УДК 517.432

С. О. Кужель (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРО УМОВИ ЗАСТОСУВАННЯ СХЕМИ РОЗСІЯННЯ ЛАКСА – ФІЛЛІПСА ДО ВИВЧЕННЯ АБСТРАКТНОГО ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ

We find necessary and sufficient conditions under which orthogonal incoming and outgoing subspaces exist for a group of solutions of abstract wave equation and possess an additional property of the "equivalence" with respect to the operator of time inversion.

Знайдено необхідні та достатні умови, при яких для групи розв'язків абстрактного хвильового рівняння існують ортогональні вхідний та вихідний підпростори з додатковою властивістю „рівноправності" відносно оператора обернення часу.

1. Вступ. Запропонований у 60-ті роки П. Лаксом та Р. Філліпсом підхід у теорії розсіяння (теорії Лакса – Філліпса) [1] є зручним інструментом для дослідження різноманітних задач розсіяння. Суттєвого розвитку теорія Лакса – Філліпса набула у серії робіт В. М. Адамяна та Д. З. Арова [2 – 5], де, використовуючи апарат унітарних зчеплень, було описано гранично можливий клас задач, розсіяння яких може бути вивчено у рамках класичної теорії Лакса – Філліпса або її узагальнень і, що є особливо важливим, встановлено прямий зв'язок між аналітичним продовженням матриці розсіяння у схемі Лакса – Філліпса та характеристичною функцією деякого стискуючого оператора (який, фактично, характеризує вплив збурення на розсіяння вільної системи). Останній результат дозволив застосувати до дослідження властивостей матриці розсіяння розвинену техніку гармонійного аналізу стискуючих операторів [6].

Підсумовуючи викладене, можна стверджувати, що на даний час теорія Лакса – Філліпса є цілком самодостатньою частиною теорії розсіяння на межі між стаціонарним та нестаціонарним підходами у теорії розсіяння, що „успадкувала" від першого розвинені засоби дослідження матриці розсіяння, а від другого — можливість прозорої фізичної інтерпретації властивостей матриці розсіяння.

Але, на жаль, застосування ідей теорії Лакса – Філліпса у сучасній літературі скоріше є винятком, ніж правилом. Це пов'язано з тим, що принципові результати цієї теорії отримано для загального випадку довільної унітарної групи, яка має вхідний та вихідний підпростори (або, що еквівалентно, для довільного унітарного зчеплення двох простих напівунітарних операторів), і тому застосування результатів класичної теорії Лакса – Філліпса до вивчення розсіяння *конкретної еволюційної системи* потребує досить великої підготовчої роботи (знаходження та явний опис вхідного та вихідного підпросторів, побудова асоційованих з цими підпросторами вхідного та вихідного спектральних зображень для унітарної групи, яка задає еволюцію системи, аналіз спектральних властивостей генератора асоційованої півгрупи та інше), що вимагає ретельного попереднього вивчення даної системи і не завжди є можливим або доцільним.

Тому актуальною є задача подальшого розвитку теорії Лакса – Філліпса для абстрактних реалізацій тих конкретних еволюційних систем, для яких цей підхід найбільш часто і вдало застосовується з метою усунення громіздких підготовчих викладок, необхідних для підходу Лакса – Філліпса, і встановлення нових більш прямих та зручних для застосувань зв'язків між властивостями збурення системи та властивостями відповідної матриці розсіяння.

Для еволюційних систем, що описуються абстрактним хвильовим рівнянням, тобто диференціально-операторним рівнянням

$$u_{tt} = -Lu, \tag{1}$$

де L є додатним самоспряженим оператором в абстрактному гільбертовому просторі $\mathfrak{H}$, таку задачу було розв'язано у серії робіт автора [7 – 10] для випадку, коли оператор L у правій частині (1) задовольняє наступну умову.

Умова I. *У просторі $\mathfrak{H}$ або у деякому його підпросторі $\mathfrak{H}_0$ існує такий простий*[1] *максимальний симетричний оператор B, що оператор L є додатним самоспряженим розширенням оператора B^2.*

При виконанні умови I відповідна група $W_L(t)$ розв'язків задачі Коші рівняння (1) має ортогональні вхідний D_- та вихідний D_+ підпростори, що у енергетичному просторі H_L збігаються із замиканнями множин

$$\left\{\begin{pmatrix} u \\ -iBu \end{pmatrix} \middle| \, \forall u \in D(B^2)\right\} \quad \text{та} \quad \left\{\begin{pmatrix} u \\ iBu \end{pmatrix} \middle| \, \forall u \in D(B^2)\right\} \tag{2}$$

відповідно[2]. Тут енергетичний простір H_L визначається як замикання множини початкових даних задачі Коші для рівняння (1)

$$\left\{\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \middle| \, \forall u \in D(L), \forall v \in \mathfrak{H}\right\}$$

відносно енергетичної норми

$$\left\|\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right\|_{H_L}^2 = (Lu, u) + \|v\|^2.$$

При цьому, крім стандартних властивостей

$$\text{i)}\ W_L(\pm t)D_\pm \subset D_\pm, \quad t \ge 0, \quad \text{та} \quad \text{ii)}\ \bigcap_{t\ge 0} W_L(\pm t)D_\pm = \{0\}$$

підпростори $D_\pm$ вигляду (2) задовольняють рівність

$$\text{iii)}\ D_+ = JD_-,$$

де оператор обернення часу

$$J\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} \tag{3}$$

є унітарним та самоспряженим оператором в H_L.

