УДК 517.938.5

В. В. Шарко (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ГЛАДКАЯ И ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ФУНКЦИЙ НА ПОВЕРХНОСТЯХ

We establish and prove conditions under which the Morse functions given on surfaces are smooth equivalent and functions with isolated critical (degenerate) points are topologically equivalent.

Доведено, за яких умов функції Морса, задані на поверхнях, є гладко еквівалентними, а функції з ізольованими критичними (виродженими) точками є топологічно еквівалентними.

Введение. Пусть N — конечномерное замкнутое гладкое многообразие, $C^\infty(N)$ — пространство бесконечно дифференцируемых функций на N. Известно, что $C^\infty(N)$ является пространством Фреше, на котором задано действие бесконечномерной группы Ли со структурой многообразия Фреше $G_{\text{Diff}} = \text{Diff}(N) \times \text{Diff}_+(R^1)$, определенное равенством $(k, l)\cdot f = l \cdot f \cdot k^{-1}$, $k \in \text{Diff}(N)$, $l \in \text{Diff}_+(R^1)$, $f \in C^\infty(N)$. Здесь $\text{Diff}(N)$ — группа диффеоморфизмов многообразия N, а $\text{Diff}_+(R^1)$ состоит из тех диффеоморфизмов прямой R^1, которые сохраняют ориентацию.

Существует сложная **нерешенная проблема:** в каких случаях две функции из $C^\infty(N)$ принадлежат одной орбите под действием группы G_{Diff}?

Используя гладкую классификацию простых ростков, можно дать ответ для функций, заданных на поверхностях, которые содержат критические точки двух типов: изолированные и простые (в смысле Арнольда [1]), или образуют невырожденные окружности (в смысле Ботта [2]). В настоящей работе рассматривается пространство функций Морса $M(N)$ на компактной поверхности N. Доказывается, что каждая компонента линейной связности пространства $M(N)$ под действием группы G_{Diff} разбивается на конечное число орбит.

Если рассмотреть топологическую эквивалентность между функциями на поверхности N из класса $C^\infty(N)$, критические точки которых — изолированные, $f = l \cdot g \cdot k^{-1}$, то существует конечное число разных топологических типов таких функций. Здесь k принадлежит $\text{Top}(N)$ — группе гомеоморфизмов поверхности N, а l принадлежит $\text{Top}_+(R^1)$, состоящей из тех гомеоморфизмов прямой R^1, которые сохраняют ориентацию, $f, g \in C^\infty(N)$.

Важное значение в работе имеют атомы критических значений и K-R-образы функций на их графах Кронрода – Риба. В этих терминах дается необходимое и достаточное условие принадлежности функций Морса одной орбите под действием группы G_{Diff} и топологической эквивалентности гладких функций с изолированными особыми точками.

1. Атомы критических значений. Под гладкой поверхностью N (с краем) будем подразумевать двумерное гладкое компактное многообразие без края (с краем ∂N). Слово „гладкий" всегда будет указывать на принадлежность классу C^∞. Критическая точка x функции f, заданной на поверхности, это точка, где частные производные f равны нулю. Известно [3], что функцию f из класса $C^\infty(N)$ в окрестности изолированной критической точки $x \in N$, не являющейся локальным экстремумом, непрерывной заменой координат можно привести к виду $f = \operatorname{Re} z^n + c$, $n \geq 2$, если топологический тип линий уровня при переходе через x изменяется (в дальнейшем будем называть ее ***существенной критической точкой***), или к виду $f = \mathrm{Re}\, z$, если топологический тип линий уровня при переходе через x не изменяется (в этом случае от критической точки можно избавиться; будем называть ее ***несущественной критической точкой***). Рассмотрим в окрестности нуля U плоскости R^2 с координатами (x, y) функцию $f = \mathrm{Re}\, z^n + c$, $n \geq 2$, $z = x + iy$. Очевидно, что линия уровня $\Gamma = f^{-1}(c)$ функции f в окрестности U содержит критическую точку o и состоит из $2n$ интервалов, пересекающихся в точке o, или, как мы будем говорить в дальнейшем, $2n$ ребер, выходящих из одной вершины. Каждая соседняя пара ребер образует сектор, во внутренности которого функция f принимает значение больше (или меньше) c. Будем называть его в дальнейшем белым (или черным) сектором. Таким образом, в U будет $2n$ последовательно чередующихся белых и черных секторов.

Под конечным графом $\Sigma = (V, E)$ будем подразумевать конечный одномерный клеточный комплекс. Здесь V — нульмерные клетки (вершины), E — одномерные клетки (ребра) [4].

Определение 1.1. *Пусть граф Δ состоит из $2n$ ребер a_i, которые соединяют вершину x с $2n$ вершинами y_i. Разбиение ребер a_i на пары (a_i, a_j) вместе с указанием цвета (черного или белого)* $\mathrm{col}(a_i, a_j)$ *для каждой пары так, чтобы каждое ребро образовывало только одну белую и только одну черную пару в точности с двумя разными ребрами и цветочередующаяся последовательность* $\mathrm{col}(a_{i_1}, a_{i_2})$, $\mathrm{col}(a_{i_2}, a_{i_3})$, $\mathrm{col}(a_{i_3}, a_{i_4})$, … , $\mathrm{col}(a_{i_j}, a_{i_1})$ *имела длину $2n$, называется цветным спином в вершине x и обозначается $\lessdot x$.*

Пусть Δ_1 и Δ_2 — графы, у которых по $2n$ ребер a_i^1 и a_i^2 соответственно. Ребра a_i^1 (a_i^2) соединяют вершину x^1 (x^2) с $2n$ вершинами y_i^1 (y_i^2). Предположим, что в вершинах x^1 и x^2 заданы цветные спины $\lessdot x^1$ и $\lessdot x^2$. Изоморфизм между графами $\varphi : \Delta_1 \to \Delta_1$ сохраняет цветные спины, если каждая пара ребер графа Δ_1 с белым (черным) цветом переходит в пару ребер графа Δ_2 с белым (черным) цветом.

***Замечание* 1.1.** Очевидно, что граф Δ с $2n$ ребрами и цветным спином в вершине $\lessdot x$ можно вложить в окрестность U критической точки o функции $\mathrm{Re}\, z^n$ так, чтобы его образ лежал на $\Gamma = f^{-1}(0) \bigcap U$ и это вложение сохраняло цветные спины в вершине и в точке o. Т. е. граф Δ можно не только расширить до диска, но и задать на расширении функцию $\mathrm{Re}\, z^n$.

