УДК 519.85

О. О. Ємець (Полтав. техн. ун-т),
Т. М. Барболіна (Полтав. пед. ун-т)

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ НЕЛІНІЙНОЇ УМОВНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ НА РОЗМІЩЕННЯХ МЕТОДОМ ВІДСІКАННЯ

We propose an exact method of the solution of minimization problem on arrangements of a linear objective function with linear and concave additional restrictions. We prove the finiteness of the proposed algorithm of cut-off method.

Пропонується точний метод розв'язування задачі мінімізації на розміщеннях лінійної цільової функції з лінійними й угнутими додатковими обмеженнями. Доведено скінченність запропонованого алгоритму методу відсікання.

У теорії оптимізації значна увага приділяється евклідовій комбінаторній оптимізації (див., наприклад, [1 – 6]), важливим класом задач якої є задачі на розміщеннях. Дана стаття присвячена розробці точного методу розв'язування деяких нелінійних задач на розміщеннях, який ґрунтується на ідеях відсікання.

У подальшому викладі будемо користуватися такими фактами та позначеннями (термінологію стосовно евклідових комбінаторних множин запозичено в [1]).

Мультимножиною $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_\eta\}$ називають сукупність елементів, серед яких можуть бути й однакові. Будь-яку мультимножину G можна задати її основою $S(G) = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$, під якою розуміють кортеж (упорядковану множину) усіх її різних елементів, і кратністю — числом повторень кожного елемента основи цієї множини. Кортеж кратностей називається первинною специфікацією $[G] = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ (очевидно, що $\eta = \eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_n$). Не порушуючи загальності подальших міркувань, можемо вважати, що

$$e_i < e_{i+1} \quad \forall i \in J_{n-1}, \qquad g_i \le g_{i+1} \quad \forall i \in J_{\eta-1}$$

(тут і далі під J_n розуміємо множину n перших натуральних чисел).

Назвемо $\bar{k}$-вибіркою підмультимножину в мультимножині G, яка містить $\bar{k}$ елементів. Елементами загальної множини $\bar{k}$-розміщень $E_{\eta n}^{\bar{k}}(G)$ є всі $\bar{k}$-вибірки з мультимножини G.

Розглянемо задачу мінімізації лінійної цільової функції

$$C(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_kx_k$$

на загальній множині розміщень з лінійними й угнутими додатковими обмеженнями: знайти пару $\langle C(x^*), x^* \rangle$ таку, що

$$C(x^*) = \min_{x \in R^k} \sum_{j=1}^{k} c_jx_j, \qquad x^* = \arg\min_{x \in R^k} \sum_{j=1}^{k} c_jx_j \tag{1}$$

при комбінаторній умові

$$(x_1, \ldots, x_s) \in E_{\eta n}^{\bar{k}}(G), \quad r, s \in J_k, \quad r < s, \quad \bar{k} = s - r + 1 > 1, \tag{2}$$

та додаткових (некомбінаторних) обмеженнях

$$Q_i(x) \ge 0, \quad i \in J_{m_1}, \tag{3}$$

$$q_i(x) \ge 0, \quad i \in J_{m_2}, \tag{4}$$

де функції $Q_i(x)$ — лінійні, а $q_i(x)$ — угнуті.

Для розв'язування задачі (1), (3), (4) можна використати метод відсікаючих площин Келлі [7], згідно з яким розв'язок одержується шляхом розв'язування послідовності підзадач, які утворюються при накладанні додаткових обмежень з метою уточнення початкового грубого наближення допустимої області. Ідеї відсікання тієї частини допустимої області, яка не містить оптимуму, можна застосовувати до розв'язування лінійних умовних задач евклідової комбінаторної оптимізації на переставленнях і розміщеннях [8, 9]. У даній роботі пропонується метод відсікання розв'язування задачі (1) – (4), який ґрунтується на синтезі ідей методу Келлі й методу комбінаторного відсікання для розміщень.

