УДК 517.977

О. В. Капустян, А. В. Сукретна (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

УСЕРЕДНЕНИЙ СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ДЛЯ ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ

For a wave equation, we find the optimal control in the form of reverse connection and prove the convergence of constructed approximate control to the true one.

Для хвильового рівняння знайдено оптимальне керування у формі оберненого зв'язку та доведено збіжність побудованого наближеного керування до істинного.

1. Вступ. Побудова оптимального керування в формі синтезу є актуальною проблемою і має розв'язок лише для скінченновимірних динамічних систем малої розмірності [1]. Для систем з розподіленими параметрами без обмежень на керування проблема оптимального синтезу зводиться до розв'язання нескінченновимірної крайової задачі типу Ріккаті. Таке зведення здійснюється або за допомогою динамічного програмування [2, 3], або методом розщеплення [4]. Якщо вдається отримати програмне оптимальне керування, яке неперервно залежить від початкових даних, то синтезоване керування може бути побудоване за допомогою граничного переходу М. М. Красовського [3]. У даній роботі для гіперболічної крайової задачі розв'язано питання усередненого наближеного синтезу. Аналогічні питання для параболічної задачі (але без швидкоосцилюючої змінної) розглянуто в [5].

2. Постановка задачі. Нехай керований процес у циліндрі $\bar{Q}_T = [t_0, T] \times \bar{\Omega}$ описується крайовою задачею

$$y^{\varepsilon}_{tt}(x,t) = \operatorname{div}(a^{\varepsilon}(x)\nabla y^{\varepsilon}(x,t)) + g^{\varepsilon}(x)v(t), \quad (t,x) \in Q_T,$$

$$y^{\varepsilon}(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \in [t_0, T], \tag{1}$$

$$y^{\varepsilon}(x,t_0) = \varphi^{\varepsilon}_0(x), \qquad y^{\varepsilon}_t(x,t_0) = \varphi^{\varepsilon}_1(x), \quad x \in \bar{\Omega},$$

де $g^{\varepsilon}, \varphi^{\varepsilon}_1 \in L_2(\Omega)$, $\varphi^{\varepsilon}_0 \in H^1_0(\Omega)$, $\varepsilon > 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — обмежена область з гладкою межею, $t_0 \geq 0$ — довільний фіксований момент часу.

Керування

$$v(\cdot) \in U = L_2(t_0, T). \tag{2}$$

На розв'язках (1) при $v(\cdot) \in U$ потрібно мінімізувати напіввизначений критерій якості

$$I(v) = \alpha\left(\int_{\Omega} q^{\varepsilon}_0(x) y^{\varepsilon}(x,T)dx - \psi_0\right)^2 + \beta\left(\int_{\Omega} q^{\varepsilon}_1(x) y^{\varepsilon}_t(x,T)dx - \psi_1\right)^2 + \gamma\int_{t_0}^{T} v^2(t)dt, \tag{3}$$

де $\gamma > 0$, α, $\beta \geq 0$, $\alpha + \beta \neq 0$, ψ_0, $\psi_1 \in \mathbb{R}$, $q^{\varepsilon}_0, q^{\varepsilon}_1 \in L_2(\Omega)$.

Зауважимо, що задача (1)–(3) має природну фізичну інтерпретацію: якщо $\Omega = (0, l)$ і $q^{\varepsilon}_0(x) = \dfrac{q^{\varepsilon}_1(x)}{c^{\varepsilon}}$, то (1) описує коливання неоднорідного стержня ($a^{\varepsilon}(x)$ — модуль Юнга) маси c^{ε} з лінійною густиною $q^{\varepsilon}_1(x)$ під впливом зовнішньої сили $g^{\varepsilon}(x)v(t)$, за допомогою якої потрібно в момент часу T наблизитися до певних значень для кількості руху і центру ваги.

Мета даної роботи — отримати точну формулу синтезованого оптимального керування $u^\varepsilon = u^\varepsilon[t, y^\varepsilon]$ задачі (1)–(3) (тобто керування в формі оберненого зв'язку $u^\varepsilon[t, y^\varepsilon]$, яке б при підстановці в (1)–(3) замість $v(t)$ мінімізувало заданий критерій якості) і, замінивши в цій формулі всі нескінченні ряди їх частковими сумами з усередненими коефіцієнтами, довести близькість отриманого керування $u_n^\varepsilon = u_n^\varepsilon[t, y_n^\varepsilon]$ до точного $u^\varepsilon = u^\varepsilon[t, y^\varepsilon]$, а також близькість значень $I(u^\varepsilon)$ и $I(u_n^\varepsilon)$.