Определение 1.2. *Пусть порядок каждой вершины графа Δ четный. Цветным спином графа Δ называется задание цветного спина в каждой его вершине порядка большего, чем два. Граф Δ с заданным на нем цветным спином называют цветным спин-графом и обозначают $\lessdot \Delta$.*

В дальнейшем если задан цветной спин-граф $\lessdot \Delta$, то цветной спин, который есть в вершине x, будем обозначать через $\lessdot \Delta(x)$. Ясно, что на одном и том же графе можно различными способами задать цветной спин.

Определение 1.3. *Пусть $\lessdot \Delta_1$ и $\lessdot \Delta_2$ — два цветных спин-графа. Изоморфизм графов $\varphi : \lessdot \Delta_1 \to \lessdot \Delta_2$ сохраняет цветные спины, если каждая пара ребер с белым (черным) цветом цветного спина $\lessdot \Delta_1(x_i)$ в вершине x_i переходит в пару ребер с белым (черным) цветом цветного спина $\lessdot \Delta_2 \varphi(x_i)$ в вершине $\varphi(x_i)$.*

Рассмотрим функцию $f \in C^\infty(N)$, пусть c — ее критическое значение. Предположим, что компонента связности Γ из линии уровня $f^{-1}(c)$ содержит только изолированные критические точки. Компонента Γ является образом вложенного в поверхность N конечного графа, порядок каждой вершины которого четный. Вершинами вложенного графа являются критические точки функции f. Если рассмотреть непересекающиеся окрестности существенно критических точек, лежащих на Γ, то в каждой из них, используя функцию f, получаем цветной спин. Следовательно, Γ получает структуру графа с цветным спином.

Определение 1.4. *Компонента связности Γ линии уровня $f^{-1}(c)$ функции f из пространства $f \in C^{\infty}(N)$, содержащей только изолированные критические точки, с заданным на ней цветным спином в каждой существенной критической точке, полученной с использованием функции f, называется атомом критического значения c функции f. В дальнейшем атом обозначаем через $A(f, c)$.*

***Замечание* 1.2.** Если прообраз критического значения функции f состоит из k связных компонент, на которых находятся только изолированные критические точки, то имеется k атомов этого критического значения.

В дальнейшем под ***изоморфизмом*** атомов критических значений будем подразумевать изоморфизм, который сохраняет цветные спины, заданные на них. Циклом (ориентированным) на графе Δ называется совокупность ребер (ориентированных) из Δ, которые образуют гомеоморфный образ окружности (ориентированной). Пусть $\lessdot\Delta$ — цветной спин-граф. Определим на нем два типа циклов: b- и w-циклы.

Определение 1.5. *b-Циклом (w-циклом) на цветном спин-графе $\lessdot\Delta$ называется цикл, состоящий из ребер $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ таких, что $a_i \bigcap a_{i+1} = x_i$ — вершина и пара ребер (a_i, a_{i+1}) образует сектор, имеющий черный (белый) цвет цветного спина $\lessdot\Delta(x_i)$ в вершине x_i.*

Очевидно, что изоморфизм между цветными спин-графами $\lessdot\Delta_1$ и $\lessdot\Delta_2$, сохраняющий цветные спины, переводит b-циклы (w-циклы) из $\lessdot\Delta_1$ в b-циклы (w-циклы) из $\lessdot\Delta_2$.

Лемма 1.1. *Пусть задан конечный цветной спин-граф $\lessdot\Delta$, вершины $a_1, a_2, \ldots, a_k$ которого имеют порядок $2d_i$, больший двух. Предположим, что число его b-циклов (w-циклов) равно $s(t)$. Существуют поверхность N с краем $\partial N = \partial_- N \bigcup \partial_+ N$ и гладкая функция $f: N \to R^1$, имеющая в точности k критических точек, в окрестности которых она имеет вид $\operatorname{Re} z^{d_i}$. Число компонент связности края ∂N, входящих в $\partial_- N$ и $(\partial_+ N)$, равно $s(t)$. На компонентах $\partial_- N$ $(\partial_+ N)$ функция f принимает значение -1 (1) и все ее критические точки лежат на линии уровня $\Gamma = f^{-1}(0)$. Граф $\Gamma = f^{-1}(0)$, снабженный цветным спином, полученным с использованием функции f, и цветной спин-граф $\lessdot\Delta$ изоморфны с сохранением цветных спинов. В дальнейшем поверхность N называем* ***расширением*** *цветного спин-графа $\lessdot\Delta$.*

Доказательство. В начале построим поверхность N с краем ∂N. Пусть $D(\varepsilon) = (x, y): x^2 + y^2 \le \varepsilon^2$ — ε-окрестность нуля на плоскости R^2, в которой заданы функции $g_i = \operatorname{Re}(x + iy)^{d_i}$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Рассмотрим пересечения множеств $D(\varepsilon)$ и $\Phi_i = (x, y): -\delta \le \operatorname{Re}(x + iy)^{d_i} \le \delta$, которые обозначим через Cr_i. Граница множества Cr_i состоит из $2d_i$ дуг окружности $x^2 + y^2 = \varepsilon^2$ и $2d_i$ кусков линий уровня функции $\operatorname{Re}(x + iy)^{d_i} = \pm\delta$. В силу замечания 1.1 существует вложение φ окрестности каждой вершины графа Δ в линию уровня функции g_i, содержащую критическую точку, которое сохраняет цветные спины. Возьмем несвязное объединение k множеств Cr_l и вложим в них окрестности вершин графа Δ, используя вложение φ. Пусть число ребер графа Δ равно m. Выберем m полосок Υ_l, которые будем подклеивать к множествам Cr_l. На каждом множестве Cr_l задана функция g_l, которую мы используем для подклейки нужным образом к нему полосок Υ_l. А именно: вдоль каждого ребра графа Δ склеим меньшие стороны полоски Υ_{l_0} с соответствующими дугами a^l двух (или одного) множеств Cr_l. В некоторых случаях необходимо при склейке закрутить полоску на угол равный π, чтобы функции g_l с каждого множества Cr_l продолжались во внутрь полосок Υ_l без критических точек. В результате получим поверхность N_1 с заданной на ней функцией f_1. По построению число компонент края $\partial_- N$ $(\partial_+ N)$ поверхности N_1, которые состоят из длинных сторон полосок и кусков линий уровня $\operatorname{Re}(x+iy)^{d_l} = -\delta$ $(+\delta)$ и соответствуют b-циклам (w-циклам), на которых функция Морса f_1 принимает отрицательные (положительные) значения, в точности равно числу b-циклов (w-циклов) графа Δ. Подклеив к каждой компоненте края поверхности N_1 воротники и продолжив на них функцию f_1, получим искомые поверхность N и функцию f на ней. Тот факт, что граф $\Gamma = f^{-1}(0)$, снабженный цветным спином, полученным с использованием функции f, и цветной спин-граф $\lessdot \Delta$ изоморфны с сохранением цветных спинов, следует из способа построения поверхности N и функции f.