Розглянемо задачу, що є релаксацією задачі (1) – (4): знайти пару (1) при умовах

$$x_j \in S(G) \quad \forall j \in I = \{r, r+1, \ldots, s\}, \tag{5}$$

$$C(x) \in A, \tag{6}$$

$$x \in Z_h, \tag{7}$$

де A — скінченна або зчисленна множина, Z_h — многогранна множина, що містить допустиму область задачі (1) – (4), причому кожна точка множини Z_h задовольняє всі лінійні додаткові обмеження (3). Задача (1), (5) – (7) є задачею дискретної оптимізації, і її розв'язок можна одержати, наприклад, за допомогою алгоритму Дальтона – Ллевеліна [10].

Нехай $\langle C(x^h), x^h \rangle$ — розв'язок задачі (1), (5) – (7). Оскільки за способом побудови множини Z_h точка $x^h = \left(x_1^h, x_2^h, \ldots, x_k^h\right)$ задовольняє всі обмеження (3), то можливі такі випадки:

1) $\left(x_r^h, \ldots, x_s^h\right) \in E_{\eta n}^{\bar{k}}(G), \quad \forall i \in J_{m_2} \quad q_i(x^h) \geq 0;$

2) $\left(x_r^h, \ldots, x_s^h\right) \in E_{\eta n}^{\bar{k}}(G), \quad \exists\, i \in J_{m_2} \quad q_i(x^h) < 0;$

3) $\left(x_r^h, \ldots, x_s^h\right) \notin E_{\eta n}^{\bar{k}}(G).$

У першому випадку, очевидно, розв'язано й задачу (1) – (4). У другому випадку точка є розміщенням, але не належить допустимій області задачі (1), (3), (4), отже, необхідно уточнити множину Z_h шляхом накладання додаткового обмеження. У третьому випадку точка не є розміщенням, тому відсікаємо окіл точки x^h, який не містить допустимих точок задачі (1) – (4). Розглянемо два останніх випадки детальніше.

Випадок 2. Одержаний розв'язок x^h задовольняє умову (2), але справджує не всі нерівності (4). Тоді відповідно до методу Келлі шукаємо таке нелінійне обмеження, яке порушується найбільш сильно, тобто таке $q_u(x)$, що

$$-q_u(x^h) = \max_{i \in J_{m_2}} \left\{-q_i(x^h)\right\}, \tag{8}$$

і лінеаризуючи $q_u(x)$, додаємо обмеження-відсікання

$$x_{k+h} = q_u(x^h) + \nabla q_u(x^h)(x - x^h) \geq 0. \tag{9}$$

Оскільки допустима область, що визначається лінійними й угнутими функціями, є опуклою множиною, то додавання обмеження (9) не може призвести до втрати частини допустимої області [7].

Перетворимо нерівність (9). Із симплекс-таблиці, з якої одержано точку x^h як розв'язок задачі лінійного програмування, випливає, що для будь-якої координати x_ν допустимої точки $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$ справджується рівність

$$x_\nu = \alpha_{\nu 0} + \sum_{j \in J} (-\alpha_{\nu j}) x_j, \tag{10}$$

де J — множина номерів небазисних змінних, а $\alpha_{\nu j}$ — елементи симплекс-таблиці в повній формі [10], з якої одержано точку x^h.

Тоді нерівність (9) можна записати так:

$$q_u(x^h) + \sum_{\nu=1}^{k} \frac{\partial q_u}{\partial x_\nu}(x^h)\left(\alpha_{\nu 0} + \sum_{j \in J} (-\alpha_{\nu j}) x_j - x_\nu^h \right) \ge 0.$$

Враховуючи, що $x_\nu^h = \alpha_{\nu 0}$ для будь-якого $\nu \in J_k$, одержуємо

$$q_u(x^h) + \sum_{\nu=1}^{k} \frac{\partial q_u}{\partial x_\nu}(x^h)\left(\sum_{j \in J} (-\alpha_{\nu j}) x_j \right) \ge 0,$$

$$\sum_{j \in J} \left(\sum_{\nu=1}^{k} (-\alpha_{\nu j}) \frac{\partial q_u}{\partial x_\nu}(x^h) \right) x_j + q_u(x^h) \ge 0.$$

