УДК 517.948

Ю. О. Митропольський, В. Г. Коломієць (Ін-т математики НАН України, Київ),
О. В. Коломієць (Ін-т кібернетики НАН України, Київ)

ПРО ЗАСТОСУВАННЯ ПРИНЦИПУ УСЕРЕДНЕННЯ В СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯННЯХ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ

We prove the theorem on the application of the Bogolyubov – Mitropol'skii averaging principle to stochastic partial differential equations of hyperbolic type.

Доведено теорему про застосування принципу усереднення Боголюбова – Митропольського для стохастичних диференціальних рівнянь з частинними похідними гіперболічного типу.

М. М. Боголюбов [1] у 1945 р. запропонував і обґрунтував метод усереднення в загальному вигляді. Суть цього методу полягає в наступному.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x). \tag{1}$$

Нехай існує середнє від $X(t, x)$ за часом

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T X(t, x)\, dt = X_0(x). \tag{2}$$

Стверджується, що на великих інтервалах часу $O(1/\varepsilon)$, коли $X(t, x)$ є обмеженою і задовольняє умову Ліпшиця, розв'язок рівняння (1) як завгодно мало відрізняється від розв'язку рівняння

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon X_0(y) \tag{3}$$

для як завгодно малого ε.

Й. І. Гіхман [2] у 1952 р. довів, що принцип усереднення М. М. Боголюбова є частинним випадком спеціальної теореми про неперервну залежність розв'язків диференціальних рівнянь від параметра.

Розглядається система диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x, \lambda) \tag{4}$$

і система

$$\frac{dy}{dt} = X(t, y, \lambda_0). \tag{5}$$

Нехай виконується умова інтегральної неперервності

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} \int_t^{t+\tau} X(\theta, x, \lambda)\, d\theta = \int_t^{t+\tau} X(\theta, x, \lambda_0)\, d\theta, \quad 0 \le t \le t+\tau < T. \tag{6}$$

Тоді $|x(t) - y(t)| < \sigma$, де σ — як завгодно мале число.

Якщо в рівняння (1) ввести повільний час $\tau = \varepsilon t$, то воно набере вигляду

$$\frac{dx}{d\tau} = X\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, x\right) = Y(\tau, x, \varepsilon), \tag{7}$$

а рівняння (3) —

$$\frac{dy}{d\tau} = X_0(y). \tag{8}$$

Якщо тепер покласти

$$Y(\tau, x, 0) = X_0(x),$$

то функція $Y(\tau, x, \varepsilon)$ буде інтегрально неперервною за параметром ε при $\varepsilon = 0$.

Нагадаємо, що функція $Y(\tau, x, \lambda)$ є інтегрально неперервною в області

$$G = \{0 \le t \le T \times x \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \times \lambda \in \Lambda\}$$

за параметром λ в точці згущення $\lambda_0 \in \Lambda$, якщо для будь-яких $t \in [0, T]$ і $x \in \mathcal{D}$ виконується співвідношення (6).

Справді, покладаючи $\lambda = \varepsilon$ і $\lambda_0 = 0$, за умовою (6) для функції $Y(\tau, x, \varepsilon)$ маємо

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^t Y(\tau, x, \varepsilon)\, d\tau = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^t X\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, x\right) d\tau = t \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\varepsilon}{t} \int_0^{t/\varepsilon} X(\theta, x)\, d\theta =$$

$$= tX_0(x) = \int_0^t X_0(x)\, d\theta = \int_0^t Y(\tau, x, 0)\, d\tau.$$

У цій роботі ми застосовуємо метод усереднення до розв'язування мішаних крайових задач нелінійних стохастичних диференціальних рівнянь з частинними похідними гіперболічного типу. І хоча ці питання є новими, дослідженню стохастичних диференціальних рівнянь з частинними похідними присвячено чимало робіт (див., наприклад, роботи Й. І. Гіхмана, Г. Є. Пясецької [3], Т. Л. Царенко [4], Й. І. Гіхмана [5, 6], Іл. Й. Гіхмана [7], Б. В. Бондарєва [8, 9], А. Я. Дороговцева, С. Д. Івасишена, А. Г. Кукуша [10], С. Я. Махно [11], Б. Л. Розовського [12]).

Для стохастичних диференціальних рівнянь з частинними похідними гіперболічного типу ми наводимо теорему про неперервну залежність розв'язків від параметра. Ця теорема дозволяє одержати обґрунтування принципу усереднення Боголюбова – Митропольського [13] для стохастичних диференціальних рівнянь з частинними похідними гіперболічного типу.

Для детермінованих рівнянь такі теореми доведено в роботах С. Д. Ейдельмана [14], Р. З. Хасьмінського [15], Ю. О. Митропольського і Г. П. Хоми [16], М. Кисилевича [17] та ін.