Лемма 1.1 доказана.

Поверхность N_1, построенная при доказательстве леммы 1.1, называется ***замкнутой*** ε-окрестностью атома функции f. Заклеив компоненты края поверхности N дисками, получим замкнутую поверхность M, эйлерова характеристика которой $\chi(M) = c_0 - c_1 + c_2$. Здесь c_0 — число вершин, c_1 — число ребер, c_2 — число b- и w-циклов цветного спин-графа $\lessdot \Delta$. Таким образом, выбор цветного спина на графе может менять тип его расширения. Очевидно, что на конечном графе можно задать только ***конечное число*** различных (не изоморфных) цветных спинов.

Лемма 1.2. *Существует конечное число попарно не изоморфных (как графов) конечных графов Δ_l с заданными на них цветными спинами, расширения которых — гомеоморфные поверхности.*

Доказательство. Гомеоморфные поверхности имеют одинаковые эйлеровы характеристики. Каждый граф Δ_l имеет эйлерову характеристику

$$\chi_0 = \chi(\Delta_l) = c_0 - c_1, \tag{*}$$

совпадающую с эйлеровой характеристикой его расширения, поскольку у них одинаковый гомотопический тип. Число вершин графа Δ_{l_0} не может превышать некоторого числа ν_0. Это следует из равенства (*), так как число ребер графа, необходимых для соединения всех c_0 вершин, равно $c_0 - 1$, а порядок каждой вершины больше или равен четырем. Следовательно, число ребер у графа Δ_{l_0} также не превышает некоторого числа ν_1. Имеется только конечное число возможностей для соединения ν_0 точек с помощью ν_1 ребер.

Лемма 1.2 доказана.

Подсчет числа попарно неизоморфных цветных спин-графов $\lessdot \Delta_l$ с одинаковыми эйлеровыми характеристиками — ***нерешенная задача***. Если $c_0 - c_1 + c_2 = 1 \mod (2)$, то расширение цветного спин-графа $\lessdot\Delta$ будет неориентированной поверхностью. Если $c_0 - c_1 + c_2 = 0 \mod (2)$, то расширение $\lessdot\Delta$ может быть как ориентированной, так и не ориентированной поверхностью.

Для выяснения вопроса о ее ориентированности необходимо выполнить следующее. Выберем на $\lessdot\Delta$ произвольное дерево Π, содержащее все вершины. Использовав цветной спин, расширим каждую вершину дерева Π до диска так, чтобы диски не пересекались. Сектора дисков, образованные отрезками ребер дерева Π, раскрасим в два цвета: черный и белый в зависимости от значения спина в вершинах. Затем подклеим вдоль ребер дерева Π черно-белые полоски к раскрашенным дискам так, чтобы цвета дисков и полосок были согласованы. В результате получим раскрашенную поверхность, гомеоморфную диску. Затем черно-белую полоску по очереди будем подклеивать (и отрывать) с согласованием цветов вдоль оставшихся ребер $\lessdot\Delta$. Если после каждой подклейки возникает поверхность с двумя компонентами края, то расширение $\lessdot\Delta$ будет ориентированной поверхностью. Если на каком-то шаге возникнет поверхность с одной компонентой края (лист Мебиуса), то расширение $\lessdot\Delta$ будет неориентированной поверхностью. Если у цветного спин-графа $\lessdot\Delta$ расширение — ориентируемая поверхность, то, выбрав ее ориентацию, можно задать в окрестности каждой вершины ориентированный циклический порядок на ребрах $\lessdot\Delta$. В этом случае будем говорить об ***ориентированном цветном спин-графе*** $\lessdot\Delta$. Если задан изоморфизм φ между ориентированными цветными спин-графами, который сохраняет двухцветные спины и ориентации в окрестностях вершин, то будем говорить, что ***изоморфизм*** φ ***сохраняет ориентацию.*** Этой терминологии будем придерживаться и для атомов критических значений.

2. Атомы функций Морса. Напомним, что функцией Морса на N называется гладкая функция, все критические точки которой находятся во внутренности N и невырождены, т. е. для каждой критической точки существует окрестность, в которой функция имеет вид невырожденной квадратичной формы [5]. Число минусов этой квадратичной формы называется индексом критической точки. Множество функций Морса $M(N)$ является всюду плотным в пространстве $C^{\infty}(N)$ [1] и имеет бесконечное число компонент линейной связности. Последнее следует из того факта, что две функции Морса с разным числом критических точек не могут принадлежать одной компоненте линейной связности множества $M(N)$. В работах [6, 7] доказано, что две функции Морса f и g на замкнутой поверхности принадлежат одной компоненте линейной связности множества $M(N)$ тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые сингулярные типы, т. е. у f и g совпадают числа критических точек каждого индекса.

Обозначим через $M_1(N, \partial_- N, \partial_+ N)$ пространство функций Морса на поверхности N с краем $\partial N = \partial_- N \cup \partial_+ N$, которые на компонентах связности края $\partial_- N$ ($\partial_+ N$) принимают значение a (b) и все критические точки которых лежат во внутренности N ($\partial_- N$ или $\partial_+ N$ может быть пустым). Несложно показать, используя рассуждения из [8], что и для функций Морса из класса $M_1(N, \partial_- N, \partial_+ N)$ совпадение сингулярных типов есть необходимое и достаточное условие принадлежности одной компоненте линейной связности.

Обозначим через $M_2((N, \partial N), R^1)$ пространство функций Морса на поверхности N с краем $\partial N = \partial_- N \cup \partial_+ N$, все критические точки которых лежат во внутренности N на одной линии уровня. Предположим также, что на компонентах связности края $\partial_- N$ ($\partial_+ N$) функции из $M_2((N, \partial N), R^1)$ принимают одинаковое значение a (b). На пространстве $M_2((N, \partial N), R^1)$ действует группа

$$G_{\mathrm{Diff}}^{\partial} = \mathrm{Diff}(N, \partial N) \times \mathrm{Diff}_+(R^1),$$

которая переводит компоненты края $\partial_- N$ ($\partial_+ N$) в себя.