Позначивши

$$\gamma_j = \sum_{\nu=1}^{k} (-\alpha_{\nu j}) \frac{\partial q_u}{\partial x_\nu}(x^h), \quad j \in J, \quad \gamma_0 = q_u(x^h), \tag{11}$$

отримаємо нерівність

$$x_{k+h} = \sum_{j \in J} \gamma_j x_j + \gamma_0 \ge 0. \tag{12}$$

Випадок 3. Одержаний розв'язок x^h не задовольняє умову (2). У цьому випадку для деякого елемента $e_l \in S(G)$ виконується умова

$$\exists V = \{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\rho\} \subset I, \quad \forall \nu \in V \quad x_\nu^h = e_l, \quad \rho > \eta_l, \tag{13}$$

тобто число ρ координат, що дорівнюють елементу e_l, перевищує кратність цього елемента η_l.

Для відкидання одержаного недопустимого розв'язку додамо лінійну нерівність, яку задовольняють усі допустимі точки і не задовольняє точка x^h. Таку нерівність по аналогії з дискретною оптимізацією [10, 11] називатимемо правильним відсіканням. Будуватимемо його у вигляді (12), використовуючи для обчислення коефіцієнтів γ_j $(j \in J \cup \{0\})$ елементи симплекс-таблиці, що знаходяться в тих рядках, номери яких належать множині V. Якщо умова (13) виконується для кількох елементів основи мультимножини (і отже, існує декілька множин V), то вибір елемента для побудови відсікання здійснюємо за таким правилом.

Правило. Якщо умова (13) виконується для e_1 або e_n (але не для обох одразу), то покладемо l рівним номеру цього елемента. Якщо умова (13) виконується і для e_1, і для e_n, то покладемо l рівним номеру того елемента, для якого різниця $\rho - \eta_l$ є більшою (якщо ці величини рівні, то покладемо, наприклад, $l = 1$). Якщо умова (13) не виконується ні для e_1, ні для e_n, то l, $0 < l < n$, — найменший номер такий, що для e_l виконується умова (13).

Теорема 1. *Нехай* $x^h = \left(x_1^h, x_2^h, \ldots, x_k^h\right)$ *— точка, яка дає розв'язок задачі* (1), (5) – (7), *причому для елемента* $e_l \in S(G)$ *виконується умова* (13). *Тоді нерівність* (12) *задає правильне відсікання, якщо коефіцієнти* γ_j, $j \in J \cup \{0\}$, *обчислюються за формулами*

$$\gamma_0 = \begin{cases} -\sum_{i=1}^{\rho} g_i + \rho e_1, & \text{якщо } l = 1; \\ e_{l-1} - e_l, & \text{якщо } 1 < l < n; \\ \sum_{i=1}^{\rho} g_{\eta-i+1} - \rho e_n, & \text{якщо } l = n, \end{cases} \tag{14}$$

$$\gamma_j = \begin{cases} \sum_{\nu \in V} (-\alpha_{\nu j}), & \textit{якщо} \;\; l = 1; \\ \max_{\nu \in V} \{\gamma_j^\nu\}, & \textit{якщо} \;\; 1 < l < n; \\ \sum_{\nu \in V} \alpha_{\nu j}, & \textit{якщо} \;\; l = n, \end{cases} \tag{15}$$

де

$$\gamma_j^\nu = \begin{cases} \alpha_{\nu j}, & \textit{якщо} \;\; \alpha_{\nu j} \geq 0; \\ \frac{e_l - e_{l-1}}{e_{l+1} - e_l}(-\alpha_{\nu j}), & \textit{якщо} \;\; \alpha_{\nu j} < 0. \end{cases} \tag{16}$$

Доведення. 1. Розглянемо спочатку випадок $l = 1$. Тоді відсікання запишеться так:

$$\sum_{j \in J} \left(\sum_{\nu \in V} (-\alpha_{\nu j}) \right) x_j - \sum_{i=1}^{\rho} g_i + \rho e_1 \geq 0. \tag{17}$$

