphi}_{\gamma(t)}, \mathbf{v}_{\gamma(t)} \right\rangle.$$

Зауважимо, що $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\varphi}_{\gamma(t)} = \nabla_{Z_t(\rho)} \dot{\varphi}_{\gamma(t)} = \nabla_{\dot{\varphi}} Z_t(\rho) = Z_t'(\rho)$. Домножаючи (13) скалярно на $\mathbf{v}_{\gamma(t)}$, отримуємо співвідношення $\left\langle \dot{\varphi}_{\gamma(t)}, \mathbf{v}_{\gamma(t)} \right\rangle \left\langle \dot{\varphi}_{\gamma(t)}, \dot{\gamma}(t) \right\rangle = -\left\langle Z_t(\rho), \mathbf{v}_{\gamma(t)} \right\rangle + \left\langle \dot{\gamma}(t), \mathbf{v}_{\gamma(t)} \right\rangle$, але $\mathbf{v}_{\gamma(t)}$ завжди ортогональна до $\dot{\gamma}(t)$, тому останній доданок дорівнює нулю. Отже,

$$w'(t) = \left\langle \rho Z_t'(\rho) - Z_t(\rho), \mathbf{v}_{\gamma(t)} \right\rangle + \rho \left\langle \dot{\varphi}_{\gamma(t)}, \nabla_{\dot{\gamma}} \mathbf{v}_{\gamma(t)} \right\rangle.$$

З рівняння Якобі випливає

$$\rho Z_t'(\rho) - Z_t(\rho) =$$

$$= \int_0^{\rho(x,\gamma(t))} s \Phi_t(\rho(x,\gamma(t)), s) R(\varphi(s,t)) (\dot{\varphi}_t(s), Z_t(s)) \dot{\varphi}_t(s)\, ds \overset{\Delta}{=} B_t, \tag{14}$$

де Φ_t — оператор паралельного зсуву вздовж $\varphi(s, t)$. Враховуючи, що $w(0) = \rho(x, x_0)$, отримуємо розклад із залишковим членом в інтегральному вигляді

$$w(t) = \rho(x, x_0) + \int_0^{d(x_0, y)} \left\langle B_\tau, \mathbf{v}_{\gamma(\tau)} \right\rangle d\tau + \int_0^{d(x_0, y)} \rho \left\langle \dot{\varphi}_{\gamma(\tau)}, \nabla_{\dot{\gamma}} \mathbf{v}_{\gamma(\tau)} \right\rangle d\tau. \tag{15}$$

Функцію $u(t)$ будемо розкладати з точністю до першого члена. Перша похідна має вигляд $u'(t) = 2\rho(x, \gamma(t)) \left\langle \dot{\varphi}_{\gamma(t)}, \dot{\gamma}(t) \right\rangle$ або, якщо ввести позначення $\upsilon(t) \overset{\Delta}{=} \left\langle \dot{\varphi}_{\gamma(t)}, \dot{\gamma}(t) \right\rangle$, $u'(t) = 2\rho(x, \gamma(t)) \upsilon(t)$. Диференціюючи $\upsilon(t)$, маємо

$$\upsilon'(t) = \left\langle \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\varphi}, \dot{\gamma} \right\rangle + \left\langle \dot{\varphi}, \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} \right\rangle = \left\langle Z_t'(\rho), \dot{\gamma} \right\rangle + \left\langle \dot{\varphi}, \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} \right\rangle =$$

$$= \frac{\left\langle Z_t(\rho), \dot{\gamma} \right\rangle}{\rho} + \frac{\left\langle \rho Z_t'(\rho) - Z_t(\rho), \dot{\gamma} \right\rangle}{\rho} + \left\langle \dot{\varphi}, \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} \right\rangle.$$

Домноживши скалярно (13) на $\dot{\gamma}(t)$, отримаємо $\left\langle \dot{\varphi}_{\gamma(t)}, \dot{\gamma}(t) \right\rangle^2 + \left\langle Z_t(\rho), \dot{\gamma}(t) \right\rangle = 1$, звідки $\left\langle Z_t(\rho), \dot{\gamma} \right\rangle = 1 - \left\langle \dot{\varphi}, \dot{\gamma}(t) \right\rangle^2 = 1 - \upsilon^2$. Тоді, поклавши $\left\langle B_t, \dot{\gamma} \right\rangle \overset{\Delta}{=} b(t)$, $\left\langle \dot{\varphi}, \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} \right\rangle \overset{\Delta}{=} g(t)$, можна записати