Теорема 2.1. *Функции Морса f и g из пространства $M_2((N, \partial N), R^1)$ принадлежат одной орбите под действием группы $G_{\mathrm{Diff}}^{\partial}$ тогда и только тогда, когда атомы их критических значений изоморфны.*

Доказательство. *Необходимость.* Для простоты предположим (без ограничения общности), что нуль является критическим значением функций f и g. Пусть функции f и g принадлежат одной орбите группы $G_{\mathrm{Diff}}^{\partial}$. Тогда существуют два диффеоморфизма $k \in \in \mathrm{Diff}(N, \partial N)$, $l \in \mathrm{Diff}_+(R^1)$ такие, что $g = = l \cdot f \cdot k^{-1}$. Следовательно, критический уровень функции f диффеоморфизм k^{-1} отображает в критический уровень функции g. Поскольку диффеоморфизм k^{-1} отображает и остальные линии уровня функции f в линии уровня функции g, он сохраняет знакочередующие спины в каждой критической точке. Значит, атомы критических значений функций f и g изоморфны.

Достаточность. Пусть φ — изоморфизм между атомом критического уровня функции g и атомом критического уровня функции f. Для простоты предположим, что критические точки функций f и g не совпадают. Если это не так, то диффеоморфизмом, изотопным тождественному, сместим критические точки одной из функций. Выберем непересекающиеся окрестности критических точек функций f и g и локальные системы координат в них, где f и g имеют вид квадратичных форм. В этих окрестностях построим множества $Cr_l(f)$ и $Cr_l(g)$ (утолщенные кресты) для критических точек функций f и g соответственно, как при доказательстве леммы 1.1. Использовав изоморфизм φ, построим диффеоморфизмы k_l множеств $Cr_l(g)$ на множества $Cr_l(f)$. Затем продолжим диффеоморфизмы k_l до диффеоморфизма k_1, который задан на $U_l(g)$-замкнутых окрестностях (состоящих из кусков линий уровня функции g) отрезков, соединяющих критические точки функции g, и переводит окрестности $U_l(g)$ в аналогичные замкнутые окрестности $V_l(f)$ функции f. Диффеоморфизм k_1 выберем таким образом, чтобы он отображал линии уровня функции g, расположенные в $Cr_l(g) \bigcup U_l(g)$, в линии уровня функции f, которые лежат в $Cr_l(f) \bigcup U_l(f)$. По построению замыкание дополнения множества $Cr_l(g) \bigcup U_l(g)$ $(Cr_l(f) \bigcup U_l(f))$ в N состоит из несвязного объединения цилиндров $S^1 \times I$. Продолжим диффеоморфизм k_1 на эти цилиндры, чтобы множества уровня функции g переходили в множества уровня функции f. Используя диффеоморфизм l прямой R^1 на себя, добьемся, чтобы функция g переходила в функцию f, т.е. g и f принадлежали одной орбите группы $G_{\mathrm{Diff}}^{\partial}$.

Из леммы 1.2 и теоремы 2.1 следует такое утверждение.

***Следствие* 2.1.** *Существует только конечное число орбит действия группы $G_{\mathrm{Diff}}^{\partial}$ на пространстве $M_2((N, \partial N), R^1)$, равное числу не изоморфных цветных спин-графов, у которых расширения гомеоморфны поверхности N.*

***Замечание* 2.1.** Если поверхность N с краем $\partial N = \partial_- N \bigcup \partial_+ N$ ориентированная, то можно рассмотреть в группе $G_{\mathrm{Diff}}^{\partial}$ подгруппу $G_{\mathrm{Diff}_0}^{\partial}$, состоящую из тех диффеоморфизмов, которые сохраняют ориентацию. Имеют место аналоги теоремы 2.1 и следствия 2.1 для группы $G_{\mathrm{Diff}_0}^{\partial}$.

Теорема 2.2. *Функции Морса f и g из пространства $M_2((N, \partial N), R^1)$ принадлежат одной орбите под действием группы $G_{\mathrm{Diff}_0}^{\partial}$ тогда и только тогда, когда существует сохраняющий ориентацию изоморфизм между ориентированными атомами критических значений.*

Следствие 2.2. *Существует только конечное число орбит действия группы $G^{\partial}_{\mathrm{Diff}_0}$ на пространстве $M_2((N, \partial N), R^1)$, равное числу ориентированно не изоморфных цветных спин-графов, у которых расширения гомеоморфны поверхности N.*

Доказательства этих утверждений почти дословно повторяют доказательства теоремы 2.1 и следствия 2.1. В работах [9 – 14] использованы другие подходы к аналогичным задачам.

3. Хордовые диаграммы и число атомов функций Морса. Обозначим через Θ класс изоморфных с сохранением ориентации ориентированных цветных спин-графов, у которых порядок каждой вершины равен четырем, их расширение — ориентированные поверхности и которые имеют только один белый (черный) цикл.

Если граф Δ из класса Θ имеет один белый (черный) и k черных (белых) циклов, то положительное число $g = 1/2(c_0 + 1 - k)$ называется ***родом*** графа Δ. Здесь c_0 — число вершин графа Δ. ***Хордовая диаграмма с n хордами*** — это окружность, на которой расположены n пар диаметрально противоположных точек так, что расстояние между соседними точками равно $1/2$ (π/n), и задано их разбиение на непересекающиеся пары эквивалентных точек [15, 16]. Две хордовые диаграммы называются ***изоморфными***, если существует поворот окружности, переводящий одну хордовую диаграмму в другую. Ориентируем произвольным образом окружность хордовой диаграммы. ***Циклом*** на хордовой диаграмме называется путь, образованный ориентированными дугами окружности, на которые разбивают окружность расположенные на ней $2n$ точек так, что противоположные концы дуг эквивалентных точек отождествлены. Цикл не зависит от выбора ориентации окружности. ***Родом*** хордовой диаграммы с n хордами называется положительное число $g = 1/2\,(n + 1 - k)$, где k — число ее циклов. Иногда под хордовой диаграммой понимают эквивалентный объект — окружность, у которой пары точек, расположенные на окружности, соединены хордами [2, 17]. Пусть $X\ (\otimes, g, k)$ — множество классов изоморфных хордовых диаграмм рода g с k циклами, $\Theta(g, k)$ — множество классов ориентированно изоморфных цветных спин-графов рода g, которые имеют один черный (белый) и k белых (черных) циклов.

Лемма 3.1. *Существует биекция между множествами* $X(\otimes, g, k)$ *и* $\Theta\,(g, k)$.