Розглянемо стохастичне диференціальне рівняння гіперболічного типу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f\left(t, x, u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \lambda\right) + g\left(t, x, u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \lambda\right)\dot{w}(t), \tag{9}$$

де f і g — нелінійні функції, $\lambda \in \Lambda$, Λ — деяка множина значень параметра λ, для якого λ_0 — гранична точка, x — координата, $0 \le x \le l$, t — час, $0 \le t \le$ $\le L$, $\dot{w}(t)$ — білий шум, узагальнена похідна по t від вінерівського процесу $w(t)$.

Під розв'язком рівняння (9) розуміється випадковий процес, що задовольняє інтегральне стохастичне рівняння Іто [11, 12]. Потрібно знайти розв'язок цього рівняння, який задовольняє однорідні крайові

$$u(t, 0) = 0, \quad u(t, l) = 0 \tag{10}$$

і початкові

$$u(0, x) = F_1(x), \quad \frac{\partial u(0, x)}{\partial t} = F_2(x) \tag{11}$$

умови. Тут $F_1(x)$ і $F_2(x)$ — неперервні і обмежені функції для всіх $x \in [0, l]$.

Припускаємо, що $F_1(x)$ і $F_2(x)$ мають дві неперервні похідні. За цих умов їх можна зобразити рівномірно збіжними до них рядами Фур'є.

Й. І. Гіхман [6] за допомогою методу Бубнова – Гальоркіна довів теорему існування та єдиності розв'язку першої мішаної задачі для стохастичного лінійного гіперболічного рівняння другого порядку.

Іл. Й. Гіхман [7] методом Фур'є одержав розв'язок задачі Коші для деяких стохастичних рівнянь з частинними похідними другого порядку гіперболічного типу.

Нехай коефіцієнти рівняння (9) задовольняють умови:

1. Функції $f(t,x,u,p,q,\lambda)$ і $g(t,x,u,p,q,\lambda)$, $p=\dfrac{\partial u}{\partial t}$, $q=\dfrac{\partial u}{\partial x}$ є визначеними в області $I\times\mathbb{R}\times\mathcal{D}\times\Lambda=\{0\le t\le L,\ 0\le x\le l,\ (u,p,q)\in\mathcal{D},\ \lambda\in\Lambda,\ \mathcal{D}$ — обмежена область тривимірного простору$\}$, неперервними або вимірними за сукупністю своїх змінних.

2. Існує така постійна K, що виконуються нерівності

$$|f(t,x,u_1,p_1,q_1,\lambda)-f(t,x,u_2,p_2,q_2,\lambda)|+|g(t,x,u_1,p_1,q_1,\lambda)-$$
$$-g(t,x,u_2,p_2,q_2,\lambda)|\le K(|u_1-u_2|+|p_1-p_2|+|q_1-q_2|), \tag{12}$$

$$|f(t,x,u,p,q,\lambda)|^2+|q(t,x,u,p,q,\lambda)|^2\le K\left(1+u^2+p^2+q^2\right), \tag{13}$$

$$\int_t^{t+\Delta}|f(\tau,x,u,p,q,\lambda)-f(t,x,u,p,q,\lambda_0)|\,d\tau\le$$
$$\le h(\lambda)(1+|u|+|p|+|q|),\quad t+\Delta<L, \tag{14}$$

$$\int_0^{\alpha}|g(\tau,x,u,p,q,\lambda)-g(t,x,u,p,q,\lambda_0)|^2\,d\tau\le h(\lambda)\left(1+u^2+p^2+q^2\right), \tag{15}$$

де $h(\lambda)\to 0$ при $\lambda\to\lambda_0$.

3. Розв'язок рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f\left(t,x,u,\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial u}{\partial x},\lambda_0\right)+g\left(t,x,u,\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial u}{\partial x},\lambda_0\right)\dot{w}(t) \tag{16}$$

при крайових і початкових умовах (2), (3) належить разом з деяким ρ-околом області $\mathcal{D}$.

Умови (14), (15) означають, що

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\int_t^{t+\Delta}f(\tau,x,u,p,q,\lambda)\,d\tau=\int_t^{t+\Delta}f(\tau,x,u,p,q,\lambda_0)\,d\tau,$$

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\int_0^{L}|g(\tau,x,u,p,q,\lambda)-g(t,x,u,p,q,\lambda_0)|^2\,d\tau=0.$$

Перша з цих умов означає, що функція f інтегрально неперервна по λ в точці $\lambda=\lambda_0$, друга — те ж саме в більш сильному сенсі. Справедлива така теорема.