$$\upsilon'(t) = -\frac{\upsilon^2(t)}{\rho} + \frac{1 + b(t)}{\rho} + g(t),$$

звідки $u''(t) = 2[\upsilon^2(t) + \rho(x, \gamma(t)) \upsilon'(t)] = 2[1 + b(t) + \rho(x, \gamma(t)) g(t)]$. Враховуючи, що $u(0) = \rho^2(x, x_0)$, а $u'(0) = 0$ за рахунок ортогональності векторів $\dot{\varphi}_{\gamma(0)}$ і $\dot{\gamma}(0)$, отримуємо

$$u(t) = \rho^2(x, x_0) + t^2 + 2\int_0^t b(\tau)(t - \tau)\, d\tau + 2\int_0^t \rho(x, \gamma(\tau)) g(\tau)(t - \tau)\, d\tau,$$

що й завершує доведення леми.

Зауваження. Якщо S — цілком геодезичний підмноговид $\mathcal{M}$, то $g(t) \equiv 0$. Функція $b(t)$ залежить від кривизни, в плоскому випадку $b(t) \equiv 0$. Отже, в плоскому випадку при цілком геодезичній S $u(t) \equiv \rho^2(x, y) = \rho^2(x_0, x) + d^2(x_0, y)$.

У подальшому нам будуть потрібні оцінки функцій h_1, h_2 та ϕ.

Лема 2. *Якщо виконуються умови 1, то справджуються такі оцінки:*

$$h_1(x, x_0, y) \le c_3\left(\frac{d^3}{6} + \frac{d^2\rho_0}{2} + \frac{d^2\rho_0^2}{2}\right) + \frac{d^2}{2} + d\rho_0,$$

$$h_2(x, x_0, y) \le c_3\left(\frac{d^4}{12} + \frac{d^3\rho_0}{3} + \frac{d^2\rho_0^2}{2}\right) + \frac{d^3}{6} + \frac{d^2\rho_0}{2},$$

$$\phi(x, y) \le \frac{c_4}{4}(\rho_0 + d)^2,$$

де для скорочення виразів введено позначення $\rho_0 \triangleq \rho(x_0, x)$, $d \triangleq d(x_0, y)$.

Доведення. З визначення функцій $h_1(x, x_0, y)$ та $h_2(x, x_0, y)$ безпосередньо можна отримати оцінки

$$h_1(x, x_0, y) \le \int\limits_0^{d(x_0, y)} |B_\tau| d\tau + \int\limits_0^{d(x_0, y)} \rho(x, \gamma(\tau)) d\tau,$$

$$h_2(x, x_0, y) \le 2 \int\limits_0^{d(x_0, y)} |B_\tau|(t - \tau) d\tau + 2 \int\limits_0^{d(x_0, y)} \rho(x, \gamma(\tau))(t - \tau) d\tau.$$

Визначене формулою (14) векторне поле B_t, враховуючи обмеженість кривизни многовиду (умова 1б)), можна оцінити так:

$$|B_t| \le c_3 \int\limits_0^{\rho(x, \gamma(t))} s\, ds = \frac{c_3 \rho^2(x, \gamma(t))}{2}.$$

Для відстані $\rho(x, \gamma(t))$ правильною є оцінка

$$\rho(x, \gamma(t)) = \rho(x, x_0) + \int\limits_0^t \left\langle \dot{\varphi}_{\gamma(\tau)}, \dot{\gamma}(\tau) \right\rangle d\tau \le \rho(x, x_0) + \int\limits_0^t d\tau = \rho_0 + t.$$

Тоді

$$h_1(x, x_0, y) \le \frac{c_3}{2} \int\limits_0^d (\rho_0 + \tau)^2 d\tau + \int\limits_0^d (\rho_0 + \tau) d\tau =$$

$$= c_3\left(\frac{d^3}{6} + \frac{d^2\rho_0}{2} + \frac{d^2\rho_0^2}{2}\right) + \frac{d^2}{2} + d\rho_0,$$

$$h_2(x, x_0, y) \le c_3 \int\limits_0^d (\rho_0 + \tau)^2 (d - \tau) d\tau + 2\int\limits_0^d (\rho_0 + \tau)(d - \tau) d\tau =$$

$$= c_3\left(\frac{d^4}{12} + \frac{d^3\rho_0}{3} + \frac{d^2\rho_0^2}{2}\right) + \frac{d^3}{6} + \frac{d^2\rho_0}{2}.$$