3. Задача синтезу для (1)–(3). Нехай $a^\varepsilon(x) = ((a_{ij}^\varepsilon(x)))_{i,j=1}^n$ — вимірна симетрична матриця, яка задовольняє умову рівномірної еліптичності:

$$\exists \nu_1, \nu_2 > 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in \Omega \quad \forall \vec{\xi} \in \mathbb{R}^n : \qquad (4)$$
$$\nu_1 \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \le a_{ij}^\varepsilon(x)\xi_i\xi_j \le \nu_2 \sum_{i=1}^n \xi_i^2.$$

Тоді відомо, що при кожному фіксованому керуванні $v \in U$ задача (1) має єдиний розв'язок у класі $C([t_0, T]; H_0^1)$ [6]. Крім того, задача оптимального керування (1)–(3) має єдиний розв'язок $u^\varepsilon(\cdot) \in U$ [4].

Нехай $A^\varepsilon := \operatorname{div}(a^\varepsilon \nabla)$. Тоді з (4) та [6] отримуємо, що спектральна задача

$$A^\varepsilon X^\varepsilon + (\lambda^\varepsilon)^2 X^\varepsilon = 0, \quad x \in \Omega, \qquad (5)$$
$$X^\varepsilon|_{\partial\Omega} = 0,$$

має прості власні числа $0 < (\lambda_1^\varepsilon)^2 < (\lambda_2^\varepsilon)^2 < \ldots, \; (\lambda_n^\varepsilon)^2 \to \infty$ при $n \to \infty$, і власні функції $\{X_i^\varepsilon(x)\}_{i=1}^\infty$, що утворюють ортонормований базис у $L_2(\Omega)$.

До кінця цього пункту параметр ε не відіграє ніякої ролі, тому ми його опустимо у викладках та поновимо в кінцевих формулах.

Розвиваючи всі функції задачі (1)–(3) в ряди Фур'є за системою $\{X_i\}_{i=1}^\infty$, для коефіцієнтів Фур'є $\{y_i(t)\}_{i=1}^\infty$ розв'язку $y = y(x,t)$ задачі (1) отримуємо задачу Коші

$$\ddot{y}_i(t) = -\lambda_i^2 y_i(t) + g_i v(t), \qquad (6)$$
$$y_i(t_0) = \varphi_i^0, \quad \dot{y}_i(t_0) = \varphi_i^1.$$

Ця задача для довільних $i \ge 1$, $v(\cdot) \in U$ має єдиний розв'язок $y_i(t)$, причому легко показати, що при кожному $t \in [t_0, T]$

$$y_i^2(t) \le 3\left((\varphi_i^0)^2 + \left(\frac{\varphi_i^1}{\lambda_i}\right)^2 + \left(\frac{g_i}{\lambda_i}\right)^2 (T - t_0)\|v\|^2\right), \qquad (7)$$
$$\dot{y}_i^2(t) \le 3\Big((\lambda_i \varphi_i^0)^2 + (\varphi_i^1)^2 + g_i^2 (T - t_0)\|v\|^2\Big),$$

де $\|v\|^2 = \int_{t_0}^T |v(t)|^2 dt$. Використовуючи фундаментальну систему розв'язків задачі (6), можна звести задачу (1)–(3) до скінченновимірної задачі

$$\dot{a}_i(t) = b_i(t)v(t), \quad i = 1, 2,$$

$$a_i(t_0) = \Phi_i, \quad i = 1, 2, \tag{8}$$

$$J(v) = \alpha(a_1(T) - \psi_0)^2 + \beta(a_2(T) - \psi_1)^2 + \gamma \int\limits_{t_0}^{T} v^2(t)dt \to \inf,$$

де

$$a_1(t) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i^0 y_i(t) \cos\lambda_i(T-t) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{q_i^0}{\lambda_i} \dot{y}_i(t) \sin\lambda_i(T-t),$$

$$a_2(t) = -\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i q_i^1 y_i(t) \sin\lambda_i(T-t) + \sum_{i=1}^{\infty} q_i^1 \dot{y}_i(t) \cos\lambda_i(T-t),$$

$$\Phi_1 = a_1(t_0), \qquad \Phi_2 = a_2(t_0), \tag{9}$$

$$b_1(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{q_i^0}{\lambda_i} g_i \sin\lambda_i(T-t),$$

$$b_2(t) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i^1 g_i \cos\lambda_i(T-t),$$

причому всі ряди в (9) збігаються рівномірно по $t \in [t_0, T]$.

