УДК 517.5

С. Б. Гембарская (Волын. ун-т)

ОЦЕНКИ ВАРИАЦИИ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ ДВОЙНЫМИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ РЯДАМИ ПО КОСИНУСАМ

For functions of two variables determined by trigonometric series in terms of cosines with quasiconvex coefficients, we obtain estimates of variations of these functions in the sense of Hardy – Vitali.

Для функцій двох змінних, заданих тригонометричними рядами по косинусах із квазіопуклими коефіцієнтами, одержано оцінки їх варіацій у розумінні Харді – Віталі.

1. Пусть задан ряд

$$\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty} 2^{-\gamma_{k_1,k_2}} a_{k_1,k_2} \cos k_1x_1 \cos k_2x_2, \tag{1}$$

где γ_{k_1,k_2} — число нулей вектора $k = (k_1, k_2)$, коэффициенты которого удовлетворяют условию

$$a_k = a_{k_1,k_2} \to 0, \quad k_1 + k_2 \to \infty, \tag{2}$$

и квазивыпуклы, т. е.

$$\sum_{k_1=1}^{\infty} k_1 \sum_{k_2=1}^{\infty} k_2 \left|\Delta^{2,2} a_{k_1,k_2}\right| < \infty. \tag{3}$$

Здесь и в дальнейшем $\Delta^{1,0} a_{k_1,k_2} = a_{k_1,k_2} - a_{k_1+1,k_2}$, $\Delta^{0,1} a_{k_1,k_2} = a_{k_1,k_2} - a_{k_1,k_2+1}$, $\Delta^{i+1,j} a_{k_1,k_2} = \Delta^{1,0}(\Delta^{i,j} a_{k_1,k_2})$, $\Delta^{i,j+1} a_{k_1,k_2} = \Delta^{0,1}(\Delta^{i,j} a_{k_1,k_2})$, $\Delta^{0,0} a_{k_1,k_2} = a_{k_1,k_2}$.

С. А. Теляковский [1] доказал, что сумма ряда (1) является непрерывной на $T_0^2 := (0, \pi] \times (0, \pi]$ и интегрируемой функцией, которую будем обозначать через $f_c(x) := f(x_1, x_2)$.

Сходимость ряда (1) будем понимать по Принсхейму, т. е. как предел прямоугольных частных сумм [2]

$$\lim_{\min(n_1,n_2)\to\infty} \sum_{k_1=0}^{n_1}\sum_{k_2=0}^{n_2} 2^{-\gamma_{k_1,k_2}} a_{k_1,k_2} \sin k_1x_1 \sin k_2x_2.$$

Данная работа посвящена распространению на двумерный случай результатов С. А. Теляковского [3], при этом сходимость двойных рядов понимается по Принсхейму, а вариация функций двух переменных — по Харди – Витали [4].

Здесь будут получены оценки двойных интегралов от $\left|\dfrac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2}\right|$ по множествам $P_{l,m} = \left[\dfrac{\pi}{(m_1+1)}; \dfrac{\pi}{l_1}\right] \times \left[\dfrac{\pi}{(m_2+1)}; \dfrac{\pi}{l_2}\right]$. Эти оценки будут записаны с помощью разностей коэффициентов формально найденной смешанной производной от тригонометрического ряда (1).

В дальнейшем через C будем обозначать абсолютные положительные постоянные, которые в разных формулах могут быть различными.

В оценках с O-символами числовые множители зависят только от размерности пространства, т. е. фактически являются абсолютными постоянными.

2. Пусть

$$\alpha_{k_1,k_2} := k_1k_2a_{k_1,k_2}, \quad k_i = 1, 2, \ldots, \quad i = 1, 2,$$

© С. Б. ГЕМБАРСКАЯ, 2003

$$u_{k_i} := \frac{1}{2}\int\limits_{\pi/(k_i+1)}^{\pi/k_i} \operatorname{ctg}\frac{x_i}{2}\,dx_i = \ln\frac{\sin\dfrac{\pi}{2k_i}}{\sin\dfrac{\pi}{2(k_i+1)}},$$

$$\omega_{l,m} := \frac{m_2+1-l_2}{m_2}\sum_{k_1=l_1}^{m_1} u_{k_1}\sum_{k_2=0}^{l_2-1}\frac{k_2^2}{l_2^2}\left|\Delta^{0,1}\alpha_{k_1,k_2}\right| +$$

$$+\sum_{k_1=l_1}^{m_1} u_{k_1}\sum_{k_2=l_2}^{\infty}\min(k_2+1-l_2,\, m_2+1-l_2)\left|\Delta^{0,2}\alpha_{k_1,k_2}\right| +$$