Для функції $a(x, y)$, через яку визначається $\phi(x, y)$, з результатів [5] випливає така оцінка:

$$0 \le a(\varphi(\rho), y) \le \int\limits_0^{\rho(\varphi(\rho),\, y)} s\,\mathrm{Ric}(\varphi(s))(\dot\varphi(s), \dot\varphi(s))\,ds \le$$

$$\le c_4 \int\limits_0^{\rho(\varphi(\rho),\, y)} s\,ds = \frac{c_4\rho^2(\varphi(\rho), y)}{2}.$$

Тоді

$$\phi(x, y) = \int\limits_0^{\rho(\varphi(\rho),\, y)} \frac{a(\varphi(s), y)}{s}\,ds \le c_4 \int\limits_0^{\rho(\varphi(\rho),\, y)} \frac{s\,ds}{2} = \frac{c_4\rho^2(\varphi(\rho), y)}{4} \le \frac{c_4}{4}(\rho_0 + d)^2.$$

Лему доведено.

На підставі леми 1 підінтегральну функцію виразу $W^\delta(t, x)$ можна подати у вигляді

$$\frac{\rho(x_0, x) + h_1(x, x_0, y)}{\left(\rho^2(x_0, x) + d^2(x_0, y) + h_2(x, x_0, y)\right)^{n/2}} \exp\left\{\frac{\phi(x, y)}{2}\right\}.$$

Якщо в знаменнику виділити вираз $\left(\rho^2(x_0, x) + d^2(x_0, y)\right)^{n/2}$, отримаємо

$$\left(\frac{\rho(x_0, x) + h_1(x, x_0, y)}{\left(\rho^2(x_0, x) + d^2(x_0, y)\right)^{n/2}}\right) \frac{\exp\{\phi(x, y)/2\}}{\left(1 + h_2(x, x_0, y)/\left(\rho^2(x_0, x) + d^2(x_0, y)\right)\right)^{n/2}}.$$

До другого множника, зображаючи його як добуток двох функцій, застосуємо формулу Тейлора по $d(x_0, y)$. Залишок візьмемо у формі Лагранжа:

$$\frac{1}{\left(1 + h_2(x, x_0, y)/\left(\rho^2(x_0, x) + d^2(x_0, y)\right)\right)^{n/2}} = 1 - \frac{n}{2}\frac{h_2(x, x_0, \theta y)}{\left(\rho^2(x_0, x) + \theta d^2(x_0, y)\right)},$$

$$\exp\left\{-\frac{\phi(x, y)}{2}\right\} = 1 - \frac{\phi(x, \theta y)}{2}.$$

Отже, підінтегральна функція має вигляд

$$\frac{\langle \dot\varphi_y, \mathbf{v}_y \rangle}{\rho^{n-1}} \exp\left\{-\frac{\phi(x, y)}{2}\right\} = \frac{\rho(x_0, x) + h_1(x, x_0, y)}{\left(\rho^2(x_0, x) + d^2(x_0, y)\right)^{n/2}}\left(1 - \frac{\phi(x, \theta y)}{2}\right) \times$$

$$\times \left(1 - \frac{n}{2}\frac{h_2(x, x_0, \theta y)}{\rho^2(x_0, x) + \theta d^2(x_0, y)}\right) = \frac{\rho(x_0, x) + h_1(x, x_0, y)}{\left(\rho^2(x_0, x) + d^2(x_0, y)\right)^{n/2}} -$$

$$-\left(\frac{\phi(x, \theta y)}{2} + \frac{n}{2}\frac{h_2(x, x_0, \theta y)}{\rho^2(x_0, x) + \theta d^2(x_0, y)}\right)\frac{\rho(x_0, x) + h_1(x, x_0, y)}{\left(\rho^2(x_0, x) + d^2(x_0, y)\right)^{n/2}} +$$

$$+ \frac{n}{4}\frac{\phi(x, \theta y) h_2(x, x_0, \theta y)}{\rho^2(x_0, x) + \theta d^2(x_0, y)}\frac{\rho(x_0, x) + h_1(x, x_0, y)}{\left(\rho^2(x_0, x) + d^2(x_0, y)\right)^{n/2}}. \tag{16}$$