Зазначимо, що властивість iii), яка ілюструє „рівноправність" підпростору минулого D_- та майбутнього D_+, є характерною рисою для еволюцій, що визначаються хвильовими рівняннями (див., наприклад, [1, 11]).

У даній роботі показано, що умова I є не тільки достатньою, але і необхідною для існування підпросторів $D_\pm \subset H_L$ з властивостями i)–iii) для групи розв'язків $W_L(t)$ рівняння (1). Цей результат одержується як наслідок з більш загальної теореми, яка характеризує підклас груп розв'язків абстрактних хвильових рівнянь у класі унітарних ортогональних зчеплень.

У наступному пункті наведено необхідні означення та формулювання основних результатів, у п. 3 — їх доведення.

2. Формулювання основних результатів. Нехай унітарна група $W(t)$ діє у гільбертовому просторі H і є ортогональним зчепленням двох цілком неуні-

[1] Оператор є простим, якщо його звуження на довільний нетривіальний інваріантний підпростір не є самоспряженим оператором.

[2] Не обмежуючи загальності, припускаємо, що $-i \in \rho(B)$.

тарних півгруп. Це еквівалентно тому, що для $W(t)$ існують ортогональні вхідний $\mathcal{D}_-$ та вихідний $\mathcal{D}_+$ підпростори простору H з властивостями i), ii) (із заміною $W_L(t)$ та $D_\pm$ на $W(t)$ та $\mathcal{D}_\pm$ відповідно). Ортогональне зчеплення $W(t)$ є мінімальним, коли

$$\bigvee_{\mathbb{R}} W(t)(\mathcal{D}_- \oplus \mathcal{D}_+) = H. \tag{4}$$

Якщо оператор L у правій частині рівняння (1) задовольняє умову I, то відповідну унітарну групу розв'язків $W_L(t)$ задачі Коші рівняння (1) можна розглядати як ортогональне зчеплення двох цілком неунітарних півгруп $V_+(t) = W_L(t)|_{D_+}$ та $V_-(t) = W_L(-t)|_{D_-}$, $t \geq 0$. Якщо це зчеплення є мінімальним, то оператор L будемо також називати *мінімальним*.

Означення. *Будемо говорити, що ортогональне унітарне зчеплення* $W(t)$ *з вхідним* $\mathcal{D}_-$ *та вихідним* $\mathcal{D}_+$ *підпросторами еквівалентне групі* $W_L(t)$ *розв'язків задачі Коші абстрактного хвильового рівняння* (1), *якщо існує таке унітарне відображення* Z *простору* H *на енергетичний простір* H_L, *що*

$$W(t) = \mathrm{Z}^{-1} W_L(t) \mathrm{Z} \quad i \quad \mathrm{Z}\mathcal{D}_\pm = D_\pm, \tag{5}$$

де підпростори $D_\pm$ *визначаються рівностями* (2).

Теорема 1. *Мінімальне ортогональне унітарне зчеплення* $W(t)$ *з вхідним* $\mathcal{D}_-$ *та вихідним* $\mathcal{D}_+$ *підпросторами еквівалентне групі розв'язків* $W_L(t)$ *задачі Коші рівняння* (1) *з мінімальним оператором* L *у правій частині тоді і тільки тоді, коли у просторі* H *існує такий унітарний та самоспряжений оператор* J, *що*

$$\mathrm{J}\mathcal{D}_+ = \mathcal{D}_- \quad i \quad W(-t)\mathrm{J} = \mathrm{J}W(t). \tag{6}$$

Доведення теореми 1 наведено у наступному пункті.

***Наслідок* 1.** *Група розв'язків* $W_L(t)$ *задачі Коші рівняння* (1) *має ортогональні підпростори* $D_\pm$ *з властивостями* i) – iii) *тоді і тільки тоді, коли оператор* L *задовольняє умову* I.

Доведення. Якщо L задовольняє умову I, то твердження наслідку випливає з [7] (див. також [8]).

Навпаки, нехай група $W_L(t)$ має ортогональні підпростори $D_\pm$ з властивостями i) – iii). Через iQ_L позначимо генератор цієї групи. Оператор Q_L є самоспряженим оператором, що у просторі H_L збігається [11] із замиканням оператора

$$Q = i\begin{pmatrix} 0 & -I \\ L & 0 \end{pmatrix}, \quad D(Q) = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \middle| \{u, v\} \subset D(L) \right\}. \tag{7}$$

З цього зображення та з (3) одержуємо $-Q_L J = J Q_L$. Отже,

$$W_L(-t)J = JW_L(t). \tag{8}$$

Визначимо мінімальне ортогональне зчеплення $W_L^{\min}(t)$, розглянувши звуження $W_L(t)$ на $H_{\min} = \bigvee_R W_L(t)(D_- \oplus D_+)$. З властивості iii) та з (8) випливає, що підпростір $H_{\min}$ є інваріантним для оператора J і, отже, рівність (8) залишається справедливою і для $W_L^{\min}(t)$. Враховуючи це, з доведення теореми 1 (див. п. 3) одержуємо, що оператор L задовольняє умову I, якщо вибрати простір $\mathfrak{H}_0 = (I - J)D_+$ і у цьому просторі визначити простий максимальний симетричний оператор B за допомогою цілком неунітарної ізометричної півгрупи $V(t)$ (див. рівність (21)). Наслідок 1 доведено.