Очевидно, що точка x^h не задовольняє дану нерівність. Справді, оскільки $\eta_1 < \rho$, то принаймні $g_\rho < e_1$, звідки

$$\sum_{j \in J} \left(\sum_{\nu \in V} (-\alpha_{\nu j}) \right) x_j^h - \sum_{i=1}^{\rho} g_i + \rho e_1 < 0 - \sum_{i=1}^{\rho} e_1 + \rho e_1 = 0.$$

Перевіримо тепер, чи всі допустимі точки задачі (1) – (4) задовольняють нерівність (17) (умова правильності). Враховуючи рівність (10) і той факт, що $\alpha_{\nu 0} = e_1$ для будь-якого $\nu \in V$, одержуємо

$$\sum_{\nu \in V} x_\nu = \sum_{\nu \in V} \alpha_{\nu 0} + \sum_{\nu \in V} \left(\sum_{j \in J} (-\alpha_{\nu j}) x_j \right) = \rho e_1 + \sum_{j \in J} \left(\sum_{\nu \in V} (-\alpha_{\nu j}) \right) x_j .$$

Оскільки $\left(x_r^h, \ldots, x_s^h\right) \in E_{\eta n}^{\bar{k}}(G)$ як допустима точка, то вона задовольняє систему нерівностей, що описує опуклу оболонку множини $E_{\eta n}^{\bar{k}}(G)$ і, зокрема, нерівність

$$\sum_{\nu \in V} x_\nu \geq \sum_{i=1}^{\rho} g_i .$$

Отже,

$$\rho e_1 + \sum_{j \in J} \left(\sum_{\nu \in V} (-\alpha_{\nu j}) \right) x_j \geq \sum_{i=1}^{\rho} g_i ,$$

тобто довільна допустима точка задовольняє нерівність (17). Таким чином, (17) — правильне відсікання.

2. У випадку $l = n$ нерівність набирає вигляду

$$\sum_{j \in J} \left(\sum_{\nu \in V} \alpha_{\nu j} \right) x_j - \sum_{i=1}^{\rho} g_{\eta - i + 1} - \rho e_n \geq 0.$$

Доведення того факту, що ця нерівність є правильним відсіканням, аналогічне випадку 1.

3. Нехай тепер $1 < l < n$. Тоді нерівність (12) набере вигляду

$$\sum_{j \in J} \gamma_j x_j \geq e_l - e_{l-1}, \tag{18}$$

де $\gamma_j = \max_{\nu \in V}\left\{\gamma_j^\nu\right\}$, γ_j^ν обчислюється за формулами (16).

Оскільки

$$\sum_{j \in J} \gamma_j x_j^h = 0 < e_l - e_{l-1},$$

то точка x^h не задовольняє (18). Залишається перевірити виконання умови правильності.

Нехай $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$ — деяка допустима точка, ν — деякий елемент множини V. Введемо такі позначення:

J^- — множина номерів тих небазисних векторів, для яких відповідний елемент $-\alpha_{\nu j}$ симплекс-таблиці не є додатним;

J^+ — множина номерів тих небазисних векторів, для яких відповідний елемент $-\alpha_{\nu j}$ симплекс-таблиці є додатним;

$$S^- = \sum_{j \in J^-} (-\alpha_{\nu j}) x_j, \qquad S^+ = \sum_{j \in J^+} (-\alpha_{\nu j}) x_j.$$

Очевидно, що $S^- \le 0$, $S^+ \ge 0$.

Враховуючи введені позначення і той факт, що $\alpha_{\nu 0} = e_l$ $\forall \nu \in V$, рівність (10) можна записати у вигляді

$$x_\nu = e_l + S^- + S^+.$$

Оскільки точка x — допустима, то принаймні для одного $\nu \in V$ виконується нерівність $x_\nu \ne e_l$ і можливі два випадки:

1) $x_\nu \ge e_{l+1}$;

2) $x_\nu \le e_{l-1}$.