Далі, застосовуючи до задачі (8) принцип максимуму Понтрягіна, отримуємо для оптимального керування формулу

$$u(t) = A(t,t_0)\Phi_1 + B(t,t_0)\Phi_2 + C(t,t_0), \tag{10}$$

де

$$A(t,t_0) = \frac{\alpha \int_{t_0}^{T} b_1(s)b_2(s)ds - \alpha b_1(t)\left(\beta \int_{t_0}^{T} b_2^2(s)ds - \gamma\right)}{\gamma\Delta(t_0)},$$

$$B(t,t_0) = \frac{\beta \int_{t_0}^{T} b_1(s)b_2(s)ds - \beta b_2(t)\left(\alpha \int_{t_0}^{T} b_1^2(s)ds - \gamma\right)}{\gamma\Delta(t_0)},$$

$$C(t,t_0) = \frac{\alpha\gamma\psi_0 b_1(t)\left(\beta \int_{t_0}^{T} b_2^2(s)ds - \gamma\right) + \beta\gamma\psi_1 b_2(t)\left(\alpha \int_{t_0}^{T} b_1^2(s)ds - \gamma\right)}{\gamma\Delta(t_0)},$$

$$\Delta(t_0) = \begin{vmatrix} \alpha \int\limits_{t_0}^{T} b_1^2(s)ds - \gamma & \beta \int\limits_{t_0}^{T} b_1(s)b_2(s)ds \\ \alpha \int\limits_{t_0}^{T} b_1(s)b_2(s)ds & \beta \int\limits_{t_0}^{T} b_2^2(s)ds - \gamma \end{vmatrix}.$$

Припущення. В подальшому вважаємо дані задачі (1)–(3) такими, що виконується умова

$$\left(\frac{\alpha}{\lambda_1^2}\|q_0\|^2 + \beta\|q_1\|^2\right)\|g\|^2 T < \gamma. \tag{11}$$

Тоді легко показати, що $\Delta(t) > 0$ при кожному $t \in [t_0, T]$. Отже, керування (10) неперервно залежить від параметрів t_0, Φ_1, Φ_2.

На підставі припущення з формули (10) заміною Φ_1 і Φ_2 на $a_1(t)$ і $a_2(t)$, а також $A(t, t_0)$, $B(t, t_0)$, $C(t, t_0)$ на $A(t) = A(t,t)$, $B(t) = B(t,t)$, $C(t) = C(t,t)$, $\Delta(t_0)$ на $\Delta(t)$ відповідно знаходимо синтезоване оптимальне керування, тобто

$$u[t, a] = A(t)a_1(t) + B(t)a_2(t) + C(t).$$

Позначимо

$$R_{11}(t,x) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i^0 X_i(x) \cos \lambda_i(T-t),$$

$$R_{12}(t,x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{q_i^0}{\lambda_i} X_i(x) \sin \lambda_i(T-t),$$

$$R_{21}(t,x) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i q_i^1 X_i(x) \sin \lambda_i(T-t), \tag{12}$$

$$R_{22}(t,x) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i^1 X_i(x) \cos \lambda_i(T-t).$$

Поновивши параметр $\varepsilon > 0$, остаточно отримаємо синтезоване оптимальне керування задачі (1)–(3):

$$u^\varepsilon[t, y^\varepsilon] = A^\varepsilon(t)\left[\left(y^\varepsilon(t), R_{11}^\varepsilon(t)\right) + \left(y_t^\varepsilon(t), R_{12}^\varepsilon(t)\right)\right] +$$

$$+ B^\varepsilon(t)\left[-\left(y^\varepsilon(t), R_{21}^\varepsilon(t)\right) + \left(y_t^\varepsilon(t), R_{22}^\varepsilon(t)\right)\right] + C^\varepsilon(t). \tag{13}$$