Теорема 1. *Якщо для коефіцієнтів рівняння* (9) *виконано умови* $1-3$, *то його розв'язок неперервний в середньоквадратичному при* $\lambda\to\lambda_0$

$$\mathrm{M}|u(t,x,\lambda)-u(t,x,\lambda_0)|^2\to 0,$$

де $u(t,x,\lambda_0)$ — *розв'язок рівняння* (16), M — *математичне сподівання.*

Доведення теореми 1 можна одержати із теореми про неперервну залежність розв'язків від параметра стохастичних звичайних диференціальних рівнянь [18]. Зазначимо при цьому, що при виконанні умов 1, (12), (13) існує неперервний обмежений розв'язок задачі (9) – (11), єдиний з точністю до стохастичної еквівалентності.

Мішану задачу (9) – (11) можна звести до задачі Коші за допомогою методу Бубнова – Гальоркіна

$$u_n(t,x,\lambda)=\sum_{k=1}^{n}z_k(t,\lambda)X_k(x), \tag{17}$$

де $X_k(x)$, $k=1,2,\ldots$, в загальному випадку є системою лінійно незалежних координатних функцій, двічі неперервно диференційовних, які задовольняють крайові умови. У випадку крайових умов (10) в якості $X_k(x)$ використовують функції $\sin(k\pi x/l)$.

Тоді згідно з методом Бубнова – Гальоркіна, підставляючи (17) у початкове рівняння (9), домножаючи обидві частини рівності на $\sin(k\pi x/l)$ і виконуючи інтегрування по x у межах від 0 до l, одержуємо систему звичайних стохастичних диференціальних рівнянь для знаходження невідомих функцій $z_k(t, \lambda)$, $k = 1, 2, \dots, n$, для якої доведено теорему Й. І. Гіхмана про неперервну залежність її розв'язків від параметра [18].

Розглянемо тепер безпосереднє застосування принципу усереднення [1] в стохастичних диференціальних рівняннях з частинними похідними гіперболічного типу. Теорему про усереднення таких рівнянь можна одержати як наслідок спеціальної теореми про неперервну залежність їх розв'язків від параметра [2].

Розглянемо стохастичне диференціальне рівняння другого порядку гіперболічного типу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \varepsilon f\left(t, x, u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \sqrt{\varepsilon} g\left(t, x, u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}\right)\dot{w}\left(\sqrt{\varepsilon} t\right) \tag{18}$$

при крайових і початкових умовах (10), (11), де ε — малий додатний параметр, f і g — нелінійні функції, $\dot{w}(t)$ — білий шум.

Нехай виконано умови:

1°. Функції f і g є визначеними в області

$$I\times\mathbb{R}\times\mathcal{D} = \{0 \le t \le L,\ 0 \le x \le l,\ (u, p, q)\in\mathcal{D}\},$$

обмеженими, неперервними або вимірними за сукупністю змінних і задовольняють в обмеженій області тривимірного простору $\mathcal{D}$ умову Ліпшиця.

2°. Рівномірно відносно x, u, p, q існує границя

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(t, x, u, p, q)\,dt = f_0(x, u, p, q).$$

3°. Існує така функція g_0, що

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T |g(t, x, u, p, q) - g_0(x, u, p, q)|^2\,dt = 0.$$

4°. Розв'язок усередненого рівняння

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \varepsilon\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \varepsilon f_0\left(x, u, \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \sqrt{\varepsilon} g_0\left(x, v, \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial x}\right)\dot{w}\left(\sqrt{\varepsilon} t\right) \tag{19}$$

належить разом зі своїм ρ-околом області $\mathcal{D}$.

Справедлива така теорема.

Теорема 2. *Нехай для рівняння* (18) *виконано умови* 1° *і*

$$\frac{1}{T}\int_0^T |f(t, x, u, p, q) - f_0(x, u, p, q)|\,dt \le h_1(T)(1+|u|+|p|+|q|),$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T |g(t, x, u, p, q) - g_0(x, u, p, q)|^2\,dt \le h_2(T)\left(1 + u^2 + p^2 + q^2\right),$$

де $h_1(T)\to 0$ *і* $h_2(T)\to 0$ *при* $T\to\infty$. *Тоді для кожного як завгодно малого* η *і як завгодно великого* L *знайдеться таке* ε_0, *що*

$$M|u(t, x, \varepsilon) - v(t, x, \varepsilon)|^2 < \eta$$

для всіх ε, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, $t\in\left[0, L/\sqrt{\varepsilon}\right]$ *і* $0 \le x \le l$, *де* $u(t, x, \varepsilon)$ — *розв'язок рівняння* (18), *а* $v(t, x, \varepsilon)$ — *розв'язок усередненого рівняння* (19) *з крайовими і початковими умовами* (10), (11).