Доказательство. Пусть Δ — граф из класса эквивалентности, принадлежащий множеству $\Theta\,(g, k)$. с одним (для определенности) черным циклом. Обозначим через $\varepsilon_i^1, \varepsilon_i^2$ и δ_i^1, δ_i^2 пары отрезков, примыкающих к вершине $a_i \in \Delta$, которые образуют черные сектора. Если вершины $a_i \in \Delta$ рассоединить, чтобы отрезки ε_i^1 и ε_i^2 $(\delta_i^1$ и $\delta_i^2)$ имели на появляющейся окружности одну общую точку $\overline{a}_i$ $(\bar{\bar{a}}_i)$, а образовавшиеся пары точек $(\overline{a}_i, \bar{\bar{a}}_i)$ объявить эквивалентными, то получим хордовую диаграмму $\Xi\,(\Delta)$, которая представляет некоторый класс из множества $X(\otimes, g, k)$. Так построенное отображение $\Delta \Rightarrow \Rightarrow Xi\,(\Delta)$ обозначим через Ξ. Наоборот, пусть Ω — хордовая диаграмма из множества $X(\otimes, g, k)$. Рассмотрим ее пару эквивалентных точек a_i и b_i. Обозначим через ε_i^1 и ε_i^2 $(\delta_i^1$ и $\delta_i^2)$ маленькие отрезки, примыкающие к точке a_i (b_i) при движении по окружности вдоль произвольно выбранной ориентации. Отождествив на окружности все пары эквивалентных точек, получим граф $\Gamma\,(\Omega)$, порядок всех вершин которого равен четырем. Зададим на графе $\Gamma\,(\Omega)$ цветной спин следующим образом: в вершине, которая соответствует паре точек

a_i и b_i, пары отрезков ε_i^1 и ε_i^2, δ_i^1 и δ_i^2 объявим белыми, а пары отрезков ε_i^2 и δ_i^1, ε_i^1 и δ_i^2 — черными. Легко проверить, что граф $\Gamma(\Omega)$ с таким цветным спином принадлежит некоторому классу из множества $\Theta(g, k)$. Так построенное отображение $\Omega \Rightarrow \Gamma(\Omega)$ обозначим через Γ. Легко видеть, что $\Gamma(\Xi(\Delta)) = \Delta$ и соответственно $\Xi(\Gamma(\Omega)) = \Omega$, т. е. множества $X(\otimes, g, k)$ и $\Theta(g, k)$ находятся в биекции.

Лемма 3.1 доказана.

Имеется более глубокая причина, указывающая на биекцию между хордовыми диаграммами и графами из множеств $X(\otimes, g, k)$ и $\Theta(g, k)$. Из работы [12] вытекает, что если поверхность N — ориентированная, то хордовая диаграмма — полный инвариант орбиты функции Морса пространства $M_2((N, \partial N), R^1)$. Используя теорему 2.1, получаем утверждение леммы 3.1.

Перейдем теперь к вопросу о подсчете числа не изоморфных хордовых диаграмм. Формула Волша и Лемана [18] для подсчета μ_g — числа хордовых диаграмм с одним циклом рода g — имеет вид $\mu_g = (4g)!/4^g(2g+1)$.

В работе [19] (см. также [20, 21]) рассмотрены вопросы подсчета μ_g^* — числа не изоморфных хордовых диаграмм. В частности, в [19] найдена точная формула для нахождения числа не изоморфных хордовых диаграмм с одним циклом рода g:

$$\mu_g^* = 1/4g\left[\mu_g + \sum_{qk=4g}\phi(q)\sum_{\gamma=0}^{k/4}\binom{k}{4\gamma}\mu_\gamma q^{2\gamma} + \sum_{qk=4g}\phi(q)q^{k/2}\mu_{k/4}\right],$$

где первая сумма берется по четным, а вторая — по нечетным значениям q. Кроме того, в [19] приведено значение числа μ_g^*. Например, если $g=2$, то $\mu_2^* = 4$, если $g=3$, то $\mu_3^* = 131$, если $g=4$, то $\mu_4^* = 14118$, если $g=7$, то $\mu_7^* = 508233789579$ (см. также [22, 23], где были найдены начальные значения этих чисел при подсчете числа топологически не эквивалентных векторных полей Морса – Смейла). Используя теорему 2.1 и значения μ_g^*, можно точно указать число орбит группы $G^{\partial}_{\mathrm{Diff}_0}$ при ее действии на пространстве функций Морса $M_2((N, \partial N), R^1)$, когда N — ориентированная поверхность. Кроме того, возникает представление о росте числа орбит в зависимости от рода поверхности N.

4. Топологическая эквивалентность атомов гладких функций с изолированными особыми точками. Две функции f и g из пространства $C^\infty(N)$, которые имеют изолированные критические точки, называются ***топологически эквивалентными***, если существуют гомеоморфизмы $k: (N, \partial N) \to (N, \partial N)$ $(k(\partial N_\pm) = \partial N_\pm)$ и $l: R^1 \to R^1$ (l сохраняет ориентацию), такие, что $g = l \cdot f \cdot k^{-1}$. Число существенно критических точек функции f вместе со значениями n_i (показателями в представлении f в виде $f = \operatorname{Re} z^{n_i} + c_i$ в окрестностях этих критических точек) называется ***топологическим сингулярным типом*** функции f. Пусть $C_1^\infty(N, \partial N)$ — подпространство пространства $C^\infty(N)$, состоящее из функций на поверхности N с краем $\partial N = \partial_- N \cup \partial_+ N$ таких, что все их критические точки лежат на внутренности N на одной линии уровня и на компонентах связности края $\partial_- N$ $(\partial_+ N)$ они принимают одинаковое значение a (b).

Теорема 4.1. *Функции f и g из пространства $C_1^\infty(N, \partial N)$ топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда атомы их критических значений изоморфны.*

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 2.1 с очевидными изменениями в окрестностях не морсовских критических точек (берутся гомеоморфизмы, а не диффеоморфизмы).

Следствие **4.1.** *Существует только конечно число топологически не эквивалентных функций из пространства $C_1^\infty(N, \partial N)$, равное числу не изоморфных цветных спин-графов, у которых расширения гомеоморфны поверхности N.*

Доказательства этих утверждений почти дословно повторяют доказательства теоремы 4.1 и следствия 4.1.

5. Графы Кронрода – Риба гладких функций с изолированными особыми точками. Обозначим через $C^\infty(N, \partial N)$ пространство гладких функций на поверхности N с краем ∂N, у которых все критические точки изолированные и лежат во внутренности N. Предположим также, что на компонентах связности края ∂N функции из пространства $C^\infty(N, \partial N)$ принимают постоянные значения (случай отсутствия края исключается). Рассмотрим произвольную компоненту связности линии уровня $f^{-1}(a)$ функции f из $C^\infty(N, \partial N)$, которую часто называют слоем. Если a — регулярное значение функции f, то слоем будет гладко вложенная в поверхность N окружность. В случае, когда a — критическое значение, слоем будет замкнутое множество, гомеоморфное конечному графу, порядок вершин которого четный. [3]. Если рассмотреть все слои функции f, то получим разбиения поверхности N в объединение слоев, т. е. на N возникает слоение с особенностями. Принадлежность точки поверхности слою является отношением эквивалентности и, вводя естественную фактор-топологию в множество слоев, получаем фактор-множество. Это фактор-множество будет конечным графом, которое обозначим $\Gamma_{K-R}(f)$.