4. Задача наближеного синтезу для (1)–(3). Нехай $a^\varepsilon(x) = a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, аналогічно $g^\varepsilon(x) = g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, $\varphi_0^\varepsilon(x) = \varphi_0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, $\varphi_1^\varepsilon(x) = \varphi_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, $q_0^\varepsilon(x) = q_0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$,

$q_1^\varepsilon(x) = q_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, $a(\cdot)$, $g(\cdot)$, $\varphi_0(\cdot)$, $\varphi_1(\cdot)$, $q_0(\cdot)$, $q_1(\cdot)$ — 1-періодичні, a^0 — усереднена до a^ε матриця [7], g^0, φ_0^0, φ_1^0, q_0^0, q_1^0 — середні значення відповідних функцій. Зауважимо, що для цих значень в силу слабкої збіжності в $L_2(\Omega)$ виконується нерівність (11). Розглянемо усереднений оператор $A^0 := \operatorname{div}(a^0\nabla)$. Нехай $\{(\lambda_i^0)^2\}_{i=1}^\infty$, $\{X_i^0(x)\}_{i=1}^\infty$ — власні числа і власні функції задачі (5) з оператором A^0. Тоді згідно з [7] мають місце оцінки

$$|(\lambda_k^\varepsilon)^2 - (\lambda_k^0)^2| \le c_k\varepsilon, \qquad \|X_k^\varepsilon - X_k^0\| \le C_k\varepsilon, \quad k \ge 1, \tag{14}$$

де $\|\cdot\|$ — норма в $L_2(\Omega)$.

Тепер у формулі (13) в коефіцієнтах A^ε, B^ε, C^ε, R_{ij}^ε, $i,j = 1,2$, формально замінимо всі ряди їх скінченними сумами, числа λ_k^ε числами λ_k^0 та всі коефіцієнти Фур'є за системою $\{X_k^\varepsilon\}$ коефіцієнтами за системою $\{X_k^0\}$. Отримаємо деяке керування $u_n^0[t, z_n^\varepsilon]$, де z_n^ε — розв'язок задачі (1) з керуванням $v(t) = u_n^0[t, z_n^\varepsilon]$.

Основним результатом роботи є така теорема.

Теорема. *Нехай $g^\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$, $\varphi_0^\varepsilon \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $\varphi_1^\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ та $g^\varepsilon(x) = g(x)$, $\varphi_0^\varepsilon(x) = \varphi_0(x)$, $\varphi_1^\varepsilon(x) = \varphi_1(x)$, тобто вказані функції не залежать від ε. Тоді для довільного малого $\eta > 0$ існують $N_0 \ge 1$ і $\varepsilon_0 > 0$ такі, що для будь-яких $n \ge N_0$ та $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ при кожному $t \in [t_0, T]$ виконується*

$$\begin{gathered} |u_n^0[t, z_n^\varepsilon] - u^\varepsilon[t, y^\varepsilon]| < \eta, \\ |I(u_n^0[t, z_n^\varepsilon]) - I(u^\varepsilon[t, y^\varepsilon])| < \eta. \end{gathered} \tag{15}$$

Доведення. 1. Покажемо, що $u_n^0[t, z_n^\varepsilon] \to v^0[t, z^\varepsilon]$, $n \to \infty$, в $C([t_0, T])$ рівномірно по $\varepsilon \in [0, 1]$, де z^ε — розв'язок задачі (1) з керуванням

$$v^0[t, z^\varepsilon] = A^0(t)\left[\Big(z^\varepsilon(t), R_{11}^0(t)\Big) + \Big(z_t^\varepsilon(t), R_{12}^0(t)\Big)\right] +$$

$$+ B^0(t)\left[-\Big(z^\varepsilon(t), R_{21}^0(t)\Big) + \Big(z_t^\varepsilon(t), R_{22}^0(t)\Big)\right] + C^0(t).$$

Внаслідок рівномірної збіжності рядів $b_i^{0n} \to b_i^0$, $n \to \infty$, $i = 1, 2$, в $C([t_0, T])$ маємо $A^{0n} \to A^0$, $B^{0n} \to B^0$, $C^{0n} \to C^0$ при $n \to \infty$ в $C([t_0, T])$.