Всі інші способи поведінки розв'язків, наприклад такі, при яких вони виходять на заданому проміжку часу за межі області, будуть мати при малих ε малі ймовірності [19].

Доведення теореми 2 випливає із теореми 1. Справді, покладаючи $\tau = \sqrt{\varepsilon}t$ і $\lambda = \sqrt{\varepsilon}$, $\lambda_0 = 0$, переконуємося, що всі умови теореми 1 виконано.

На підставі теореми 2 в рівнянні (18) можна проводити усереднення всіх членів. Проте слід зауважити, що g_0 в рівнянні (19) не можна одержати звичайним усередненням за часом t. Звичайне усереднення може призвести до неправильних результатів.

Зауважимо, що малі випадкові збурення в (18) можуть набувати великих значень, проте ймовірність цих великих значень є малою [19].

Аналогічні результати справедливі для більш загальних нелінійних мішаних крайових задач, а також для систем стохастичних диференціальних рівнянь з частинними похідними. Проте визначення g_0 на основі умови 3° у випадку систем рівнянь пов'язане з великими труднощами.

1. *Боголюбов Н. Н.* О некоторых статистических методах в математической физике. – Киев: Изд-во АН УССР, 1945. – 137 с.
2. *Гихман И. И.* По поводу одной теоремы Н. Н. Боголюбова // Укр. мат. журн. – 1952. – **4**, № 2. – С. 215 – 219.
3. *Гихман И. И., Пясецкая Т. Е.* Об одном классе стохастических дифференциальных уравнений с частными производными, содержащих двупараметрический белый шум // Предельные теоремы для случайных процессов. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1977. – С. 71 – 92.
4. *Царенко Т. Л.* О существовании и единственности решений стохастических уравнений Дарбу // Кибернетика. – 1972. – № 4. – С. 115 – 117.
5. *Гихман И. И.* О существовании слабых решений одного класса гиперболических систем, содержащих двупараметрический „белый шум" // Теория случайных процессов. – 1978. – Вып. 6. – С. 39 – 48.
6. *Гихман И. И.* О первой начально-краевой задаче для стохастического гиперболического уравнения // Там же. – 1980. – Вып. 8. – С. 20 – 31.
7. *Гихман Ил. И.* Решение начально-краевой задачи для стохастического уравнения гиперболического типа методом Фурье // Там же. – С. 31 – 35.
8. *Бондарев Б. В.* Усреднение в параболических системах, подверженных слабозависимым случайным воздействиям. L_1-подход // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 2. – С. 167 – 172.
9. *Бондарев Б. В.* Усреднение в параболических системах, подверженных слабозависимым случайным воздействиям. L_2-подход // Там же. – № 3. – С. 315 – 322.
10. *Дороговцев А. Я., Ивасишен С. Д., Кукуш А. Г.* Асимптотическое поведение решений уравнения теплопроводности с „белым шумом" в правой части // Там же. – 1985. – **37**, № 1. – С. 13 – 20.
11. *Махно С. Я.* Принцип усреднения для стохастических уравнений в частных производных // Теория случайных процессов. – 1980. – Вып. 8. – С. 113 – 117.
12. *Розовский Б. Л.* О стохастических дифференциальных уравнениях в частных производных // Мат. сб. – 1975. – **96**, № 2. – С. 314 – 341.
13. *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике. – Киев: Наук. думка, 1971. – 440 с.
14. *Эйдельман С. Д.* О применении принципа усреднения к квазилинейным параболическим системам второго порядка // Сиб. мат. журн. – 1962. – № 2. – С. 302 – 307.
15. *Хасьминский Р. З.* О принципе усреднения для параболических и эллиптических дифференциальных уравнений и марковских процессов с малой диффузией // Теория вероятностей и ее применения. – 1963. – **3**, № 1. – С. 3 – 25.
16. *Митропольский Ю. А., Хома Г. П.* Математическое обоснование асимптотических методов нелинейной механики. – Киев: Наук. думка, 1983. – 216 с.
17. *Кисилевич М.* Теорема типа Н. Н. Боголюбова для гиперболического уравнения // Укр. мат. журн. – 1970. – **22**, № 3. – С. 365 – 370.
18. *Гихман И. И.* Дифференциальные уравнения со случайными функциями // Зим. шк. по теории вероятностей и мат. статистике (Ужгород, февр. – март 1964г.) – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1964. – С. 41 – 86.
19. *Вентцель А. Д., Фрейдлин М. И.* Флуктуация в динамических системах под действием малых случайных возмущений. – М.: Наука, 1979. – 429 с.

Одержано 03.02.2003