Лема 3. *За умов леми 2 правильними є співвідношення*

$$\lim_{\substack{(t, x) \to (t_0, x_0) \\ x \in D}} \frac{\Gamma(n/2)}{\pi^{n/2}} \int\limits_{S_\delta(x_0)} \frac{\rho(x_0, x) + h_1(x, x_0, y)}{\left(\rho^2(x_0, x) + d^2(x_0, y)\right)^{n/2}}\,dS_y = -1,$$

$$\lim_{\substack{(t,x)\to(t_0,x_0)\\ x\notin D}} \frac{\Gamma(n/2)}{\pi^{n/2}} \int\limits_{S_\delta(x_0)} \frac{\rho(x_0,x)+h_1(x,x_0,y)}{\left(\rho^2(x_0,x)+d^2(x_0,y)\right)^{n/2}} dS_y = 1.$$

Доведення. Подамо підінтегральний вираз у вигляді суми двох доданків і оцінимо відповідні інтеграли окремо. Почнемо з функції

$$W_1^\delta(t,x) = \frac{\Gamma(n/2)}{\pi^{n/2}} \int\limits_{S_\delta(x_0)} \frac{\rho(x_0,x)}{\left(\rho^2(x_0,x)+d^2(x_0,y)\right)^{n/2}} dS_y.$$

Інтеграл взято по кулі $S_\delta(x_0)$ на підмноговиді S. Переходячи до інтегрування по тій самій кулі в дотичному просторі $T_{x_0}S$ (враховуючи, що $d^2(x_0,y) = \|\xi\|^2$), отримуємо

$$W_1^\delta(t,x) = \frac{\Gamma(n/2)}{\pi^{n/2}} \int\limits_{T_{x_0}S_\delta(x_0)} \frac{\rho(x_0,x)J(x_0,\xi)}{\left(\rho^2(x_0,x)+\|\xi\|^2\right)^{n/2}} dS_\xi,$$

де

$$J(x,\xi) = \sqrt{\frac{\det G(\mathrm{Exp}_x \xi)}{\det G(x)}}\left|\det\frac{\partial}{\partial\xi}\mathrm{Exp}_x \xi\right|,$$

G — метричний тензор на підмноговиді S. Функція $J(x,\xi)$ є гладкою і обмеженою. Розкладемо її за формулою Тейлора по ξ в околі нуля з точністю до члена нульового порядку: $J(x,\xi) = 1 + \langle \partial J(x,\theta\xi)/\partial\xi, \xi\rangle$. Тоді

$$W_1^\delta(t,x) = \frac{\Gamma(n/2)}{\pi^{n/2}} \int\limits_{T_{x_0}S_\delta(x_0)} \left(\frac{\rho(x_0,x)}{\left(\rho^2(x_0,x)+\|\xi\|^2\right)^{n/2}} + \frac{\rho(x_0,x)\langle \partial J(x,\theta\xi)/\partial\xi, \xi\rangle}{\left(\rho^2(x_0,x)+\|\xi\|^2\right)^{n/2}} \right) dS_\xi.$$

Функція $\partial J(x,\theta\xi)/\partial\xi$ обмежена, оскільки $J(x,\xi)$ гладка, тому другий доданок можна оцінити на $T_{x_0}S_\delta(x_0)$ так:

$$\frac{\rho(x_0,x)\langle \partial J(x,\theta\xi)/\partial\xi, \xi\rangle}{\left(\rho^2(x_0,x)+\|\xi\|^2\right)^{n/2}} < C\frac{\rho(x_0,x)\|\xi\|}{\left(\rho^2(x_0,x)+\|\xi\|^2\right)^{n/2}}.$$

Введемо на $T_{x_0}S_\delta(x_0)$ аналог сферичних координат

$$\xi = \begin{pmatrix} r\cos\varphi_1 \\ r\sin\varphi_1\cos\varphi_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ r\sin\varphi_1\ldots\sin\varphi_{n-3}\cos\varphi_{n-2} \\ r\sin\varphi_1\ldots\sin\varphi_{n-3}\sin\varphi_{n-2} \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{l} 0 \le r \le \delta, \\ 0 \le \varphi_1 \le \pi, \\ \cdots\cdots\cdots \\ 0 \le \varphi_{n-3} \le \pi, \\ 0 \le \varphi_{n-2} \le 2\pi, \end{array}$$

якобіан переходу $J = r^{n-2}\sin^{n-3}\varphi_1\ldots\sin\varphi_{n-3}$ і $dS_\xi = J\,dr\,d\varphi_1\ldots d\varphi_{n-3}\,d\varphi_{n-2}$.