У першому випадку маємо

$$e_l + S^- + S^+ \ge e_{l+1},$$

$$S^- + S^+ \ge e_{l+1} - e_l.$$

Оскільки $S^- \le 0$, то $S^+ \ge e_{l+1} - e_l$. Помноживши обидві частини нерівності на $\dfrac{e_l - e_{l-1}}{e_{l+1} - e_l} > 0$, одержимо

$$\frac{e_l - e_{l-1}}{e_{l+1} - e_l} S^+ \ge e_l - e_{l-1},$$

$$\frac{e_l - e_{l-1}}{e_{l+1} - e_l} S^+ - S^- \ge e_l - e_{l-1}. \tag{19}$$

У другому випадку

$$e_l + S^- + S^+ \ge e_{l-1},$$

$$-(S^- + S^+) \ge e_l - e_{l-1},$$

$$-S^- \ge e_l - e_{l-1}.$$

Оскільки $\dfrac{e_l - e_{l-1}}{e_{l+1} - e_l} S^+ \ge 0$, то виконується нерівність (19). Враховуючи введені позначення, одержуємо

$$\sum_{j \in J^+} \frac{e_l - e_{l-1}}{e_{l+1} - e_l}(-\alpha_{\nu j})x_j - \sum_{j \in J^-}(-\alpha_{\nu j})x_j \geq e_l - e_{l-1},$$

звідки на основі (16) маємо

$$\sum_{j \in J^+} \gamma_j^\nu x_r + \sum_{j \in J^-} \gamma_j^\nu x_r \geq e_l - e_{l-1},$$

$$\sum_{j \in J} \gamma_j^\nu x_j \geq e_l - e_{l-1}.$$

А оскільки внаслідок (15) для будь-якого $j \in J$ $\gamma_j \geq \gamma_j^\nu$, то

$$\sum_{j \in J} \gamma_j x_j \geq \sum_{j \in J} \gamma_j^\nu x_j \geq e_l - e_{l-1},$$

тобто довільна допустима точка задачі (1) – (4) задовольняє нерівність (18). Враховуючи, що x^h цю нерівність не задовольняє, одержуємо, що нерівність (18) — правильне відсікання. Теорему доведено.

Отже, якщо одержана в результаті розв'язування задачі (1), (5) – (7) точка x^h не є допустимою, то можливі побудова відсікання вигляду (12), яке задовольняють усі допустимі точки, і перехід до наступної задачі вигляду (1), (5) – (7), де область Z_{h+1} визначається так:

$$Z_{h+1} = Z_h \cap \{x \mid x_{k+h}(x) \geq 0\}.$$

Слід зазначити, що кількість додаткових обмежень на кожній ітерації зростає. Розглянемо можливість відкидання деяких нерівностей, які не є істотними для розв'язування наступних релаксованих задач. У випадку комбінаторних відсікань можна використати підхід, запропонований Гоморі для задач дискретної оптимізації [11]. Оскільки додаткове обмеження (12) призначене тільки для відсікання недопустимого розв'язку розглянутої допоміжної задачі та переходу до наступної задачі, то відповідну нерівність можна відкинути, як тільки змінну x_{h+k} буде виведено з базису.

Ті з нерівностей вигляду (12), коефіцієнти яких обчислюються за формулами (10), додаються до системи обмежень з метою уточнення допустимої області, тому для їх відкидання можна застосувати правило, яке використовується в алгоритмі методу Келлі. Нехай на h- та i-й ітераціях $(h > i)$ одержано відповідно розв'язки x^h та x^i, причому вони задовольняють умову (2), але справджують не всі нерівності (4). Тоді нерівність $x_{k+i} \geq 0$, яка додавалася на i-й ітерації, відкидається на h-й ітерації, якщо виконуються умови

$$x_{k+i}(x^h) > 0, \quad x_{k+i}(x^i) \leq C(x^h) - C(x^i). \tag{20}$$

Таким чином, для розв'язування задачі (1) – (4) можна запропонувати такий алгоритм відсікання:

1. Покладаємо $h = 1$, $I_1 = \varnothing$, $I_2 = \varnothing$.

2. Розв'язуємо задачу (1), (5) – (7) методом Дальтона – Ллевеліна. Якщо з базису виводиться змінна x_i, $i \in I_1$, то відповідний рядок із симплекс-таблиці викреслюємо і покладаємо $I_1 = I_1 \setminus \{i\}$.

3. Якщо задача (1), (5) – (7) не має розв'язків, то їх не має і вихідна задача (1) – (4).

