УДК 517.5

А. Г. Бакан (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

КРИТЕРИЙ ПЛОТНОСТИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ В ПРОСТРАНСТВАХ $L_p(\mathbb{R}, d\mu)$, $1 \leq p < \infty$

The criterion of denseness of polynomials in the space $L_2(\mathbb{R}, d\mu)$ established by H. Hamburger in 1921 is extended to the spaces $L_p(\mathbb{R}, d\mu)$, $1 \leq p < \infty$.

Встановлений Г. Гамбургером у 1921 р. критерій щільності многочленів у просторі $L_2(\mathbb{R}, d\mu)$ розповсюджено на простори $L_p(\mathbb{R}, d\mu)$, $1 \leq p < \infty$.

1. Введение и основной результат. Пусть $\mathcal{M}^*(\mathbb{R})$ обозначает множество всех положительных борелевских мер на вещественной оси, имеющих все конечные моменты и неограниченный носитель. Для $\mu \in \mathcal{M}^*(\mathbb{R})$ пусть $\{P_n\}_{n\geq 0}$ — соответствующая последовательность ортонормированных многочленов первого рода [1] и

$$\rho(\mu, z) := \left(\sum_{n=0}^{\infty} |P_n(z)|^2 \right)^{-1}, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{1}$$

Мера $\mu \in \mathcal{M}^*(\mathbb{R})$ называется *определенной* (в смысле Гамбургера), если не существует другой меры из $\mathcal{M}^*(\mathbb{R})$, которая имеет те же моменты, что и μ, и *неопределенной* — в противном случае. Будем использовать обозначения $\mathcal{P}[\mathbb{C}]$ и $\mathcal{P}[\mathbb{R}]$ для всех алгебраических многочленов с комплексными и действительными коэффициентами соответственно. Известно, что для каждого $1 \leq p \leq \infty$ алгебраические многочлены с действительными коэффициентами плотны в пространстве действительнозначных функций $L_p(\mathbb{R}, d\mu)$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{P}[\mathbb{C}]$ плотно в соответствующем пространстве комплекснозначных функций [1]. Поэтому без ограничения общности можно рассматривать только действительный случай.

В 1921 году Г. Гамбургер [2] доказал следующую теорему.

Теорема А. *Если* $\mu \in \mathcal{M}^*(\mathbb{R})$ *является определенной, то* $\rho(\mu, z) = 0$ *для всех* $z \in \mathbb{C}$, *за исключением не более счетного числа точек* $z \in \mathbb{R}$, *где* $\mu(\{z\}) > 0$. *Если* $\mu \in \mathcal{M}^*(\mathbb{R})$ *является неопределенной, то* $\rho(\mu, z) > 0$ *для всех* $z \in \mathbb{C}$.

В статье [2] было также доказано, что

$$\rho(\mu, z) = \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}} |P(x)|^2 \, d\mu(x) \,\middle|\, |P(z)| = 1, \ P \in \mathcal{P}[\mathbb{C}] \right\}. \tag{2}$$

Следующий фундаментальный результат был получен в 1923 г. М. Риссом [3].

Теорема B. *Множество $\mathcal{P}[\mathbb{R}]$ плотно в $L_2(\mathbb{R}, d\mu)$ тогда и только тогда, когда мера $(1+|x|)^{-2}d\mu(x)$ является определенной.*

Таким образом, все известные критерии определенности меры μ могут быть переформулированы как критерии полиномиальной плотности в пространстве $L_2(\mathbb{R}, (1+|x|)^2 d\mu(x))$.

Для произвольных $\mu \in \mathcal{M}^*(\mathbb{R})$, $z \in \mathbb{C}$ и $1 \le p < \infty$ определим меры

$$d\mu_p(x) := (1+|x|)^{-p} d\mu(x), \qquad d\mu^{(p)}(x) := |x|^p d\mu(x), \tag{3}$$

и функции

$$\rho_p(\mu, z) = \inf\left\{ \|P\|_{L_p(\mu_p)} \,\Big|\, |P(z)| = 1,\ P \in \mathcal{P}[\mathbb{R}] \right\}, \tag{4}$$

$$M_p(\mu, z) = \sup\left\{ |P(z)| \,\Big|\, \|P\|_{L_p(\mu_p)} \le 1,\ P \in \mathcal{P}[\mathbb{C}] \right\}. \tag{5}$$

Здесь и всюду ниже $\|\cdot\|_{L_p(\mu)}$, $1 \le p \le \infty$, обозначает норму пространства $L_p(\mathbb{R}, d\mu)$.