Легко показати, що в $C([t_0, T])$ $\|R_{11}^{0n} - R_{11}^0\| \to 0$, $\|R_{12}^{0n} - R_{12}^0\|_{H_0^1} \to 0$, $\|R_{21}^{0n} - R_{21}^0\|_{H^{-1}} \to 0$, $\|R_{22}^{0n} - R_{22}^0\| \to 0$ при $n \to \infty$.

Для розв'язку z_n^ε на підставі (1) і [6] отримуємо

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big\{\|z_{n_t}^\varepsilon\|^2 + \|z_n^\varepsilon\|_{H_0^1}^2\Big\} = (g u_n^0[t, z_n^\varepsilon], z_{n_t}^\varepsilon).$$

Оскільки $|u_n^0[t, z_n^\varepsilon]| \le K_1 + K_2\Big\{\|z_{n_t}^\varepsilon\| + \|z_n^\varepsilon\|_{H_0^1}\Big\}$, то

$$\|z_{n_t}^\varepsilon(t)\|^2 + \|z_n^\varepsilon(t)\|_{H_0^1}^2 \le K_3, \tag{16}$$

де константи K_i, $i = \overline{1,3}$, не залежать від ε.

Тепер розглянемо $\omega_n^\varepsilon = z_n^\varepsilon - z^\varepsilon$. Для ω_n^ε аналогічно знаходимо

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\|\omega_{n_t}^\varepsilon\|^2 + \|\omega_n^\varepsilon\|_{H_0^1}^2\right\} \le \left|u_n^0[t, z_n^\varepsilon] - v^0[t, z^\varepsilon]\right| \|g\| \|\omega_{n_t}^\varepsilon\|.$$

Звідси

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\|\omega_{n_t}^\varepsilon\|^2 + \|\omega_n^\varepsilon\|_{H_0^1}^2\right\} \le \left(\alpha_n + K_4\|\omega_{n_t}^\varepsilon\| + K_5\|\omega_n^\varepsilon\|_{H_0^1}\right)\|\omega_{n_t}^\varepsilon\|,$$

де $\alpha_n \to 0$ при $n \to 0$ і не залежить від ε. Тоді

$$\|\omega_{n_t}^\varepsilon(t)\|^2 + \|\omega_n^\varepsilon(t)\|_{H_0^1}^2 \le \beta_n,$$

де $\beta_n \to 0$ при $n \to \infty$ і не залежить від ε.

Таким чином, отримуємо $\max\limits_{t\in[t_0,T]} \|z_{n_t}^\varepsilon(t) - z_t^\varepsilon(t)\| \to 0$, $n \to \infty$, а також $\max\limits_{t\in[t_0,T]} \|z_n^\varepsilon(t) - z^\varepsilon(t)\|_{H_0^1} \to 0$, $n \to \infty$, рівномірно по ε, а це і доводить шукане.

2. Покажемо, що $v^0[t, z^\varepsilon] \to u^0[t, y^0]$, $u^\varepsilon[t, y^\varepsilon] \to u^0[t, y^0]$ при $\varepsilon \to 0$ в $C([t_0, T])$, де

$$u^0[t, y^0] = A^0(t)\left[(y^0, R_{11}^0) + (y_t^0, R_{12}^0)\right] + B^0(t)\left[-(y^0, R_{21}^0) + (y_t^0, R_{22}^0)\right] + C^0(t). \tag{17}$$

Очевидно, що $u^0[t, y^0]$ є оптимальним керуванням усередненої задачі до (1)–(3):

$$\begin{gathered} y_{tt}^0 = \operatorname{div}(a^0 \nabla y^0) + gv, \qquad x \in \Omega, \quad t \in (t_0, T), \\ y^0|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \in [t_0, T], \\ y^0|_{t=t_0} = \varphi_0, \qquad y_t^0|_{t=t_0} = \varphi_1, \quad x \in \bar{\Omega}, \\ v \in U, \\ I(v) = \alpha\left(\int_\Omega q_0^0(x) y^0(x, T)dx - \psi_0\right)^2 + \\ +\beta\left(\int_\Omega q_1^0(x) y_t^0(x, T)dx - \psi_1\right)^2 + \gamma\int_{t_0}^T v^2(t)dt \to \inf. \end{gathered} \tag{18}$$

Тут y^ε — розв'язок (1) з керуванням $u^\varepsilon[t, y^\varepsilon]$ (див. (13)), а y^0 — розв'язок системи (18) з керуванням $u^0[t, y^0]$, яке має вигляд (17).