Зауважимо, що властивість ортогональності підпросторів $D_{\pm}$ та умова iii) є природними умовами у випадку класичних хвильових рівнянь (див. [1, 11]), що дозволяють у повному обсязі застосувати методи теорії Лакса – Філліпса до вивчення таких рівнянь. Таким чином, з наслідку 1 випливає, що умова I є, фактично, необхідною та достатньою для повноцінного вивчення групи розв'язків $W_L(t)$ рівняння (1) у рамках схеми Лакса – Філліпса.

Нагадаємо [1, 9], що група $W_L(t)$ визначає вільну еволюцію у схемі Лакса – Філліпса, якщо крім властивостей i), ii) підпростори $D_{\pm}$ додатково задовольняють умову

$$\text{iv)}\ D_- \oplus D_+ = H_L.$$

Надалі довільний додатний самоспряжений оператор L, який задовольняє умову I і такий, що група $W_L(t)$ визначає вільну еволюцію у схемі Лакса – Філліпса, будемо називати *незбуреним оператором*.

Наслідок 2. *Ортогональне унітарне зчеплення $W(t)$ з вхідним $\mathcal{D}_-$ та вихідним $\mathcal{D}_+$ підпросторами еквівалентне групі $W_L(t)$ розв'язків задачі Коші рівняння* (1) *з незбуреним оператором L у правій частині тоді і тільки тоді, коли*

$$\mathcal{D}_- \oplus \mathcal{D}_+ = H. \tag{9}$$

Доведення. Якщо зчеплення $W(t)$ еквівалентне групі $W_L(t)$ з незбуреним оператором L, то рівність (9) випливає з (5) та властивості iv).

Доведемо обернене твердження. Оскільки з (9) випливає (4), то зчеплення $W(t)$ є мінімальним.

Відомо (див., наприклад, [1]), що коли унітарна група $W(t)$ має підпростори $\mathcal{D}_{\pm}$ з властивостями i), ii) та (9), існує унітарне відображення T простору H на $L_2(\mathbb{R}, N)$ (N — деякий допоміжний гільбертів простір), яке задає трансляційне зображення для $W(t)$. Це, зокрема, означає, що

$$\mathrm{T}W(t) = \mathcal{F}(t)\mathrm{T} \quad \text{і} \quad \mathrm{T}\mathcal{D}_{\pm} = L_2(\mathbb{R}_{\pm}, N), \tag{10}$$

де $\mathcal{F}(t)$ — оператор зсуву на t вправо у просторі $L_2(\mathbb{R}, N)$.

У просторі $L_2(\mathbb{R}, N)$ розглянемо унітарний та самоспряжений оператор

$$\mathcal{J}f(s) = f(-s) \quad (\forall f(s) \in L_2(\mathbb{R}, N)).$$

Легко помітити, що $\mathcal{J}\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}(-t)\mathcal{J}$. Тому з (10) випливає, що унітарний та самоспряжений в H оператор $\mathrm{J} = \mathrm{T}^{-1}\mathcal{J}\mathrm{T}$ задовольняє умови (6) теореми 1. Таким чином, зчеплення $W(t)$ еквівалентне деякій групі розв'язків $W_L(t)$ рівняння (1), вхідний та вихідний підпростори $D_{\pm}$ якої задовольняють умову iv) і, отже, оператор L є незбуреним. Наслідок 2 доведено.

Важливим підкласом операторів L, що задовольняють умову I, є ті оператори, для яких відповідний оператор B є визначеним на всьому просторі $\mathfrak{H}$ (а не на деякому його підпросторі). Надалі довільний додатний самоспряжений оператор L, що задовольняє умову I при $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0$, будемо називати *0-збуреним оператором*.

Наслідок 3. *Мінімальне ортогональне унітарне зчеплення $W(t)$ з вхідним $\mathcal{D}_-$ та вихідним $\mathcal{D}_+$ підпросторами еквівалентне групі $W_L(t)$ розв'язків* *задачі Коші рівняння* (1) *з* 0*-збуреним оператором* L *у правій частині тоді і тільки тоді, коли підпростори* $\mathcal{D}_{\pm}$ *задовольняють* (6) *і є максимальними нейтральними підпросторами у просторі Крейна* H *з індефінітною метрикою*[3] $[\cdot,\cdot]_H := (\mathrm{J}\cdot,\cdot)_H$.

Доведення. Якщо простий максимальний симетричний оператор B діє у просторі $\mathfrak{H}$, то, згідно з твердженням 3.2 в [8, с. 201], множина $\{Bu \mid \forall u \in D(B^2)\}$ є щільною в $\mathfrak{H}$. Тому для групи $W_L(t)$ у випадку 0-збуреного оператора L відповідні вхідний та вихідний підпростори $D_{\pm}$ вигляду (2) крім властивостей i)– iii) додатково задовольняють рівність

$$P_-D_- = P_-D_+ = \mathfrak{H} = P_-H_L \qquad \left(P_- = \frac{1}{2}(I-J)\right),$$

де оператор J визначається формулою (3). Звідси випливає [12, с. 42], що нейтральні відносно індефінітної метрики $[\cdot,\cdot]_{H_L} := (J\cdot,\cdot)_{H_L}$ підпростори $D_{\pm}$ простору Крейна H_L є максимальними нейтральними. Отже, якщо зчеплення $W(t)$ еквівалентне групі $W_L(t)$ з 0-збуреним оператором L, то підпростори $\mathcal{D}_{\pm}$ також будуть максимальними нейтральними підпросторами простору Крейна H з індефінітною метрикою $[\cdot,\cdot]_H := (\mathrm{J}\cdot,\cdot)_H$, де $\mathrm{J} = \mathrm{Z}^{-1}J\mathrm{Z}$.