Следует отметить, что функции M_p были введены в связи с исследованиями проблемы Бернштейна о весовой полиномиальной аппроксимации на вещественной оси [4] и названы мажорантами Холла – Мергеляна. Легко проверить, что

$$\frac{1}{\rho_p(\mu, z)} \le M_p(\mu, z) \le \frac{2}{\rho_p(\mu, z)} \tag{6}$$

и

$$\frac{1}{M_p(\mu, z)} = \inf\left\{ \|P\|_{L_p(\mu_p)} \,\Big|\, |P(z)| = 1,\ P \in \mathcal{P}[\mathbb{C}] \right\}. \tag{7}$$

Поэтому в терминах полиномиальной плотности теорему A можно переформулировать следующим образом.

Теорема A*. *Пусть $\mu \in \mathcal{M}^*(\mathbb{R})$ и $\operatorname{supp}\mu$ — ее носитель. Если $\mathcal{P}[\mathbb{R}]$ плотно в $L_2(\mathbb{R}, d\mu)$, то $\rho_2(\mu, z) = 0$ для любого $z \in \mathbb{C}\setminus\operatorname{supp}\mu$. Если существует такой $z \in \mathbb{C}\setminus\operatorname{supp}\mu$, что $\rho_2(\mu, z) = 0$, то $\mathcal{P}[\mathbb{R}]$ плотно в $L_2(\mathbb{R}, d\mu)$.*

В 1989 г. В. Я. Левин [5] (теорема 1.1) и в 1996 г. Кр. Берг [6, с. 22] распространили этот результат на все пространства $L_p(\mathbb{R}, d\mu)$ для мер μ, абсолютно непрерывных относительно меры Лебега на прямой, и для произвольных мер $\mu \in \mathcal{M}^*(\mathbb{R})$ соответственно. В теоремах этих авторов используются мажоранты Холла – Мергеляна M_p, но вследствие (6) окончательно теорему Кр. Берга можно сформулировать в следующей эквивалентной форме.

Теорема C. *Пусть $\mu \in \mathcal{M}^*(\mathbb{R})$ и $1 \le p < \infty$. Если $\mathcal{P}[\mathbb{R}]$ плотно в $L_p(\mathbb{R}, d\mu)$, то $\rho_p(\mu, z) = 0$ для любого $z \in \mathbb{C}\setminus\operatorname{supp}\mu$. Если существует такой $z \in \mathbb{C}\setminus\operatorname{supp}\mu$, что $\rho_p(\mu, z) = 0$, то $\mathcal{P}[\mathbb{R}]$ плотно в $L_p(\mathbb{R}, d\mu)$.*

В 1921 г. Г. Гамбургер [2] установил также другой критерий определенности меры, который ввиду теоремы B может быть сформулирован следующим образом. Обозначим через $\mathrm{Cl}_{L_p(\mu)} A$ замыкание $A \subseteq L_p(\mathbb{R}, d\mu)$ в пространстве $L_p(\mathbb{R}, d\mu)$.

Теорема D. *Пусть* $\mu \in \mathcal{M}^*(\mathbb{R})$. *Тогда*

$$\mathrm{Cl}_{L_2(\mu)} \mathcal{P}[\mathbb{R}] \neq L_2(\mathbb{R}, d\mu) \Leftrightarrow \rho_2(\mu, 0) > 0 \quad \text{и} \quad \rho_2(\mu^{(2)}, 0) > 0. \tag{8}$$

Более простое доказательство теоремы D было найдено в 1923 г. М. Риссом [7] (см. также [8, с. 69]).

Использовав доказательство теоремы C, данное Кр. Бергом в [6], распространим критерий (8) на все пространства $L_p(\mathbb{R}, d\mu)$, $1 \le p < \infty$, следующим образом.

Теорема 1. *Пусть* $\mu \in \mathcal{M}^*(\mathbb{R})$ *и* $1 \le p < \infty$. *Алгебраические полиномы не плотны в пространстве* $L_p(\mathbb{R}, d\mu)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\rho_p(\mu, 0) > 0 \quad \text{и} \quad \rho_p(\mu^{(p)}, 0) > 0. \tag{9}$$

2. Предварительные результаты. В следующем утверждении устанавливается простое, но существенное свойство мажорант Холла–Мергеляна.

Утверждение 1. *Для произвольных* $1 \le p < \infty$ *и* $a \in \mathbb{R}$ *функция* $M_p(\mu, a + iy)$ *переменной* $y \in \mathbb{R}$ *является четной на* $\mathbb{R}$ *и неубывающей на* $[0, +\infty)$. *В частности,*

$$\frac{1}{\rho_p(\mu, x)} \le M_p(\mu, x) \le M_p(\mu, x + iy) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad 1 \le p < \infty. \tag{10}$$

Здесь предполагается, что $1/0 := +\infty$ *и* $+\infty \le +\infty$.