Спочатку доведемо збіжність $v^0[t, z^\varepsilon] \to u^0[t, y^0]$ при $\varepsilon \to 0$ в $C([t_0, T])$. Розглянемо задачу (1) з керуванням $v^0[t, z^\varepsilon]$. Тоді $z^\varepsilon(x, t) = \sum_{i=1}^\infty z_i^\varepsilon X_i^\varepsilon$, де $z_i^\varepsilon(t)$ — єдиний розв'язок задачі Коші

$$\begin{gathered} \ddot{z}_i^\varepsilon(t) = -(\lambda_i^\varepsilon)^2 z_i^\varepsilon(t) + g_i v^0[t, z^\varepsilon], \\ z_i^\varepsilon(t_0) = \varphi_{0i}, \\ \dot{z}_i^\varepsilon(t_0) = \varphi_{1i}. \end{gathered} \tag{19}$$

На підставі оцінок (7), які мають місце для розв'язку задачі (19) і в яких $\|v^0[t,z^\varepsilon]\|$ оцінюється безпосередньо (з використанням (16)), отримуємо

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(t_0,T)}\left\{\|z^\varepsilon(t)\|_{H^2\cap H_0^1}+\|z_t^\varepsilon(t)\|_{H_0^1}+\|z_{tt}^\varepsilon(t)\|_{L_2}\right\}\le K,$$

де $K>0$ — константа, що не залежить від ε. Отже, з леми про компактність випливає існування такої функції $z^0=z^0(x,t)$, що для деякої підпослідовності

$$\begin{gathered} z^\varepsilon\to z^0 \quad \text{в} \quad C([t_0,T];H_0^1),\\ z^\varepsilon(t)\to z^0(t) \quad \text{слабко в} \quad H^2\cap H_0^1 \quad \forall t\in[t_0,T],\\ z_t^\varepsilon\to z_t^0 \quad \text{в} \quad C([t_0,T];L_2),\\ z_t^\varepsilon(t)\to z_t^0(t) \quad \text{слабко в} \quad H_0^1 \quad \forall t\in[t_0,T]. \end{gathered} \tag{20}$$

Звідси $v^0[t,z^\varepsilon]\to u^0[t,z^0]$ при $\varepsilon\to 0$ в $C([t_0,T])$ для тієї ж підпослідовності.

Позначимо $F^\varepsilon(x,t)=g(x)v^0[t,z^\varepsilon]$, $F^0(x,t)=g(x)u^0[t,z^0]$. Тоді $F^\varepsilon(t)\to$ $\to F^0(t)$ слабко в L_2 при $\varepsilon\to 0$ для кожного $t\in[t_0,T]$, а z^ε задовольняє рівняння

$$A^\varepsilon z^\varepsilon = z_{tt}^\varepsilon - F^\varepsilon \quad \forall t\in[t_0,T].$$

В (19) при кожному $i\ge 1$ можемо перейти до границі при $\varepsilon\to 0$ і отримати $z_i^\varepsilon(t)\to z_i^0(t)$ в $C([t_0,T])$, де $z_i^0(\cdot)$ — розв'язок задачі Коші

$$\begin{gathered} \ddot z_i^0(t)=-(\lambda_i^0)^2 z_i^0(t)+g_i u^0[t,z^0],\\ z_i^0(t_0)=\varphi_{0i},\\ \dot z_i^0(t_0)=\varphi_{1i}. \end{gathered}$$

А це означає, що $p(x,t)=\sum_{i=1}^\infty z_i^0(t)X_i^0(x)$ — розв'язок крайової задачі

$$\begin{gathered} p_{tt}=A^0p+gu^0[t,z^0], \qquad x\in\Omega, \quad t\in(t_0,T),\\ p|_{\partial\Omega}=0, \quad t\in[t_0,T],\\ p|_{t=t_0}=\varphi_0, \qquad p_t|_{t=t_0}=\varphi_1, \quad x\in\bar\Omega. \end{gathered}$$

Доведемо, що $p\equiv z^0$. Для цього розглянемо

$$\|z^\varepsilon(t)-p(t)\|_{H^{-1}}^2=\left\|\sum_{i=1}^\infty (z_i^\varepsilon(t)X_i^\varepsilon(x)-z_i^0(t)X_i^0(x))\right\|_{H^{-1}}^2\le$$

$$\le\frac{2}{\lambda_1^2}\left\|\sum_{i=1}^{N_1-1}\left(z_i^\varepsilon(t)X_i^\varepsilon(x)-z_i^0(t)X_i^0(x)\right)\right\|^2+2\left\|\sum_{i=N_1}^{\infty}\left(z_i^\varepsilon(t)X_i^\varepsilon(x)-z_i^0(t)X_i^0(x)\right)\right\|_{H^{-1}}^2.$$

Перший доданок при кожному $N_1 \geq 1$ прямує до 0 при $\varepsilon \to 0$ в $C([t_0, T])$.