$$+\frac{m_1+1-l_1}{m_1}\sum_{k_1=0}^{l_1-1}\frac{k_1^2}{l_1^2}\sum_{k_2=l_2}^{m_2} u_{k_2}\left|\Delta^{1,0}\alpha_{k_1,k_2}\right| +$$

$$+\sum_{k_1=l_1}^{\infty}\min(k_1+1-l_1,\, m_1+1-l_1)\sum_{k_2=l_2}^{m_2} u_{k_2}\left|\Delta^{2,0}\alpha_{k_1,k_2}\right| +$$

$$+\frac{m_1+1-l_1}{m_1}\,\frac{m_2+1-l_2}{m_2}\sum_{k_1=0}^{l_1-1}\sum_{k_2=0}^{l_2-1}\frac{k_1^2}{l_1^2}\,\frac{k_2^2}{l_2^2}\left|\Delta^{1,1}\alpha_{k_1,k_2}\right| +$$

$$+\frac{m_1+1-l_1}{m_1}\sum_{k_1=0}^{l_1-1}\frac{k_1^2}{l_1^2}\sum_{k_2=l_2}^{\infty}\min(k_2+1-l_2,\, m_2+1-l_2)\left|\Delta^{1,2}\alpha_{k_1,k_2}\right| +$$

$$+\frac{m_2+1-l_2}{m_2}\sum_{k_1=l_1}^{\infty}\min(k_1+1-l_1,\, m_1+1-l_1)\sum_{k_2=0}^{l_2-1}\frac{k_2^2}{l_2^2}\left|\Delta^{2,1}\alpha_{k_1,k_2}\right| +$$

$$+\sum_{k_1=l_1}^{\infty}\min(k_1+1-l_1,\, m_1+1-l_1)\sum_{k_2=l_2}^{\infty}\min(k_2+1-l_2,\, m_2+1-l_2)\left|\Delta^{2,2}\alpha_{k_1,k_2}\right|,$$

$1 \le l_i \le m_i$, $i = 1, 2$, l_i, m_i — натуральные числа.

Теорема 1. *Если коэффициенты ряда* (1) *удовлетворяют условиям* (2) *и* (3), *то имеет место оценка*

$$\iint\limits_{P_{l,m}}\left|\frac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_1\,\partial x_2}\right| dx_1\,dx_2 = \sum_{k_1=l_1}^{m_1}\sum_{k_2=l_2}^{m_2}\left|\alpha_{k_1,k_2}\right| u_{k_1}u_{k_2} + O(\omega_{l,m}), \tag{4}$$

где $1 \le l_i \le m_i$, *а числовой множитель в* O*-выражении является абсолютным положительным постоянным.*

При доказательстве теоремы будем следовать схеме С. А. Теляковского [3]. Поэтому нам потребуются следующие вспомогательные утверждения.

Теорема 2. *Если числа* a_{k_1,k_2} *удовлетворяют условию*

$$\Delta^{1,1}a_{k_1,k_2} \to 0, \quad k_1+k_2 \to \infty, \tag{5}$$

то эквивалентны следующие соотношения:

$$\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty} k_1k_2\left|\Delta^{2,2}a_{k_1,k_2}\right| < \infty, \tag{6}$$

$$\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}\left|\Delta^{2,2}\alpha_{k_1,k_2}\right| < \infty. \tag{7}$$

Доказательство. Легко показать, что

$$\Delta^{2,2}\alpha_{k_1,k_2} = k_1k_2\Delta^{2,2}a_{k_1,k_2} - 2k_1\Delta^{2,1}a_{k_1,k_2+1} - 2k_2\Delta^{1,2}a_{k_1+1,k_2} + 4\Delta^{1,1}a_{k_1+1,k_2+1}.$$

Тогда

$$\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}\left|\Delta^{2,2}\alpha_{k_1,k_2}\right| \le \sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}k_1k_2\left|\Delta^{2,2}a_{k_1,k_2}\right| + 2\sum_{k_1=1}^{\infty}k_1\sum_{k_2=1}^{\infty}\left|\Delta^{2,1}a_{k_1,k_2+1}\right| +$$

$$+ 2\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}k_2\left|\Delta^{1,2}a_{k_1+1,k_2}\right| + 4\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}\left|\Delta^{1,1}a_{k_1+1,k_2+1}\right|.$$