Определение 5.1. *Граф $\Gamma_{K-R}(f)$ называется графом Кронрода – Риба для функции f из пространства $C^\infty(N, \partial N)$.*

По поводу этого определения см. [17]. Вершинам графа $\Gamma_{K-R}(f)$ соответствуют связные компоненты линий уровня, на которых находятся существенные критические точки функции. Вершинам порядка 1 соответствуют локальные экстремумы функции f. Очевидно, что функция f каноническим образом задает функцию f_{K-R} на ее графе Кронрода – Риба $\Gamma_{K-R}(f)$. Значение f_{K-R} в точке $x \in \Gamma_{K-R}(f)$ равно значению f на соответствующей точке x компоненте связности линии уровня.

Определение 5.2. *Функция f_{K-R}, заданная на графе Кронрода – Риба $\Gamma_{K-R}(f)$, называется K-R-образом функции f, заданной на поверхности N.*

Замечание **5.1.** Для дальнейшего нам достаточно знать значение функции f_{K-R} только на вершинах графа Кронрода – Риба $\Gamma_{K-R}(f)$ функции f. И поэтому именно это мы будем понимать под ***K-R-образом функции*** f. В некоторых вопросах необходимо вводить структуру метрического пространства на графе Кронрода – Риба $\Gamma_{K-R}(f)$ функции f и рассматривать функцию f_{K-R} на всем $\Gamma_{K-R}(f)$.

Граф Кронрода – Риба допускает ориентацию, т. е. расстановку стрелок на ребрах, указывающих направление, в котором функция f_{K-R} возрастает.

Заметим, что не каждый конечный граф, имеющий не меньше двух вершин порядка один, будет графом Кронрода – Риба для некоторой гладкой функции с конечным числом критических точек на компактной гладкой поверхности. Ориентированный граф Γ, для которого существует поверхность N и гладкая функция f на ней с изолированными критическими точками такая, что ее граф Кронрода – Риба $\Gamma_{K-R}(f)$ изоморфен с сохранением ориентации графу Γ, называется ***K-R*-графом**.

Определение 5.3. *Пусть на гладкой поверхности N заданы две функции f, g из пространства $C^\infty(N, \partial N)$ и f_{K-R}, g_{K-R} на графах $\Gamma_{K-R}(f)$ и $\Gamma_{K-R}(g)$. Будем говорить, что f и g K-R-эквивалентны, если их K-R-образы f_{K-R} и g_{K-R} эквивалентны, т. е. существуют изоморфизм $s : \Gamma_{K-R}(f) \to \to \Gamma_{K-R}(g)$ и гомеоморфизм $t: R^1 \to R^1$ такие, что $t \cdot f_{K-R} \cdot s^{-1} \doteq g_{K-R}$.*

Несложно доказать, что если две гладкие функции f и g из пространства $C^\infty(N, \partial N)$ топологически эквивалентны, то они и K-R-эквивалентны. Однако, обратное утверждение неверно. Пусть $\natural C^\infty(N, \partial N)$ обозначает множество классов топологически эквивалентных функций, а $\natural\Gamma_{K-R}(N)$ — множество изоморфных с сохранением ориентации K-R-графов, построенных по функциям, заданным на поверхности N. Имеет место отображение $\zeta: \natural\Gamma_{K-R}(N) \to \natural\Gamma_{K-R}(N)$, классу эквивалентности функции f ставится в соответствие класс эквивалентности ее графа Кронрода – Риба $\Gamma_{K-R}(f)$. Пусть $T(\natural C^\infty(N, \partial N))$ — подмножество в $\natural C^\infty(N, \partial N)$, состоящее из классов эквивалентности функций, имеющих одинаковый топологический сингулярный тип.

Лемма 5.1. *Множество $\zeta(T(\natural C^\infty(N, \partial N)))$ является конечным.*

Доказательство. Число вершин графов из множества $\zeta(T(\natural C^\infty(N, \partial N)))$ не может превышать числа существенно критических точек функций из множества $T(\natural C^\infty(N, \partial N))$. Порядок каждой вершины графов из $\zeta(T(\natural C^\infty(N, \partial N)))$ ограничен. Следовательно, существует только конечное число не изоморфных графов из множества $\zeta(T(\natural C^\infty(N, \partial N)))$.

Лемма 5.1 доказана.

С каждым атомом $A(f, c)$ критического значения c функции f из $C^\infty(N, \partial N)$ можно связать его граф Кронрода – Риба K-$R(A(f, c))$. А именно, надо рассмотреть сужение $f|_U$ функции f на замкнутую ε-окрестность U атома $A(f, c)$ и построить граф Кронрода – Риба для $f|_U$. Он представляет собой два набора a_i и b_j ребер, выходящих из вершины. Набор ребер a_i (b_j) соответствует b-циклам (w-циклам) атома $A(f, c)$. Имеется ***каноническое вложение*** открытого графа (вершины порядка один удалены) Кронрода – Риба K-$R(A(f, c))$ каждого атома $A(f, c)$ функции f. Если изоморфизм s: $\Gamma_{K-R}(f) \to \Gamma_{K-R}(g)$ и гомоморфизм $t: R^1 \to R^1$ устанавливают K-R-эквивалентность между функциями f и g, то, очевидно, возникает изоморфизм между графами Кронрода – Риба соответствующих атомов этих функций, которые, вообще говоря, не индуцируются никакими изоморфизмами между этими атомами.

Определение 5.4. *Пусть $A(f, c)$ — атом критического значения c функции f. b-Цикл (w-цикл) атома называется существенным, если соответствующая ему нижняя (верхняя) компонента края ε-окрестности U атома $A(f, c)$ ограничивает на поверхности N диск или изотопна компоненте края N.*

Рассмотрим функцию f из пространства $C^\infty(N, \partial N)$. Обозначим через $A(f, c_i^j)$ все ее атомы критических значений c_i. Между существенными w-циклами и существенными b-циклами атомов $A(f, c_i^j)$ имеется биекция ρ. Отображение ρ строится следующим образом. Пусть y — существенный w-цикл атома $A(f, c_{i_0}^{j_0})$. Рассмотрим соответствующую ему окружность S_1^1 в ε-окрестности атома $A(f, c_{i_0}^{j_0})$. Найдется атом $A(f, c_{i_1}^{j_1})$ и существенный b-цикл z в нем такой, что соответствующая ему окружность S_2^1 в ε-окрестности атома $A(f, c_{i_1}^{j_1})$ будет изотопна окружности S_1^1 на поверхности N. Это хорошо видно на графе Кронрода – Риба функции f. Окружностям S_1^1 и S_2^1 соответствуют точки на графе Кронрода – Риба функции f, которые лежат на одном ребре. Положим $\rho(y) = z$. По построению отображение ρ является биекцией. Ориентировав одинаковым образом окружности S_1^1 и S_2^1, поскольку они изотопны, перенесем эти ориентации на b-цикл z и w-цикл y. Будем говорить, что b-цикл z и w-цикл y с такой выбранной ориентацией ***гомологичны***.