Доказательство. Произвольно изменяя нули некоторого полинома $P \in \mathcal{P}[\mathbb{C}]$ на комплексно-сопряженные, получаем множество многочленов $\pi(P)$, содержащее только один полином $P^* \in \pi(P)$, все нули которого лежат в нижней полуплоскости.

Очевидно, что $|Q(x)| = |P(x)| \ \ \forall x \in \mathbb{R} \ \ \forall Q \in \pi(P)$, и поэтому для каждого $p \ge 1$ $\|Q\|_{L_p(\mu_p)} = \|P\|_{L_p(\mu_p)} \ \ \forall Q \in \pi(P)$. Кроме того, для любых $a \in \mathbb{R}$ и $y \ge 0$ $|P^*(a + iy)| \ge |Q(a + iy)| \ \ \forall Q \in \pi(P)$ и $|P^*(a + iy)|$ является неубывающей функцией переменной $y \ge 0$. Поэтому для каждых $p \ge 1$, $a \in \mathbb{R}$ и $y \ge 0$

$$M_p(\mu, a + iy) = \sup\left\{ |P^*(a + iy)| \,\middle|\, \|P\|_{L_p(\mu_p)} \le 1, \ P \in \mathcal{P}[\mathbb{C}] \right\}. \tag{11}$$

Это равенство доказывает, что $M_p(\mu, a + iy)$ является неубывающей функцией переменной $y \ge 0$. Наконец, очевидное соотношение $M_p(\mu, z) = M_p(\mu, \bar{z}) \ \ \forall z \in \mathbb{C}$ и неравенства (6) завершают доказательство утверждения 1.

В следующем ниже доказательстве теоремы 1 будут использованы утверждение 1 и неравенство

$$M_p(\mu, z) \ge |z| M_p(\mu^{(p)}, z) \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad p \ge 1, \tag{12}$$

которое легко вытекает из ограничения полиномиального множества в (5) до всех полиномов, равных нулю в нуле.

3. Доказательство теоремы 1. Для функции $F: \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ используем обозначение $S_F := \{x \in \mathbb{R} \mid F(x) > 0\}$.

Достаточность. Предположим, что (9) верно. Тогда $\mu^{(p)} \not\equiv 0$ и, следовательно, $\operatorname{supp} \mu \setminus \{0\} \neq \varnothing$. Ввиду (4)

$$|P(0)| \le \frac{\|P\|_{L_p(\mu_p)}}{\rho_p(\mu, 0)}, \quad |P(0)| \le \frac{\|P\|_{L_p(\mu_p^{(p)})}}{\rho_p(\mu^{(p)}, 0)} \quad \forall P \in \mathcal{P}[\mathbb{R}]. \tag{13}$$

Согласно теореме Хана–Банаха и в силу (13) существуют такие функции $f_q \in L_q(\mathbb{R}, d\mu_p) \setminus \{0\}$, $g_q \in L_q\left(\mathbb{R}, d\mu_p^{(p)}\right) \setminus \{0\}$, $1/p + 1/q = 1$ $(1 < q \le \infty)$, что

$$P(0) = \int_{\mathbb{R}} P(t) f_q(t) d\mu_p(t) = \int_{\mathbb{R}} P(t) g_q(t) d\mu_p^{(p)}(t) \quad \forall P \in \mathcal{P}[\mathbb{R}]. \tag{14}$$

Применяя первое равенство в (14) к полиномам, которые равны нулю в точке нуль, получаем

$$\int_{\mathbb{R}} P(t) \frac{t f_q(t)}{(1+|t|)^p} d\mu(t) = 0 \quad \forall P \in \mathcal{P}[\mathbb{R}]. \tag{15}$$

Если $\mu\left(S_{|f_q|} \setminus \{0\}\right) > 0$, то $t f_q(t)/(1+|t|)^p \in L_q(\mathbb{R}, d\mu) \setminus \{0\}$ и в силу (15) $\operatorname{Cl}_{L_p(\mu)} \mathcal{P}[\mathbb{R}] \neq L_p(\mathbb{R}, d\mu)$. А в случае, когда $\mu\left(S_{|f_q|} \setminus \{0\}\right) = 0$, будем иметь $\mu(\{0\}) > 0$, $0 \in S_{|f_q|}$ и согласно (14) $\mu(\{0\}) = 1/f_q(0)$. Тогда равенства (14) будут означать, что

$$0 = \int_{\mathbb{R}} P(t) \varphi_p(t) d\mu(t) \quad \forall P \in \mathcal{P}[\mathbb{R}], \quad \varphi_p(t) := \frac{f_q(t) - |t|^p g_q(t)}{(1+|t|)^p}.$$