Доведемо обернене твердження. Нехай вхідний та вихідний підпростори $\mathcal{D}_{\pm}$ зчеплення $W(t)$ є максимальними нейтральними підпросторами. Не обмежуючи загальності, можна вважати, що $(I-\mathrm{J})\mathcal{D}_+ = (I-\mathrm{J})H$. Звідси, використовуючи означення підпросторів $\mathfrak{H}$ та $\mathfrak{H}_0$ при доведенні теореми 1, одержуємо $\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{H}$. Отже, побудований при доведенні теореми 1 оператор L буде 0-збуреним. Наслідок 3 доведено.

Зауваження. З наслідку 2 випливає, що частинному випадку незбурених операторів у формулюванні наслідку 3 відповідає умова гіпермаксимальності нейтральних підпросторів $\mathcal{D}_{\pm}$ (означення гіпермаксимальності див. у [12, с. 42]).

Нехай унітарна група $W(t)$ діє у просторі H і має ортогональні вхідний $\mathcal{D}_-$ та вихідний $\mathcal{D}_+$ підпростори (тобто група $W(t)$ є ортогональним зчепленням). У підпросторі

$$\mathrm{K} = H \ominus (\mathcal{D}_- \oplus \mathcal{D}_+) \tag{11}$$

простору H розглянемо стискуючий оператор

$$\mathrm{A} = P_{\mathrm{K}}\mathrm{U}|_{\mathrm{K}}, \tag{12}$$

де P_{K} є ортопроектором у просторі H на підпростір K, а оператор

$$\mathrm{U} = (\mathrm{Q}-iI)(\mathrm{Q}+iI)^{-1} \tag{13}$$

є когенератором групи $W(t) = e^{i\mathrm{Q}t}$.

Оператор A будемо називати *асоційованим* з групою $W(t)$. Наступне твердження є добре відомим (наприклад, в інших термінах цей результат наведено в [5, с. 9]).

Лема 1. *Якщо група* $W(t)$ *є мінімальним ортогональним зчепленням, то асоційований оператор* A *є цілком неунітарним оператором в* K.

Покажемо, що властивість групи $W(t)$ бути еквівалентною групі розв'язків задачі Коші рівняння (1) пов'язана з властивостями оператора A.

Теорема 2. *Мінімальне ортогональне унітарне зчеплення* $W(t)$ *еквівалентне групі розв'язків* $W_L(t)$ *задачі Коші рівняння* (1) *з мінімальним оператором* L

[3] З приводу „індефінітної" термінології див. [12].

у правій частині тоді і тільки тоді, коли у просторі K *існує такий унітарний та самоспряжений оператор* J, *що для асоційованого з групою* $W(t)$ *оператора* A *справедлива рівність*

$$\mathrm{A} = \mathrm{J}\mathrm{A}^*\mathrm{J} \tag{14}$$

(*тобто* A *є* J-*самоспряженим оператором у просторі* K).

Випадок 0-*збуреного оператора у правій частині* (1) *характеризується умовою* $\mathrm{A} = \mathrm{A}^*$ (*тобто* A *є самоспряженим оператором у* K), *а випадок незбуреного оператора характеризується тим, що* $\mathrm{K} = \{0\}$.

Доведення. Доведення, фактично, полягає у переформулюванні теореми 1 та наслідків 2, 3 з урахуванням властивостей мінімальних дилатацій стискуючих операторів [6]. Тому ми наведемо лише основні його етапи.

Згідно з теоремою 1 еквівалентність $W(t)$ групі розв'язків рівняння (1) рівносильна існуванню в H унітарного та самоспряженого оператора J з властивостями (6). Оскільки $W(t) = e^{iQt}$, друга рівність в (6) еквівалентна рівностям

$$-\mathrm{J}\mathrm{Q} = \mathrm{Q}\mathrm{J}, \quad \mathrm{J}D(\mathrm{Q}) = D(\mathrm{Q}). \tag{15}$$

З (13) та (15) одержуємо

$$\mathrm{J}\mathrm{U} = \mathrm{U}^*\mathrm{J}. \tag{16}$$

З першої рівності в (6) та (11) випливає, що звуження J на K є самоспряженим та унітарним оператором в K і $\mathrm{J}P_{\mathrm{K}} = P_{\mathrm{K}}\mathrm{J}$. Тому з (12) та (16) одержуємо рівність (14).

Згідно з теоремою 1 для доведення оберненого твердження достатньо показати, що коли асоційований з $W(t)$ оператор A задовольняє (14), то оператор J у цій рівності можна так продовжити до унітарного та самоспряженого оператора в H, що будуть виконуватись умови (6). При цьому з урахуванням (13) замість другої рівності в (6) достатньо перевірити справедливість рівності (16).