Тоді перший підінтегральний доданок у виразі для $W_1^\delta(t,x)$ спрощується до вигляду

$$\int\limits_{T_{x_0}S_\delta(x_0)} \frac{\rho(x_0,x)}{\left(\rho_0^2+\|\xi\|^2\right)^{n/2}} dS_\xi =$$

$$= \int\limits_0^\delta \frac{\rho_0 r^{n-2}dr}{\left(\rho_0^2+r^2\right)^{n/2}} \int\limits_0^\pi \sin^{n-3}\varphi_1\,d\varphi_1 \ldots \int\limits_0^\pi \sin\varphi_{n-3}\,d\varphi_{n-3} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi_{n-2} =$$

$$= \frac{2\pi^{(n-1)/2}}{\Gamma((n-1)/2)}\int_0^{\delta}\frac{\rho_0 r^{n-2}dr}{\left(\rho_0^2+r^2\right)^{n/2}},$$

а другий — до вигляду

$$\int_{T_{x_0}S_\delta(x_0)}\frac{\rho_0\|\xi\|}{\left(\rho_0^2+\|\xi\|^2\right)^{n/2}}dS_\xi = \frac{2\pi^{(n-1)/2}}{\Gamma((n-1)/2)}\int_0^{\delta}\frac{\rho_0 r^{n-1}dr}{\left(\rho_0^2+r^2\right)^{n/2}}.$$

Виконаємо ще одну заміну $r=\rho_0\operatorname{tg}\upsilon$, $r^2+\rho_0^2=\rho_0^2/\cos^2\upsilon$, $dr=\rho_0\,d\upsilon/\cos^2\upsilon$ і обчислимо границю $W_1^{\delta}(t,x)$ при $(t,x)\to(t_0,x_0)$, коли x лежить зовні області D. Границя для першого доданка дорівнює

$$\frac{\Gamma(n/2)}{\pi^{n/2}}\lim_{\substack{(t,x)\to(t_0,x_0)\\ x\notin D}}\int_{T_{x_0}S_\delta(x_0)}\frac{\rho(x_0,x)}{\left(\rho^2(x_0;x)+\|\xi\|^2\right)^{n/2}}dS_\xi =$$

$$= \frac{2\Gamma(n/2)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma((n-1)/2)}\lim_{\rho_0\to 0}\int_0^{\delta}\frac{\rho_0 r^{n-2}dr}{\left(\rho_0^2+r^2\right)^{n/2}} =$$

$$= \frac{2\Gamma(n/2)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma((n-1)/2)}\int_0^{\pi/2}\sin^{n-2}\upsilon\,d\upsilon = \frac{2\Gamma(n/2)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma((n-1)/2)}\frac{\Gamma(1/2)\Gamma((n-1)/2)}{2\Gamma(n/2)} = 1,$$

а для другого —

$$\frac{\Gamma(n/2)}{\pi^{n/2}}\lim_{\substack{(t,x)\to(t_0,x_0)\\ x\notin D}}\int_{T_{x_0}S_\delta(x_0)}\frac{\rho(x_0,x)\langle\partial J(x,\theta\xi)/\partial\xi,\xi\rangle}{\left(\rho^2(x_0;x)+\|\xi\|^2\right)^{n/2}}dS_\xi \le$$

$$\le C\frac{2\Gamma(n/2)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma((n-1)/2)}\lim_{\rho_0\to 0}\int_0^{\delta}\frac{\rho_0 r^{n-1}dr}{\left(\rho_0^2+r^2\right)^{n/2}} \le$$

$$\le C\frac{2\Gamma(n/2)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma((n-1)/2)}\lim_{\rho_0\to 0}\rho_0\int_0^{\operatorname{arctg}(\delta/\rho_0)}\frac{d\upsilon}{\cos\upsilon} =$$

$$= C\frac{2\Gamma(n/2)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma((n-1)/2)}\lim_{\rho_0\to 0}\frac{\rho_0}{2}\ln\frac{\sqrt{\rho_0^2+\delta^2}+\delta}{\sqrt{\rho_0^2+\delta^2}-\delta} = 0.$$