Определение 5.5. *Оснащением графа Кронрода – Риба $\Gamma_{K-R}(f)$ функции f из пространства $C^\infty(N, \partial N)$ называется:*

а) *задание атомов функции f во всех вершинах ее графа Кронрода – Риба $\Gamma_{K-R}(f)$;*

б) *указание гомологических циклов для всех ее атомов.*

Определение 5.6. *Пусть на гладкой поверхности N заданы две функции f и g из пространства $C^\infty(N, \partial N)$. Функции f и g оснащенно K-R-эквивалентны, если:*

а) *графы Кронрода – Риба $\Gamma_{K-R}(f)$ и $\Gamma_{K-R}(g)$ функций f и g оснащены;*

б) *эквивалентность Φ между K-R-образами f_{K-R} и g_{K-R} функций f и g индуцирует изоморфизмы φ_j между графами Кронрода – Риба соответствующих атомов функций f и g;*

в) *изоморфизмы φ_j между графами Кронрода – Риба атомов функций f и g порождены изоморфизмами Φ_j этих атомов функций f и g;*

г) *изоморфизмы Φ_j между атомами согласованы, т.е. Φ_j действуют одинаково на гомологические циклы атомов функции f (одновременно сохраняют или обращают ориентацию).*

Лемма 5.2. *Существует конечное число оснащенно K-R не эквивалентных функций из класса $C^\infty(N, \partial N)$, которые имеют одинаковый сингулярный топологический тип.*

Доказательство. На основании леммы 5.1 множество классов эквивалентности графов Кронрода – Риба функций из класса $C^\infty(N, \partial N)$, имеющих одинаковый сингулярный топологический тип, является конечным. Число не изоморфных атомов этих функций также конечное, поскольку их эйлерова характеристика ограничена числом критических точек, и можно воспользоваться леммой 1.2. Следовательно, будет конечным число оснащенно эквивалентных функций, имеющих одинаковый сингулярный топологический тип.

Замечание 5.2. Если поверхность N — ориентированная, то, выбрав ее ориентацию, можно ориентировать все атомы функции f из $C^\infty(N, \partial N)$. Поэтому можно определить ***ориентированную оснащенную K-R-эквивалентность***, добавив в п. в) определения 5.6 слово ***ориентированными***.

Лемма 5.3. *Существует конечное число не эквивалентных ориентированно оснащенных K-R-функций из класса $C^\infty(N, \partial N)$, имеющих одинаковый сингулярный топологический тип.*

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 5.2.

Оснащение графа Кронрода – Риба с идейной точки зрения близко к понятию молекулы Болсинова – Фоменко для функций Морса [9].

6. Орбиты функций Морса. Пусть функции Морса f и g принадлежат пространству $M_1((N,\partial N), R^1)$. Рассмотрим их графы Кронрода – Риба $\Gamma_{K-R}(f)$ и $\Gamma_{K-R}(g)$ и выберем их оснащение. Предположим, что их K-R-образы f_{K-R} и g_{K-R} оснащенно эквивалентны.

Теорема 6.1. *Функции Морса f и g из пространства $M_1((N,\partial N), R^1)$ принадлежат одной орбите под действием группы*

$$G^{\partial}_{\mathrm{Diff}} = \mathrm{Diff}(N,\partial N) \times \mathrm{Diff}_+(R^1)$$

тогда и только тогда, когда их K-R-образы f_{K-R} и g_{K-R} оснащенно эквивалентны.

Доказательство. Необходимость. Пусть функции f и g принадлежат одной орбите группы $G^{\partial}_{\mathrm{Diff}}$. Тогда существуют два диффеоморфизма $k \in \mathrm{Diff}(N,\partial N)$, $l \in \mathrm{Diff}_+(R^1)$ такие, что $g = l \cdot f \cdot k^{-1}$. Следовательно, каждый критический уровень функции f диффеоморфизм k^{-1} отображает в критический уровень функции g. Поскольку диффеоморфизм k^{-1} отображает и остальные линии уровня функции f в линии уровня функции g, он сохраняет цветные спины в каждой критической точке. Значит, все атомы критических значений функций f и g изоморфны. Понятно, что K-R-образы f_{K-R} и g_{K-R} функций f и g оснащенно эквивалентны и эквивалентность между f_{K-R} и g_{K-R} индуцирует изоморфизмы между графами Кронрода – Риба соответствующих атомов функций f и g. Изоморфизмы между графами Кронрода – Риба атомов функций f и g порождены изоморфизмами этих атомов. Изоморфизмы между атомами согласованы, т. е. образы гомологичных циклов атомов функции f одновременно сохраняют или обращают ориентацию.

Достаточность. Пусть φ — оснащенная эквивалентность между f_{K-R}- и g_{K-R}-образами функций g и f. Для простоты предположим (что не ограничивает общности), что критические значения функций f и g совпадают. Рассмотрим непересекающиеся замкнутые ε-окрестности U_i (V_i) компонент связности критических уровней функций f и g, содержащих критические точки. Замыкание дополнения к U_i (V_i) в N есть несвязное объединение W_1 (Q_1) — декартовых произведений окружности на отрезок и дисков. Условия теоремы гарантируют существование диффеоморфизмов $k_i^1 : U_i \to V_i$, которые продолжаются до диффеоморфизмов между несвязными объединениями цилиндров и дисков W_1 и Q_1. Сшивая эти диффеоморфизмы, получаем диффеоморфизм поверхности N в себя, который переводит функцию g в f.

Из леммы 5.2 и теоремы 6.1 следует такое утверждение.

Следствие 6.1. *Существует только конечное число орбит действия группы $G^{\partial}_{\mathrm{Diff}}$ на компоненте связности L пространства $M_1((N,\partial N), R^1)$, равное числу оснащенно не изоморфных K-R-образов функций Морса из множества L.*

***Замечание* 6.1.** Если поверхность N с краем $\partial N = \partial_- N \cup \partial_+ N$ ориентированная, то можно рассмотреть в группе $G^{\partial}_{\mathrm{Diff}}$ подгруппу $G^{\partial}_{\mathrm{Diff}_0}$, состоящую из тех диффеоморфизмов, которые сохраняют ориентацию. Имеют место аналоги теоремы 6.1 и следствия 6.1 для группы $G^{\partial}_{\mathrm{Diff}_0}$.