4. Нехай $\langle C(x^h), x^h \rangle$ — одержаний розв'язок задачі (1), (5) – (7). Якщо $\left(x_r^h, \ldots, x_s^h\right) \notin E_{\eta n}^{\bar{k}}(G)$, то додаємо до системи обмежень нерівність (12), у якій коефіцієнти обчислюються за формулами (14) – (16). Покладаємо $I_1 = I_1 \cup \cup \{k + h\}$. Переходимо до кроку 8.

5. Якщо умова (2) виконується, то знаходимо таке u, для якого виконується (8). Якщо $q_u(x^h) \geq 0$, то задачу (1) – (4) розв'язано, у противному разі додаємо до системи обмежень нерівність (12), у якій коефіцієнти обчислюються за формулами (11).

6. Визначаємо множину I_3 тих номерів додаткових обмежень з I_2, якими можна знехтувати. До множини I_3 належать всі ті й тільки ті номери $h \in I_2$, для яких виконується (20).

7. Покладемо $I_2 = I_2 \setminus I_3 \cup \{k+h\}$.

8. Область $Z_{h+1} = Z_1 \cap \{x \mid x_{k+i}(x) \geq 0,\ i \in I_1\} \cap \{x \mid x_{k+i}(x) \geq 0,\ i \in I_2\}$.

9. Збільшуємо h на одиницю. Переходимо до кроку 2.

Теорема 2. *Якщо для розв'язування проміжних задач використовується алгоритм Дальтона – Ллевеліна, то запропонований алгоритм завершує роботу за скінченне число кроків.*

Доведення. Оскільки множина допустимих значень задачі (1), (5) – (7) є скінченною, то цільова функція обмежена на цій множині. Внаслідок (6) при виборі рядка для відсікання в алгоритмі Дальтона – Ллевеліна враховується належність значень цільової функції дискретній множині A. Таким чином, виконуються умови скінченності алгоритму Дальтона – Ллевеліна [10], що означає скінченність розв'язування релаксованих задач на кожній ітерації. Скінченність алгоритму в цілому випливає із скінченності послідовності релаксованих задач. Справді, в результаті розв'язування задачі (1), (5) – (7) одержують точку, всі координати якої є елементами скінченної множини $S(G)$. Оскільки в процесі розв'язування задач методом Дальтона – Ллевеліна одержують лексикографічно спадну послідовність точок [10], то неможливо одержати двічі одну й ту саму точку як розв'язок задачі. Звідси і випливає скінченність послідовності підзадач. Теорему доведено.

Як ілюстрацію до задачі (1) – (4) можна розглянути модель такого варіанта задачі одержання заданого середнього прибутку P при мінімальному ризику. Нехай протягом інвестиційного періоду передбачається надходження η пакетів вільного капіталу. Вартості пакетів становлять $e_1, \ldots, e_n$ грошових одиниць, причому надходить n_j пакетів вартістю e_j грошових одиниць. Кожний пакет вільного капіталу можна або повністю вкласти в акції одного з $\bar{k}$ підприємств, або направити на задоволення інших потреб інвестора. Згідно з політикою інвестора, якщо акції деякого підприємства купуються протягом періоду, то на їх придбання витрачається тільки один пакет вільного капіталу. Таким чином, акції кожного з $\bar{k}$ підприємств можна купувати пакетами заздалегідь визначених вартостей $e_1, \ldots, e_n$ грошових одиниць, причому купується не більше n_j пакетів вартістю e_j грошових одиниць. Нехай x_i, $i \in J_{\bar{k}}$, — вартість придбаних акцій i-го підприємства, $G = \{g_1, \ldots, g_\eta\}$ — мультимножина з основою $S(G) = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ та первинною специфікацією $[G] = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$, $\eta = \eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_n$. Тоді інвестиційна політика визначається комбінаторним обмеженням (2) при $r = 1$, $s = \bar{k}$.