З результатів [6] випливає, що простір H може бути зображений у вигляді ортогональної суми $H = H_{\min} \oplus \mathfrak{N}$ інваріантних відносно U підпросторів $H_{\min}$ та $\mathfrak{N}$. У відповідності з цим розкладом

$$\mathrm{U} = \mathrm{U}_{\min} \oplus \mathrm{U}_{sh}, \tag{17}$$

де $\mathrm{U}_{\min} = \mathrm{U}\big|_{H_{\min}}$ — мінімальна унітарна дилатація оператора A, а $\mathrm{U}_{sh} = \mathrm{U}\big|_{\mathfrak{N}}$ — двобічний зсув.

Оскільки A задовольняє (14), то

$$\mathrm{J}\mathrm{D}_{\mathrm{A}} = \mathrm{D}_{\mathrm{A}^*}\mathrm{J} \qquad (\mathrm{D}_{\mathrm{T}} = (I - \mathrm{T}^*\mathrm{T})^{1/2};\ \mathrm{T} \in \{\mathrm{A}, \mathrm{A}^*\}). \tag{18}$$

Нехай $\mathrm{U}'_{\min}$ — матрична реалізація мінімальної унітарної дилатації для стискуючого оператора A, що діє у просторі

$$H'_{\min} = \mathcal{D}'_- \oplus \mathrm{K} \oplus \mathcal{D}'_+ \qquad \left(\mathcal{D}'_- = \sum_{-\infty}^{-1} \oplus \mathfrak{D}_{\mathrm{A}^*},\ \mathcal{D}'_+ = \sum_{1}^{\infty} \oplus \mathfrak{D}_{\mathrm{A}},\ \mathfrak{D}_{\mathrm{T}} = \mathrm{D}_{\mathrm{T}}\mathrm{K}\right).$$

Згідно з (18) оператор J ізометрично відображає простір $\mathfrak{D}_{\mathrm{A}}$ на простір $\mathfrak{D}_{\mathrm{A}^*}$. Тому ми можемо елементарним чином розширити оператор J до такого унітарного та самоспряженого в $H'_{\min}$ оператора J', що $\mathrm{J}'\mathcal{D}'_+ = \mathcal{D}'_-$. При цьому з явної формули для оператора U' [6, с. 30] випливає $\mathrm{J}'\mathrm{U}' = \mathrm{U}'^*\mathrm{J}'$. З останніх двох рівностей, враховуючи те, що мінімальні унітарні дилатації стискуючого оператора визначаються з точністю до ізоморфізму, одержуємо, що у просторі $H_{\min}$ існує унітарний та самоспряжений оператор $\mathrm{J}_{\min}$, який збігається з початковим оператором J на K і для якого справедлива перша рівність в (6) (із заміною $\mathcal{D}_\pm$ на $\mathcal{D}_\pm^{\min} = \mathcal{D}_\pm \cap H_{\min}$) та рівність (16) (із заміною U на $\mathrm{U}_{\min}$).

У випадку двобічного зсуву U_{sh} підпростір $\mathfrak{N}$ має вигляд $\mathfrak{N} = \sum_{-\infty}^{\infty} \oplus U^n \mathcal{R}_+$, де

$$\sum_{-\infty}^{-1} \oplus U^n \mathcal{R}_+ = \mathcal{D}_- \ominus \mathcal{D}_-^{\min} = \mathcal{D}_-^{\mathrm{sh}}, \quad \sum_{0}^{\infty} \oplus U^n \mathcal{R}_+ = \mathcal{D}_+ \ominus \mathcal{D}_+^{\min} = \mathcal{D}_+^{\mathrm{sh}}$$

($\mathcal{R}_+$ — породжуючий підпростір для U_{sh}). Тому неважко помітити, що формули

$$\mathrm{J}_{\mathrm{sh}} \mathrm{U}^{-n} r_+ = \mathrm{U}^{n-1} r_+, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad r_+ \in \mathcal{R}_+,$$

визначають унітарний та самоспряжений на $\mathfrak{N}$ оператор, для якого справедливі перша рівність в (6) (із заміною $\mathcal{D}_\pm$ на $\mathcal{D}_\pm^{\mathrm{sh}}$) та рівність (16) (із заміною U на U_{sh}).

Згідно з розкладом (17) та отриманими властивостями операторів $\mathrm{J}_{\min}$ та J_{sh} одержуємо, що оператор $\mathrm{J} = \mathrm{J}_{\min} \oplus \mathrm{J}_{\mathrm{sh}}$ задовольняє першу рівність в (6) та рівність (16). На підставі теореми 1 це означає, що $W(t)$ еквівалентна групі розв'язків задачі Коші рівняння (1).

Твердження теореми 2 стосовно випадку незбурених операторів випливає з наслідку 2 та рівності (11).

Згідно з наслідком 3 випадок 0-збурених операторів характеризується властивістю максимальності нейтральних підпросторів $\mathcal{D}_\pm$. Властивість максимальності та перша рівність в (6) рівносильні тому, що підпростір $\mathcal{D}_- \oplus \mathcal{D}_+$ містить один з підпросторів $H_- = (I - \mathrm{J})H$ або $H_+ = (I + \mathrm{J})H$ канонічного розкладу простору Крейна H. Тому з урахуванням (11) одержуємо, що звуження J на K є або одиничним, або мінус-одиничним оператором. Теорему 2 доведено.

3. Доведення теореми 1. Наведемо спочатку декілька допоміжних тверджень. Нехай J — самоспряжений та унітарний оператор в H, для якого виконуються умови (6). Покладемо $H_\pm = P_\pm H$, де $P_\pm = (I \pm \mathrm{J})/2$ — взаємно доповнюючі ортопроектори в H.