Отже,

$$\lim_{\substack{(t,x)\to(t_0,x_0)\\ x\notin D}} W_1^{\delta}(t,x) = 1.$$

Коли ж точка x лежить усередині області D, остання заміна змінних має вигляд $r=-\rho_0\operatorname{tg}\upsilon$, $r^2+\rho_0^2=\rho_0^2/\cos^2\upsilon$, $dr=\rho_0\,d\upsilon/\cos^2\upsilon$, і границя при $(t,x)\to(t_0,x_0)$ буде такою ж за модулем, але протилежною за знаком:

$$\lim_{\substack{(t,x)\to(t_0,x_0)\\ x\in D}} W_1^{\delta}(t,x) = -1.$$

Тепер розглянемо функцію

$$W_2^\delta(t,x) = \frac{\Gamma(n/2)}{\pi^{n/2}} \int\limits_{S_\delta(x_0)} \frac{h_1(x,x_0,y)}{\left(\rho^2(x_0,x)+d^2(x_0,y)\right)^{n/2}} dS_y.$$

Враховуючи оцінку для $h_1(x,x_0,y)$ з формулювання леми 2, можна записати

$$W_2^\delta(t,x) \le \frac{\Gamma(n/2)}{\pi^{n/2}} \int\limits_{S_\delta(x_0)} \frac{c_3\left(d^3+3d^2\rho_0+3d\rho_0^2\right)/6+\left(d^2+2d\rho_0\right)/2}{\left(\rho^2+d^2\right)^{n/2}} dS_y.$$

За схемою, застосованою для функції $W_1^\delta(t,x)$, легко довести, що

$$W_2^\delta(t,x) < \frac{c_3}{6}\frac{\delta^2}{2} + \frac{\delta}{2}.$$

Оскільки δ можна взяти як завгодно малим, функція $W_2^\delta(t,x)$ є неперервною, що й завершує доведення леми.

Перший доданок у розкладі (16) має границі, встановлені лемою 3. Покажемо, що всі інші доданки є неперервними функціями в точці (t_0,x_0).

Використовуючи оцінку $h_2(x,x_0,y)$ з формулювання леми 2 і виконуючи заміну $\theta d = \rho_0 \operatorname{tg}\vartheta$, $\theta^2 d^2 + \rho_0^2 = \dfrac{\rho_0^2}{\cos^2\vartheta}$, отримуємо таку оцінку:

$$\frac{h_2(x,x_0,\theta y)}{\left(\rho^2(x_0,x)+\theta^2 d^2(x_0,y)\right)} \le \left[c_3\rho_0^2\left(\frac{\operatorname{tg}^2\vartheta}{12}+\frac{\operatorname{tg}\vartheta}{3}+\frac{1}{2}\right)+\rho_0\left(\frac{\operatorname{tg}\vartheta}{3}+1\right)\right]\sin^2\vartheta.$$

На інтервалі $\left[0, \operatorname{arctg}\left(\dfrac{\delta}{\rho_0}\right)\right]$ функція справа є монотонно зростаючою, тому

$$\frac{h_2(x,x_0,\theta y)}{\left(\rho^2(x_0,x)+\theta^2 d^2(x_0,y)\right)} \le \frac{c_3\rho_0^2}{2} + \rho_0 + \frac{c_3\rho_0\delta}{3} + \frac{\delta}{3} + \frac{c_3\delta^2}{12} \xrightarrow[\rho_0\to 0]{} \frac{\delta}{3} + \frac{c_3\delta^2}{12}.$$

З аналогічної оцінки виразу $\dfrac{\phi(x,\theta y)}{2}$ випливає

$$\frac{\phi(x,\theta y)}{2} \le \frac{c_4}{8}(\rho_0+\delta)^2 \xrightarrow[\rho_0\to 0]{} \frac{c_4}{8}\delta^2.$$

Отже,

$$\lim_{\substack{(t,x)\to(t_0,x_0)\\ x\in D}} \frac{\Gamma(n/2)}{\pi^{n/2}} \int\limits_{S_\delta(x_0)} \left(\frac{\phi(x,\theta y)}{2} + \frac{n}{2}\frac{h_2(x,x_0,\theta y)}{\rho^2(x_0,x)+\theta d^2(x_0,y)}\right) \times$$

$$\times \frac{\rho(x_0,x)+h_1(x,x_0,y)}{\left(\rho^2(x_0,x)+d^2(x_0,y)\right)^{n/2}} dS_y \le$$

$$\le \left[\frac{c_4\delta^2}{8} + \frac{n}{2}\left(\frac{\delta}{3}+\frac{c_3\delta^2}{12}\right)\right] \lim_{\substack{(t,x)\to(t_0,x_0)\\ x\in D}} \frac{\Gamma(n/2)}{\pi^{n/2}} \int\limits_{S_\delta(x_0)} \frac{\rho(x_0,x)+h_1(x,x_0,y)}{\left(\rho^2(x_0,x)+d^2(x_0,y)\right)^{n/2}} dS_y =$$

$$= \left[\frac{c_4\delta^2}{8} + \frac{n}{2}\left(\frac{\delta}{3}+\frac{c_3\delta^2}{12}\right)\right]$$