Теорема 6.2. *Функции Морса* f *и* g *из пространства* $M_1((N,\partial N),R^1)$ *принадлежат одной орбите под действием группы* $G^{\partial}_{\mathrm{Diff}_0}$ *тогда и только тогда, когда существует ориентированно оснащенная эквивалентность между* K-R*-образами* f_{K-R} *и* g_{K-R}.

***Следствие* 6.2.** *Существует только конечное число орбит действия группы* $G^{\partial}_{\mathrm{Diff}_0}$ *на компоненте* K *пространства* $M_1((N,\partial N),R^1)$, *равное числу ориентированно оснащенных не изоморфных* K-R*-образов функций Морса из множества* L.

Доказательства этих утверждений почти дословно повторяют доказательства теоремы 6.1 и следствия 6.1.

7. Топологическая эквивалентность гладких функций с изолированными особыми точками.

Теорема 7.1. *Пусть функции* f *и* g *на поверхности* N *с краем* $\partial N = \partial_- N \bigcup \partial_+ N$ *принадлежат пространству* $C^\infty(N)$. *Функции* f *и* g *топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда оснащенно эквивалентны их* K-R*-образы.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 6.1 с очевидными изменениями в окрестностях не морсовских критических точек.

Из теоремы 7.1 следует такое утверждение.

***Следствие* 7.1.** *Существует только конечное число топологически не эквивалентных функций из пространства* $C^\infty(N)$ *на поверхности* N *с краем* $\partial N = \partial_- N \bigcup \partial_+ N$, *имеющих одинаковый топологический сингулярный тип. Это число равно числу оснащенно не эквивалентных* K-R*-образов функций из* $C^\infty(N)$, *имеющих этот топологический сингулярный тип.*

Пусть N — ориентированная поверхность.

Теорема 7.2. *Функции* f *и* g *из пространства* $C^\infty(N)$ O*-топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда существует ориентированно оснащенная эквивалентность между их* K-R*-образами* f_{K-R} *и* g_{K-R}.

***Следствие* 7.2.** *Существует конечное число* O*-топологически не эквивалентных функций из пространства* $C^\infty(N)$, *имеющих одинаковый топологический сингулярный тип. Это число равно числу ориентированно оснащенных не эквивалентных* K-R*-образов функций из* $C^\infty(N)$, *имеющих этот топологический сингулярный тип.*

Доказательства этих утверждений аналогичны доказательствам теоремы 7.1 и следствия 7.1.

1. *Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М.* Особенности дифференцируемых отображений: В 2 т. – М.: Наука, 1982. – Т. 1. – 302 с.
2. *Bott R.* Lectures on Morse theory // Bull. Amer. Math. Soc. – 1982. – **7**. – P. 331 – 358.
3. *Prishlyak A. O.* Topological equivalence of smooth functions with isolated critical points on a closed surface // Topology and its Appl. – 2002. – **119**. – P. 257 – 267.
4. *Рохлин В. А., Фукс Д. Б.* Начальный курс топологии. Геометрические главы. – М.: Наука, 1977. – 487 с.
5. *Милнор Дж.* Теория Морса. – М.: Мир, 1965. – 184 с.
6. *Кудрявцева Е. А.* О реализации гладких функций на поверхностях в виде функций высоты // Мат. сб. – 1999. – **190**, № 1. – С. 29 – 88.
7. *Шарко В. В.* Функции на поверхностях. I // Некоторые вопросы современной математики: Пр. Ін-ту математики НАН України. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1998. – **25**. – С. 408 – 434.
8. *Шарко В. В.* Функции на многообразиях. – Киев: Наук. думка, 1990. – 192 с.

9. *Болсинов А. В., Фоменко Ф. Т.* Введение в топологию интегрируемых гамильтоновых систем. – М.: Наука, 1997. – 352 с.
10. *Максименко С. И.* Классификация m-функций на поверхностях // Укр мат. журн. – 1999. – **51**, № 8. – С. 1129 – 1135.
11. *Мантуров В. О.* Атомы, высотные атомы, хордовые диаграммы и узлы. Перечисление атомов малой сложности с использованием языка Mathematica 3.0 // Топологические методы в теории гамильтоновых систем: сб. ст. / Под ред. А. В. Болсинова, А. Т. Фоменко, А. И. Шафаревича. – М.: Факториал, 1998. – С. 203 – 212.
12. *Ошемков А. А.* Функции Морса на двумерных поверхностях. Кодирование особенностей // Тр. Мат. ин-та РАН. – 1994. – **205**. – С. 131 – 140.
13. *Sharko V. V.* On topological equivalence Morse functions on surfaces // Int. Conf. Chelyabinsk State Univ. "Low-Dimensional Group Theory". – 1996. – P. 19 – 23.
14. *Kulinich E. V.* On topologically equivalent Morse functions on surfaces // Meth. Function. Analysis and Topology. – 1998. – **4**, № 1. – P. 59 – 64.
15. *Васильев В. А.* Топология дополнений к дискриминантам. – М.: ФАЗИС, 1997. – 538 с.
16. *Матвеев С. В., Фоменко А. Т.* Алгоритмические и компьютерные методы в трехмерной топологии. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1991. – 301 с.
17. *Кронрод А. С.* О функциях двух переменных // Успехи мат. наук. – 1950. – **5**, № 1. – С. 24 – 134.
18. *Walsh T. R. S., Lehman A. B.* Counting rooted maps by genus. I, II // J. Combin. Theory B. – 1972. – **4**, № 1. – P. 192 – 218, 122 – 141.
19. *Gori R., Marcus M.* Counting non-isomorphic chord diagrams // Theor. Comput. Sci. – 1998. – **204**. – P. 55 – 73.
20. *Stoimenov A.* On the number of chord diagrams // Discrete Math. – 2000. – **218**, № 1–3. – P. 209 – 233.
21. *Khruzin A.* Enumeration of chord diagrams. – Preprint // aRxiv: math. CO/008209. – 10 p.
22. *Гирик Е. А.* О существовании векторных полей с заданным набором особенностей на двумерном замкнутом ориентируемом многообразии // Укр мат. журн. – 1993. – **46**, № 12. – С. 1706 – 1709.
23. *Poltavec D.* Equivalent polar Morse – Smale systems on two dimensional manifolds of genus 3 // Abstrs Int. Conf. Topology and Appl. – Kiev, 1995. – P. 29.

Получено 18.02.2003