Легко проверить, что $\varphi_p \in L_q(\mathbb{R}, d\mu)$ и если $d\mu_0(x) := d\mu(x) - \frac{1}{f_q(0)} \delta(x)$, где $\delta(x)$ — функция Дирака в точке нуль, то для произвольного $\varepsilon > 0$

$$\|\varphi_p\|_{L_q(\mu)}^q \ge \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} |\varphi_p(t)|^q d\mu_0(t) + \frac{1}{f_q(0)} |\varphi_p(0)|^q \ge f_q(0)^{q-1} > 0,$$

если $p > 1$, и $\|\varphi_1\|_{L_\infty(\mu)} \ge f_\infty(0) > 0$, если $p = 1$. Поэтому $\varphi_p \in L_q(\mathbb{R}, d\mu) \setminus \{0\}$ и, следовательно, $\operatorname{Cl}_{L_p(\mu)} \mathcal{P}[\mathbb{R}] \neq L_p(\mathbb{R}, d\mu)$.

Необходимость. Пусть $\operatorname{Cl}_{L_p(\mu)} \mathcal{P}[\mathbb{R}] \neq L_p(\mathbb{R}, d\mu)$. Тогда по теореме Хана–Банаха существует такая функция $g_q \in L_q(\mathbb{R}, d\mu) \setminus \{0\}$, $1/p + 1/q = 1$, $1 < q \le \infty$, что

$$\int_{\mathbb{R}} P(t) g_q(t) d\mu(t) = 0 \quad \forall P \in \mathcal{P}[\mathbb{C}]. \tag{16}$$

В этих условиях функция

$$\varphi_q(z) := \int_{\mathbb{R}} \frac{g_q(t)}{t - z} d\mu(t) \tag{17}$$

является аналитической на $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ и не равной тождественно нулю. Значит, существует $\lambda_q \in [1, 2]$ такое, что $\varphi_q(i\lambda_q) \neq 0$. Кроме того, из (16) легко получить, что для любых $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ и $P \in \mathcal{P}[\mathbb{C}]$

$$P(z)\varphi_q(z) := \int_{\mathbb{R}} \frac{P(t)g_q(t)}{t-z}\, d\mu(t). \tag{18}$$

Полагая в (18) $z = i\lambda_q$, получаем

$$|P(i\lambda_q)| \leq \frac{\|g_q\|_{L_q(\mu)}}{|\varphi_q(i\lambda_q)|}\left[\int_{\mathbb{R}} \frac{|P(t)|^p}{|t-i\lambda_q|^p}\, d\mu(t)\right]^{1/p} \leq \frac{\sqrt{2}\,\|g_q\|_{L_q(\mu)}}{|\varphi_q(i\lambda_q)|}\|P\|_{L_p(\mu_p)}. \tag{19}$$

Таким образом, $M_p(\mu, i\lambda_q) < \infty$ и ввиду (10) $1/\rho_p(\mu, 0) \leq M_p(\mu, i\lambda_q) < \infty$. Из этого соотношения с учетом вытекающих из (10) и (12) неравенств

$$\frac{1}{\rho_p(\mu^{(p)}, 0)} \leq M_p(\mu^{(p)}, i\lambda_q) \leq \frac{1}{|i\lambda_q|} M_p(\mu, i\lambda_q) < \infty,$$

следует справедливость (9). Теорема доказана.

1. *Ахиезер Н. И.* Классическая проблема моментов. – М.: Физматгиз, 1961. – 310 с.
2. *Hamburger H.* Über eine Erweiterung des Stieltjesschen Momentenproblems // Math. Ann. – 1920. – **81**. – S. 235–319; 1921. – **82**. – S. 120–164; 168–187.
3. *Riesz M.* Sur le probleme des moments et le theoreme de Parseval correspondant // Acta Litt. Acad. Sci. Szeged. – 1923. – **1**. – P. 209–225.
4. *Koosis P.* The logarithmic integral I. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1988.
5. *Левин Б. Я.* Полнота систем функций, квазианалитичность и субгармонические мажоранты // Зап. науч. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР. – 1989. – **170**. – С. 102–156.
6. *Berg Ch.* Moment problems and polynomial approximation // Ann. Fac. sci. Univ. Toulouse. Stieltjes spec. issue. – 1996. – P. 9–32.
7. *Riesz M.* Sur le probleme des moment. Troisieme note // Ark. mat. astronom. fys. – 1923. – **17**, № 16.
8. *Shohat J., Tamarkin J.* The problem of moments. – Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1950. – 144 p.

Получено 17.09.2002