Лема 2. *Справджується рівність* $\dim H_- = \dim H_+ = \infty$.

Доведення. З ортогональності $\mathcal{D}_\pm$ та першої рівності в (6) випливає, що підпростори $\mathcal{D}_\pm$ є нейтральними відносно індефінітної метрики $[x, y]_H = (\mathrm{J}x, y)$, $\{x, y\} \in H$. Отже, якщо $\dim H_- < \infty$, то $\dim \mathcal{D}_\pm < \infty$. Остання нерівність є неможливою у зв'язку з умовою ii) в означенні вхідного (вихідного) підпростору. Лему 2 доведено.

Оскільки зчеплення $W(t)$ з теореми 1 є унітарною групою, то $W(t) = e^{i\mathrm{Q}t}$, де Q — самоспряжений оператор в H. Для цього оператора друга рівність в (6) трансформується в (15).

Позначимо $\mathrm{Q}_\pm = \mathrm{Q}\big|_{D(\mathrm{Q}) \cap H_\pm}$. З (15) та означення підпросторів $H_\pm$ випливає

$$D(\mathrm{Q}) = D(\mathrm{Q}_-) \oplus D(\mathrm{Q}_+) \quad \text{і} \quad \mathrm{Q}_\pm : D(\mathrm{Q}_\pm) \to H_\mp, \tag{19}$$

де $D(\mathrm{Q}_\pm) = D(\mathrm{Q}) \cap H_\pm = P_\pm D(\mathrm{Q})$.

З (15) зрозуміло, що $\mathrm{J}\mathrm{Q}^2 = \mathrm{Q}^2\mathrm{J}$ і, отже,

$$\mathrm{Q}^2 = \mathrm{Q}_+\mathrm{Q}_-\big|_{P_- D(\mathrm{Q}^2)} \oplus \mathrm{Q}_-\mathrm{Q}_+\big|_{P_+ D(\mathrm{Q}^2)}, \tag{20}$$

де $\mathrm{Q}_+\mathrm{Q}_-$ та $\mathrm{Q}_-\mathrm{Q}_+$ — самоспряжені оператори у просторах H_- та H_+ відповідно.

Лема 3. *Справджується рівність* $\overline{\mathcal{R}(\mathrm{Q}_-|_{D(\mathrm{Q}_+\mathrm{Q}_-)})} = H_+$.

Доведення. Нехай $y \in H_+$ і $(Q_- u, y) = 0$ ($\forall u \in D(Q_+Q_-)$). З (19) і (20) одержуємо

$$F[u] = (Qu, y) = 0 \quad \forall u \in D(Q^2).$$

Розглянемо гільбертів простір $D[Q]$, утворений лінеалом $D(Q)$ з нормою графіка $\|u\|_Q^2 = \|u\|^2 + \|Qu\|^2$. Легко перевірити, що лінеал $D(Q^2)$ є щільним в $D[Q]$. Тому функціонал $F[u]$ можна поширити за неперервністю на простір $D[Q]$. Таким чином, $y \in D(Q)$ і $Qy = 0$. Оскільки зчеплення $W(t)$ є мінімальним, то з (4) видно, що остання рівність є можливою лише у випадку $y = 0$. Отже, твердження леми 3 справджується.

Оскільки підпростір $\mathcal{D}_+$ є нейтральним (відносно індефінітної метрики $[\cdot, \cdot]_H$) підпростором простору H, то множини $P_\pm \mathcal{D}_+$ є підпросторами в H.

У просторі $P_- \mathcal{D}_+$ розглянемо операторнозначну функцію

$$V(t)P_- d_+ = P_- W(t) d_+ \quad (\forall t \geq 0, \ \forall d_+ \in \mathcal{D}_+). \tag{21}$$

Лема 4. *Функція $V(t)$ є цілком неунітарною півгрупою ізометричних операторів в $P_- \mathcal{D}_+$.*

Доведення. Зрозуміло, що $V(0) = I$. Враховуючи умову i) (із заміною D_+ на $\mathcal{D}_+$ та $W_L(t)$ на $W(t)$), одержуємо

$$V(t_1 + t_2)P_- d_+ = P_- W(t_1) W(t_2) d_+ = V(t_1) P_- W(t_2) d_+ = V(t_1) V(t_2) P_- d_+.$$

Отже, $V(t)$ є півгрупою.

Оскільки $\mathcal{D}_+$ є нейтральним підпростором, то $\|W(t)d_+\|^2 = 2\|P_- W(t) d_+\|^2$ при всіх $t \geq 0$. Тому

$$\|V(t)P_- d_+\|^2 = \frac{1}{2}\|W(t)d_+\|^2 = \frac{1}{2}\|d_+\|^2 = \|P_- d_+\|^2.$$

Отже, півгрупа $V(t)$ є ізометричною.

Згідно з (21), якщо $P_- d_+ \in \bigcap_{t \geq 0} V(t) P_- \mathcal{D}_+$, то $P_- d_+ \in P_- \bigcap_{t \geq 0} W(t) \mathcal{D}_+$. Отже, для довільного $t > 0$ існує таке $d_+^t \in \mathcal{D}_+$, що $P_- d_+ = P_- W(t) d_+^t$. Оскільки $\mathcal{D}_+$ є нейтральним підпростором, то за елементами $P_- d_+$ та $P_- W(t) d_+^t$ однозначно визначаються елементи d_+ та $W(t) d_+^t$ простору $\mathcal{D}_+$. Тому з останньої рівності випливає $d_+ = W(t) d_+^t$ ($\forall t > 0$). З урахуванням умови ii) це означає, що $d_+ = 0$. Отже, півгрупа $V(t)$ є цілком неунітарною. Лему 4 доведено.