і

$$\lim_{\substack{(t,x)\to(t_0,x_0)\\ x\notin D}} \frac{\Gamma(n/2)}{\pi^{n/2}} \int\limits_{S_\delta(x_0)} \left(\frac{n}{4} \frac{\phi(x,\theta y) h_2(x,x_0,\theta y)}{\left(\rho^2(x_0,x)+\theta d^2(x_0,y)\right)} \right) \frac{\rho(x_0,x)+h_1(x,x_0,y)}{\left(\rho^2(x_0,x)+d^2(x_0,y)\right)^{n/2}} dS_y \le$$

$$\le \left[\frac{n}{2} \frac{c_4 \delta^2}{8} \left(\frac{\delta}{3} + \frac{c_3 \delta^2}{12} \right) \right],$$

що доводить неперервність цих функцій.

Зібравши разом всі знайдені границі, отримаємо (якщо через W_3^δ позначити решту доданків, що не ввійшли у W_1^δ та W_2^δ)

$$\lim_{\substack{(t,x)\to(t_0,x_0)\\ x\in D}} V_0(t,x) = \lim_{\substack{(t,x)\to(t_0,x_0)\\ x\in D}} \left[W_1^\delta(t,x) + W_2^\delta(t,x) + W_3^\delta(t,x) + W'(t,x) \right] =$$

$$= -1 + \left[W^\delta(t_0,x_0) + W'(t_0,x_0) \right] = -1 + V_0(t_0,x_0),$$

і, аналогічно,

$$\lim_{\substack{(t,x)\to(t_0,x_0)\\ x\notin D}} V_0(t,x) = 1 + V_0(t_0,x_0).$$

2 Перейдемо до випадку довільної неперервної густини $\mu(t,x)$.

Доведемо, що при $(t_0,x_0)\in\overline{\Omega}$ різниця потенціалів з даною густиною $\mu(t,x)$ і з постійною густиною $\mu(t_0,x_0)$ є функцією, визначеною скрізь в $(-\infty,\infty)\times\mathcal{M}$ і неперервною у точці (t_0,x_0). Для цього, як і вище, достатньо розглянути лише частину $V_1(t,x)$ потенціалу $V(t,x)$. Тоді

$$V_1(t,x) - \mu(t_0,x_0) V_0(t,x) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{t_1}^{t} d\tau \int\limits_{S} \left(\mu(\tau,y) - \mu(t_0,x_0)\right) \exp\left\{ -\frac{\rho^2(x,y)}{2(t-\tau)} - \frac{\phi(x,y)}{2} \right\} \frac{\rho(x,y)}{(t-\tau)^{n/2+1}} \langle \dot{\varphi}_y, \mathbf{v}_y \rangle dS_y -$$

$$- \frac{\mu(t_0,x_0)}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{-\infty}^{t_1} d\tau \int\limits_{S} \exp\left\{ -\frac{\rho^2(x,y)}{2(t-\tau)} - \frac{\phi(x,y)}{2} \right\} \frac{\rho(x,y)}{(t-\tau)^{n/2+1}} \langle \dot{\varphi}_y, \mathbf{v}_y \rangle dS_y. \tag{17}$$

Другий інтеграл, що стоїть у правій частині формули (17), неперервний в околі точки (t_0,x_0), оскільки $t_1 < t < t_2$ і функція під інтегралом є інтегровною.

Означення. *Нехай функція $f(P,Q)$, $P\in\mathbb{R}^{n+1}$, $Q\in\overline{\Omega}$, неперервна при $P\ne Q$. Будемо говорити, що інтеграл $\int_\Omega f(P,Q)\,d\Omega_Q$, де $d\Omega_Q = dS_Q d\tau$ — елемент n-вимірної площі поверхні Ω, рівномірно збігається в точці $P_0\in\overline{\Omega}$, якщо для будь-якого $\varepsilon>0$ можна вибрати такий окіл U точки P_0 в $\mathbb{R}^{n+1}$ і окіл Ω_ε точки P_0 на $\overline{\Omega}$, що при всіх $P\in U$ інтеграл $\int_{\Omega_\varepsilon} f(P,Q)\,d\Omega_Q$ існує і $\left|\int_{\Omega_\varepsilon} f(P,Q)\,d\Omega_Q\right| < \varepsilon$.*

Для доведення неперервності першого інтеграла в правій частині (17) скористаємось теоремою з [6, с. 287], за якою функція $F(P)=\int_\Omega f(P,Q)\,d\Omega_Q$ визначена в околі точки P_0 і неперервна в точці P_0, якщо $\int_\Omega f(P,Q)\,d\Omega_Q$ рівномірно збігається в точці $P_0\in\overline{\Omega}$.