Нехай також $P(i, t)$ — загальний прибуток в періоді t на одну грошову одиницю вкладень у i-й вид акцій, a_i — середній прибуток за останні T інвестиційних періодів на одну грошову одиницю вкладень від акцій цього виду, тобто

$$a_i = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T} P(i, t) \quad \forall\, i \in J_{\bar{k}}.$$

Оскільки середній прибуток повинен бути не менше P грошових одиниць, то необхідним є виконання нерівності

$$\sum_{i=1}^{\bar{k}} a_i x_i - P \geq 0. \tag{21}$$

Інвестиційний ризик можна охарактеризувати величиною

$$R(x) = \sum_{i=1}^{\bar{k}} \sum_{j=1}^{\bar{k}} \sigma_{ij}^2 x_i x_j,$$

де величина

$$\sigma_{ij}^2 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} |P(i,t)-a_i||P(j,t)-a_j|, \quad i,j \in J_{\bar{k}},$$

виражає співвідношення рівнів прибутковості для кожної пари видів акцій.

Тоді інвестиційну задачу, що розглядається, можна адекватно представити такою моделлю. Знайти пару (1), де $C(x) = x_k$, $k = \bar{k} + 1$, при комбінаторному обмеженні (2) та додаткових обмеженнях (21) і $x_k - R(x) \geq 0$.

Оскільки гесіан

$$\begin{pmatrix} -2\sigma_{11}^2 & \cdots & -2\sigma_{1s}^2 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -2\sigma_{s1}^2 & \cdots & -2\sigma_{ss}^2 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

функції $x_k - R(x)$ є недодатно визначеною матрицею, то дана функція є опуклою [11]. Отже, дана задача є задачею вигляду (1) – (4).

Таким чином, запропоновано метод відсікання для задач мінімізації на розміщеннях з угнутими додатковими обмеженнями, а також наведено приклад практичної задачі, що приводить до розв'язування задач вигляду (1) – (4).

1. *Стоян Ю. Г., Ємець О. О.* Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. – Київ: Ін-т системних досліджень освіти, 1993. – 188 с.
2. *Емец О. А.* Об экстремальных свойствах недифференцируемых выпуклых функций на евклидовом множестве сочетаний с повторениями // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 6. – С. 680 – 691.
3. *Ємець О. О., Роскладка А. А.* Про оцінки мінімумів цільових функцій при оптимізації на сполученнях // Там же. – 1999. – **51**, № 8. – С. 1118 – 1121.
4. *Яковлев С. В., Валуйская О. А.* Оптимизация линейных функций на вершинах перестановочного многогранника с дополнительными линейными ограничениями // Там же. – 2001. – **53**, № 9. – С. 1272 – 1280.
5. *Ємець О. О., Колечкіна Л. М.* Задачі оптимізації на переставленнях з дробово-лінійною цільовою функцією: властивості множини допустимих розв'язків // Там же. – 2000. – **52**, № 12. – С. 1630 – 1640.
6. *Стоян Ю. Г., Яковлев С. В., Ємець О. О., Валуйська О. О.* Про існування опуклого продовження функцій, які задані на гіперсфері // Допов. НАН України. – 1998. – № 2. – С. 128 – 133.
7. *Реклейтис Г. В., Рейвиндран А., Рэгсдел К. М.* Оптимизация в технике. – М.: Мир, 1986. – Т. 1. – 352 с.
8. *Ємець О. О., Ємець Є. М.* Відсікання в лінійних частково комбінаторних задачах евклідової комбінаторної оптимізації // Допов. НАН України. – 2000. – № 9. – С 105 – 109.
9. *Ємець О. О., Барболіна Т. М.* Метод відсікання розв'язування лінійних умовних задач оптимізації на розміщеннях // М. В. Остроградський — видатний математик, механік і педагог: Мат. Міжнар. конф., присв. 200-річчю з дня народження (Полтава, 26–27 вересня 2001 р.). – Полтава, 2001. – С. 27 – 28.
10. *Корбут А. А., Финкельштейн Ю. Ю.* Дискретное программирование. – М.: Наука, 1969. – 368 с.
11. *Линейное* и нелинейное программирование / И. Н. Ляшенко, Е. А. Карагодова, Н. В. Черникова, Н. З. Шор / Под общ. ред. И. Н. Ляшенко. – Киев: Выща шк., 1965. – 372 с.

Одержано 04.12.2001