Перейдемо до доведення теореми 1. Нехай зчеплення $W(t)$ еквівалентне групі $W_L(t)$ розв'язків задачі Коші рівняння (1) з мінімальним оператором L у правій частині. У цьому випадку в (6) достатньо вибрати оператор $\mathrm{J} = Z^{-1} J Z$, де оператор обернення часу J визначається формулою (3), і врахувати співвідношення (5) та (8).

Навпаки, нехай для мінімального ортогонального унітарного зчеплення $W(t)$ виконуються умови (6). Покладемо $\mathfrak{H} \doteq H_-$. У просторі $\mathfrak{H}$ розглянемо оператор $L = Q_+ Q_-$, де оператори $Q_\pm$ визначаються рівностями (19). З розкладу (20) зрозуміло, що оператор L є самоспряженим.

З (4) випливає, що $0 \notin \sigma_p(Q)$, тому $(Lu, u) = (Q_- u, Q_- u) > 0$ для довільного ненульового $u \in D(L)$. Отже, L є додатним самоспряженим оператором.

Визначимо простір $\mathfrak{H}_L$ стандартним способом, як поповнення лінеалу $D(L)$ за нормою $\|u\|_L := \sqrt{(Lu, u)}$. Це означає, що послідовність $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ елементів з $D(L)$ є фундаментальною в $\mathfrak{H}_L$ тоді і тільки тоді, коли послідовність $\{Q_- u_n\}_{n=1}^\infty$ є фундаментальною в $\mathfrak{H}$.

Будемо говорити, що послідовність $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ $(u_n \in D(L))$ *збігається в* $\mathfrak{H}_L$ до елемента z_τ, якщо послідовність $\{Q_- u_n\}_{n=1}^{\infty}$ збігається у просторі $\mathfrak{H}$ до елемента τ. Згідно з цим правилом ототожнення довільний елемент $u \in D(L)$ записується як $z_{Q_- u}$. При цьому, враховуючи лему 3, одержуємо, що гільбертів простір $\mathfrak{H}_L$ ототожнюється з гільбертовим простором елементів $\{z_\tau \mid \forall \tau \in H_+\}$, де $z_{\alpha\tau+\beta\tilde{\tau}} = \alpha z_\tau + \beta z_{\tilde{\tau}}$, $\{\alpha, \beta\} \subset \mathbb{C}$, $\{\tau, \tilde{\tau}\} \subset H_+$, і скалярний добуток визначається формулою

$$(z_\tau, z_{\tilde{\tau}})_L = (\tau, \tilde{\tau}). \tag{22}$$

Як і раніше, елементи енергетичного простору $H_L = \mathfrak{H}_L \oplus \mathfrak{H}$ будемо записувати у вигляді векторів-стовпців, де верхня компонента належить $\mathfrak{H}_L$, а нижня є елементом простору $\mathfrak{H}$.

Розглянемо відображення $Z: H \to H_L$, що визначається формулою

$$Zh = \begin{pmatrix} z_{-iP_+h} \\ P_- h \end{pmatrix} \quad \forall h \in H. \tag{23}$$

Враховуючи означення ортопроекторів $P_\pm$ та (22), легко помітити, що Z є унітарним відображенням простору H на H_L.

З означення операторів L та Q_- зрозуміло, що довільний елемент h з множини

$$\mathcal{L} = \{ h = u + Q_- v \mid \forall u \in D(L),\ \forall v \in D(L) \}$$

належить $D(Q)$. Використовуючи (23) і ототожнення елементів u та $z_{Q_- u}$, одержуємо, що при всіх $h \in \mathcal{L}$ справджується рівність

$$ZQh = Z(Q_- u + Q_+ Q_- v) = \begin{pmatrix} -iu \\ Lv \end{pmatrix} = \mathcal{Q}\begin{pmatrix} -iv \\ u \end{pmatrix} = \mathcal{Q}Zh,$$

де оператор $\mathcal{Q}$ визначається рівністю (7). При цьому неважко помітити, що $Z\mathcal{L} = D(\mathcal{Q})$. Звідси, враховуючи істотну самоспряженість оператора $\mathcal{Q}$, одержуємо $ZQ = \mathcal{Q}_L Z$. Отже, $W(t) = Z^{-1} W_L(t) Z$.

Перейдемо до визначення оператора B. Покладемо $\mathfrak{H}_0 = P_- \mathcal{D}_+$. Зрозуміло, що $\mathfrak{H}_0 \subseteq \mathfrak{H}$. Згідно з лемою 4 ізометрична півгрупа $V(t)$ є цілком неунітарною в $\mathfrak{H}_0$. Отже (див., наприклад, [6, с. 172]), $V(t) = e^{iBt}$, де B є простим максимальним симетричним оператором у просторі $\mathfrak{H}_0$.