Оцінимо другий доданок I_{N_1}:

$$I_{N_1} = \left\| \sum_{i=N_1}^{\infty} \left(z_i^\varepsilon(t) X_i^\varepsilon(x) - z_i^0(t) X_i^0(x) \right) \right\|_{H^{-1}}^2 \leq$$

$$\leq 2 \left\| \sum_{i=N_1}^{\infty} z_i^\varepsilon(t) X_i^\varepsilon(x) \right\|_{H^{-1}}^2 + 2 \left\| \sum_{i=N_1}^{\infty} z_i^0(t) X_i^0(x)) \right\|_{H^{-1}}^2 \leq$$

$$\leq 2 \sum_{i=N_1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_i^\varepsilon)^2} |z_i^\varepsilon(t)|^2 + 2 \sum_{i=N_1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_i^0)^2} |z_i^0(t)|^2.$$

Згідно з (14) при достатньо великих $N_1 \geq 1$ існує $\varepsilon_1 > 0$ таке, що для довільних $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ маємо

$$0 < (\lambda_{N_1}^0)^2 - 1 < (\lambda_{N_1}^0)^2 - c_{N_1}\varepsilon < (\lambda_{N_1}^\varepsilon)^2.$$

Звідси

$$I_{N_1} \leq \frac{2}{(\lambda_{N_1}^0)^2 - 1} \sum_{i=N_1}^{\infty} |z_i^\varepsilon(t)|^2 + \frac{2}{(\lambda_{N_1}^0)^2} \sum_{i=N_1}^{\infty} |z_i^0(t)|^2.$$

Тоді отримуємо

$$\forall \eta > 0 \quad \exists N_1 \geq 1 \quad \exists \varepsilon_1 > 0 \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_1) \quad \forall t \in [t_0, T]:$$

$$\left\| \sum_{i=1}^{N_1 - 1} (z_i^\varepsilon(t) X_i^\varepsilon(x) - z_i^0(t) X_i^0(x)) \right\| < \frac{\eta}{2},$$

$$\left\| \sum_{i=N_1}^{\infty} (z_i^\varepsilon(t) X_i^\varepsilon(x) - z_i^0(t) X_i^0(x)) \right\|_{H^{-1}} < \frac{\eta}{2},$$

що й доводить збіжність $z^\varepsilon(t) \to p(t)$ в $C([t_0, T]; H^{-1})$. Звідси на підставі (20) $z^0(t) \equiv p(t)$.

Внаслідок єдиності розв'язку задачі (18) $z^0 \equiv y^0$ і має місце збіжність по всій послідовності, тобто ми показали, що $v^0[t, z^\varepsilon] \to u^0[t, y^0]$, $\varepsilon \to 0$ в $C([t_0, T])$.

Доведення збіжності $u^\varepsilon[t, y^\varepsilon] \to u^0[t, y^0]$ аналогічне попередньому, якщо довести, що $G^\varepsilon(t) \to F^0(t)$ слабко в $L_2(\Omega)$ при кожному $t \in [t_0, T]$, де $G^\varepsilon = G^\varepsilon(x, t) = g(x) u^\varepsilon[t, y^\varepsilon]$, тобто довести збіжність при $\varepsilon \to 0$ коефіцієнтів, що входять до формули (13).