Розглянемо інтеграл

$$\int_{t_1}^{t} d\tau \int_S [\mu(\tau, y) - \mu(t_0, x_0)] \exp\left\{-\frac{\rho^2(x, y)}{2(t-\tau)} - \frac{\phi(x, y)}{2}\right\} \frac{\rho(x, y)}{(t-\tau)^{n/2+1}} \langle \dot{\varphi}_y, \mathbf{v}_y \rangle dS_y$$

і доведемо, що він рівномірно збігається у точці (t_0, x_0).

Оскільки функція $V_0(t, x)$ з (12) неперервна скрізь в $(-\infty, \infty) \times \mathcal{M}$, крім поверхні $\overline{\Omega}$, на якій вона має скінченний стрибок (від -1 до 1), а S — компактна поверхня, то існує така стала C, що для всіх $x \in \mathcal{M}$

$$\int_S \frac{\langle \dot{\varphi}_y, \mathbf{v}_y \rangle}{\rho^{n-1}} \exp\left\{-\frac{\phi(x, y)}{2}\right\} |dS_y| < C.$$

Задамо довільне $\varepsilon > 0$ і виберемо на $\overline{\Omega}$ такий окіл S_ε точки (t_0, x_0), що

$$|\mu(t, x) - \mu(t_0, x_0)| < \frac{\varepsilon}{2^{n/2}\Gamma(n/2)C} \quad \text{при} \quad (t, x) \in S_\varepsilon.$$

Тоді

$$\left| \int_{t_1}^{t} d\tau \int_{S_\varepsilon} [\mu(\tau, x) - \mu(t_0, x_0)] \exp\left\{-\frac{\rho^2(x, y)}{2(t-\tau)} - \frac{\phi(x, y)}{2}\right\} \frac{\rho(x, y)}{(t-\tau)^{n/2+1}} \langle \dot{\varphi}_y, \mathbf{v}_y \rangle dS_y \right| \le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{2^{n/2}\Gamma(n/2)C} \int_{t_1}^{t} d\tau \int_{S_\varepsilon} \exp\left\{-\frac{\rho^2(x, y)}{2(t-\tau)} - \frac{\phi(x, y)}{2}\right\} \frac{\rho(x, y)}{(t-\tau)^{n/2+1}} |\langle \dot{\varphi}_y, \mathbf{v}_y \rangle| |dS_y| =$$

$$= \frac{\varepsilon}{C} \int_{S_\varepsilon} \frac{\langle \dot{\varphi}_y, \mathbf{v}_y \rangle}{\rho^{n-1}} \exp\left\{-\frac{\phi(x, y)}{2}\right\} |dS_y| < \varepsilon.$$

Таким чином, перший інтеграл у правій частині (17) рівномірно збігається в точці (t_0, x_0) (за окіл U можна вибрати $(-\infty, \infty) \times \mathcal{M}$). Це означає, що даний інтеграл як функція t і x неперервний у точці (t_0, x_0).

Отже, потенціал подвійного шару визначений скрізь в $(-\infty, \infty) \times \mathcal{M}$, в тому числі на $\overline{\Omega}$, та існують границі $V(t, x)$ при $(t, x) \to (t_0, x_0)$, коли $x \in D$ і $x \notin D$.

Теорему доведено.

1. *Ландис Е. М.* Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов. – М.: Наука, 1971. – 287 с.
2. *Маккин Г.* Стохастические интегралы. – М.: Мир, 1973. – 184 с.
3. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. – М.: Мир, 1968. – 427 с.
4. *Бондаренко В. Г.* Метод параметрикса для параболического уравнения на римановом многообразии // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 11. – С. 1443 – 1448.
5. *Бондаренко В. Г.* Оценки ядра теплопроводности на многообразии неположительной кривизны // Там же. – 1998. – **50**, № 8. – С. 1129 – 1136.
6. *Петровский И. Г.* Лекции об уравнениях с частными производными. – М.: Наука, 1961. – 400 с.

Одержано 13.07.2001