Аналогічно доведенню леми 4, з нейтральності підпростору $\mathcal{D}_+$ випливає, що при всіх $t \geq 0$ справджується рівність

$$\|(V(t) - I)P_- d_+\|^2 = \frac{1}{2}\|(W(t) - I)d_+\|^2 \quad \forall d_+ \in \mathcal{D}_+.$$

Тому

$$D(B) = P_-(D(Q) \cap \mathcal{D}_+) \quad \text{і} \quad BP_- d_+ = P_- Q d_+ \quad \forall d_+ \in D(Q) \cap \mathcal{D}_+. \tag{24}$$

Оскільки $\mathcal{D}_+$ є нейтральним підпростором, довільний елемент $d_+ \in \mathcal{D}_+$ можна записати у вигляді $d_+ = P_- d_+ + KP_- d_+$, де ізометричний оператор K відображає $P_- \mathcal{D}_+$ на $P_+ \mathcal{D}_+$. Враховуючи це зображення і покладаючи в (24) $u = P_- d_+$, одержуємо

$$D(Q) \cap \mathcal{D}_+ = \{ u + Ku \mid \forall u \in D(B) \}, \qquad Q(u + Ku) = Bu + KBu. \tag{25}$$

Нехай $u \in D(B^2)$. Тоді з (25) випливає $h = u + Ku \in D(Q^2) \cap \mathcal{D}_+$. Двічі застосовуючи (25), одержуємо

$$Q_L^2 Zh = ZQ^2 h = Z(B^2 u + KB^2 u) = \begin{pmatrix} z_{-iKB^2u} \\ B^2 u \end{pmatrix}.$$

З іншого боку, з розкладу (20) та означення оператора L випливає

$$ZQ^2 h = Z(Q_+Q_- u + Q_-Q_+ Ku) = \begin{pmatrix} z_{-iQ_-Q_+Ku} \\ Lu \end{pmatrix}.$$

Таким чином, $Lu = B^2 u$ при всіх $u \in D(B^2)$ і, отже, L є додатним самоспряженим розширенням оператора B^2.

Перевіримо справедливість рівності $Z\mathcal{D}_+ = D_+$. Для цього розглянемо множину

$$\mathcal{M} = \{p = Bu + KBu \mid \forall u \in D(B^2)\}$$

елементів простору $\mathcal{D}_+$. З твердження c) леми 1 з [7] випливає, що $\mathcal{M}$ є щільною множиною в $\mathcal{D}_+$.

Згідно з рівностями (19) та (25)

$$Q_+Ku + Q_-u = Bu + KBu \quad (\forall u \in D(B)).$$

Отже, $KBu = Q_-u$. З останньої рівності, включення $D(B^2) \subset D(L)$ та ототожнення елементів $u \in D(L)$ з z_{Q_-u} одержуємо

$$Zp = \begin{pmatrix} z_{-iKBu} \\ Bu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{-iQ_-u} \\ Bu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -iu \\ Bu \end{pmatrix} \quad \forall p \in \mathcal{M}.$$

Отже, $Z\mathcal{D}_+ = D_+$, де підпростір D_+ визначається формулою (2). Випадок підпростору $\mathcal{D}_-$ розглядається аналогічно.

Мінімальність зчеплення $W(t)$ еквівалентна рівності (4). Ця рівність, з урахуванням співвідношень $Z\mathcal{D}_\pm = D_\pm$ та $W(t) = Z^{-1}W_L(t)Z$, еквівалентна мінімальності оператора L. Теорему 1 доведено.

1. *Лакс П. Д., Филлипс Р. С.* Теория рассеяния. – М.: Мир, 1971. – 310 с.
2. *Адамян В. М., Аров Д. З.* Об одном классе операторов рассеяния и характеристических оператор-функциях сжатий // Докл. АН СССР. – 1965. – **160**, № 1. – С. 9–12.
3. *Адамян В. М., Аров Д. З.* Об унитарных сцеплениях полуунитарных операторов // Мат. исслед. АН МССР. – 1966. – **1**, № 2. – С. 3–64.
4. *Адамян В. М.* К теории рассеяния для волновых уравнений в четномерных пространствах // Функцион. анализ и его прил. – 1976. – **10**, № 1. – С. 1–8.
5. *Аров Д. З.* Об унитарных сцеплениях с потерями (теория рассеяния с потерями) // Там же. – 1974. – **8**, № 4. – С. 5–22.
6. *Секефальви-Надь Б., Фояш Ч.* Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. – М.: Мир, 1970. – 427 с.
7. *Кужель С. О.* Про елементи схеми розсіяння Лакса–Філліпса для p-збурень абстрактного хвильового рівняння // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 12. – С. 1615–1629.
8. *Kuzhel A. V., Kuzhel S. A.* Regular extensions of Hermitian operators. – Utrecht: VSP, 1998. – 270 p.
9. *Кужель С. А.* Об определении свободной эволюции в схеме рассеяния Лакса–Филлипса для дифференциально-операторных уравнений второго порядка // Мат. заметки. – 2000. – **68**, № 6. – С. 854–861.
10. *Кужель С. А.* Об обратной задаче в схеме рассеяния Лакса–Филлипса для одного класса дифференциально-операторных уравнений // Алгебра и анализ. – 2001. – **13**, № 1. – С. 60–83.
11. *Лакс П. Д., Филлипс Р. С.* Теория рассеяния для автоморфных функций. – М.: Мир, 1979. – 324 с.
12. *Азизов Т. Я., Иохвидов И. С.* Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. – М.: Наука, 1986. – 351 с.

Одержано 24.04.2002