Покажемо, що $b_1^\varepsilon(\cdot) \to b_1^0(\cdot)$ при $\varepsilon \to 0$ в $C([t_0, T])$. Справді,

$$\left| \sum_{i=N_1}^{\infty} \left(\frac{(q_i)^\varepsilon}{\lambda_i^\varepsilon} g_i \sin \lambda_i^\varepsilon (T - t) - \frac{(q_i)^0}{\lambda_i^0} g_i \sin \lambda_i^0 (T - t) \right) \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\lambda_{N_1}^0 - 1} \|q_0^\varepsilon\| \|g\| + \frac{1}{\lambda_{N_1}^0} \|q_0^0\| \|g\| \leq \frac{c}{\lambda_{N_1}^0 - 1}.$$

Аналогічно $b_2^\varepsilon(\cdot) \to b_2^0(\cdot)$ при $\varepsilon \to 0$ в $C([t_0,T])$:

$$\left| \sum_{i=N_1}^{\infty} \left((q_i^1)^\varepsilon g_i \cos \lambda_i^\varepsilon (T-t) - (q_i^1)^0 g_i \cos \lambda_i^0 (T-t) \right) \right| \le$$

$$\le \left| \sum_{i=N_1}^{\infty} \lambda_i^\varepsilon \frac{(q_i^1)^\varepsilon}{\lambda_i^\varepsilon} g_i \cos \lambda_i^\varepsilon (T-t) \right| + \left| \sum_{i=N_1}^{\infty} \lambda_i^0 \frac{(q_i^1)^0}{\lambda_i^0} g_i \cos \lambda_i^0 (T-t) \right| \le$$

$$\le \sqrt{\sum_{i=N_1}^{\infty} \frac{((q_i^1)^\varepsilon)^2}{(\lambda_i^\varepsilon)^2}} \sqrt{\sum_{i=N_1}^{\infty} (\lambda_i^\varepsilon)^2 (g_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=N_1}^{\infty} \frac{((q_i^1)^0)^2}{(\lambda_i^0)^2}} \sqrt{\sum_{i=N_1}^{\infty} (\lambda_i^0)^2 (g_i)^2} \le$$

$$\le \frac{c}{\lambda_{N_1}^0 - 1} \|g\|_{H_0^1} \le \frac{\tilde{c}}{\lambda_{N_1}^0 - 1}.$$

З усіх коефіцієнтів (12) найбільш неочевидною є збіжність $R_{21}^\varepsilon \to R_{21}^0$.

Покажемо, що $\max\limits_{t \in [t_0,T]} \|R_{21}^\varepsilon(t) - R_{21}^0(t)\|_{H^{-2}} \to 0, \ \ \varepsilon \to 0$. Тоді згідно з (20) $(y^\varepsilon, R_{21}^\varepsilon) \to (y^0, R_{21}^0)$ в $C([t_0,T])$.

Згідно з логікою попередніх міркувань достатньо довести мализну залишку ряду:

$$\left\| \sum_{i=N}^{\infty} \lambda_i^\varepsilon (q_i^1)^\varepsilon X_i^\varepsilon(x) \sin \lambda_i^\varepsilon (T-t) \right\|_{H^{-2}}^2 =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_j^\varepsilon)^4} \left(\sum_{i=N}^{\infty} \lambda_i^\varepsilon (q_i^1)^\varepsilon X_i^\varepsilon \sin \lambda_i^\varepsilon (T-t), X_j^\varepsilon \right)^2 \le \sum_{j=N}^{\infty} \frac{\left[(q_j^1)^\varepsilon\right]^2}{(\lambda_j^\varepsilon)^2} \le \frac{c}{\lambda_N^0 - 1}.$$

Таким чином, ми фактично довели близькість керувань $u_n^0[t, z_n^\varepsilon]$ і $u^\varepsilon[t, y^\varepsilon]$, а також розв'язків z_n^ε і y^ε, тому, очевидно, відповідні функціонали є близькими. Звідси отримуємо (15), що й потрібно було довести.

1. *Летов А. М.* Динамика полета и управления. – М.: Наука, 1969. – 359 с.
2. *Сиразетдинов Т. К.* Оптимизация систем с распределенными параметрами. – М.: Наука, 1977. – 479 с.
3. *Егоров А. И.* Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. – М.: Наука, 1978. – 463 с.
4. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. – М.: Мир, 1972. – 414 с.
5. *Капустян О. А.* Наближений синтез оптимального обмеженого керування для параболічної крайової задачі // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 12. – С. 1704 – 1709.
6. *Temam R.* Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics. – New York: Springer, 1997. – 643 p.
7. *Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А.* Усреднение дифференциальных операторов. – М.: Физматлит, 1993. – 461 с.

Одержано 11.12.2002