В силу (5)

$$\Delta^{1,1}a_{k_1,k_2} = \sum_{m_1=k_1}^{\infty}\sum_{m_2=k_2}^{\infty}\Delta^{2,2}a_{m_1,m_2}, \qquad \Delta^{2,1}a_{k_1,k_2} = \sum_{m_2=k_2}^{\infty}\Delta^{2,2}a_{k_1,m_2},$$

$$\Delta^{1,2}a_{k_1,k_2} = \sum_{m_1=k_1}^{\infty}\Delta^{2,2}a_{m_1,k_2}.$$

Поэтому

$$\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}\left|\Delta^{2,2}\alpha_{k_1,k_2}\right| \le \sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}k_1k_2\left|\Delta^{2,2}a_{k_1,k_2}\right| + 2\sum_{k_1=1}^{\infty}k_1\sum_{k_2=1}^{\infty}\sum_{m_2=k_2+1}^{\infty}\left|\Delta^{2,2}a_{k_1,m_2}\right| +$$

$$+ 2\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}\sum_{m_1=k_1+1}^{\infty}k_2\left|\Delta^{2,2}a_{m_1,k_2}\right| + 4\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}\sum_{m_1=k_1+1}^{\infty}\sum_{m_2=k_2+1}^{\infty}\left|\Delta^{2,2}a_{m_1,m_2}\right| \le$$

$$\le 9\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}k_1k_2\left|\Delta^{2,2}a_{k_1,k_2}\right| < \infty.$$

Таким образом, из (7) следует (6).

Легко видеть, что

$$k_1k_2\Delta^{2,2}a_{k_1,k_2} = \Delta^{2,2}\alpha_{k_1,k_2} + 2k_1\Delta^{2,1}a_{k_1,k_2+1} + 2k_2\Delta^{1,2}a_{k_1+1,k_2} - 4\Delta^{1,1}a_{k_1+1,k_2+1} =$$

$$= \Delta^{2,2}\alpha_{k_1,k_2} + 2\Delta^{2,1}(k_1a_{k_1,k_2+1}) + 2\Delta^{1,2}(k_2a_{k_1+1,k_2}) + 4\Delta^{1,1}a_{k_1+1,k_2+1}.$$

При выводе условия (7) из (6) будем использовать тождество

$$(k+1)(k+2)\Delta a_{k+1} = 2\Delta a_1 - \sum_{\nu=1}^{k}(\nu+1)\Delta^2\alpha_\nu, \qquad \alpha_\nu = \nu a_\nu.$$

Тогда

$$(k_2+1)(k_2+2)\Delta^{0,1}(\Delta^{2,0}(k_1a_{k_1,k_2+1})) =$$

$$= 2\Delta^{0,1}(\Delta^{2,0}(k_1a_{k_1,1})) - \sum_{\nu_2=1}^{k_2}(\nu_2+1)\Delta^{0,2}(\nu_2\Delta^{2,0}(k_1a_{k_1,\nu_2})) =$$

$$= 2\Delta^{2,1}\alpha_{k_1,1} - \sum_{\nu_2=1}^{k_2}(\nu_2+1)\Delta^{2,2}\alpha_{k_1,\nu_2},$$

$$\Delta^{2,1}(k_1 a_{k_1,k_2+1}) = \frac{2}{(k_2+1)(k_2+2)}\Delta^{2,1}\alpha_{k_1,1} - \frac{1}{(k_2+1)(k_2+2)}\sum_{\nu_2=1}^{k_2}(\nu_2+1)\Delta^{2,2}\alpha_{k_1,\nu_2}.$$

Аналогично

$$(k_1+1)(k_1+2)\Delta^{1,0}(\Delta^{0,2}(k_2 a_{k_1+1,k_2})) =$$

$$= 2\Delta^{1,0}(\Delta^{0,2}(k_2 a_{1,k_2})) - \sum_{\nu_1=1}^{k_1}(\nu_1+1)\Delta^{2,0}(\nu_1\Delta^{0,2}(k_2 a_{\nu_1,k_2})) =$$

$$= 2\Delta^{1,2}\alpha_{1,k_2} - \sum_{\nu_1=1}^{k_1}(\nu_1+1)\Delta^{2,2}\alpha_{\nu_1,k_2},$$

$$\Delta^{1,2}(k_2 a_{k_1+1,k_2}) = \frac{2}{(k_1+1)(k_1+2)}\Delta^{1,2}\alpha_{1,k_2} - \frac{1}{(k_1+1)(k_1+2)}\sum_{\nu_1=1}^{k_1}(\nu_1+1)\Delta^{2,2}\alpha_{\nu_1,k_2},$$

$$(k_1+1)(k_1+2)\Delta^{1,0}(\Delta^{0,1}a_{k_1+1,k_2+1}) =$$

$$= 2\Delta^{1,0}\Delta^{0,1}a_{1,k_2+1} - \sum_{\nu_1=1}^{k_1}(\nu_1+1)\Delta^{2,0}(\nu_1\Delta^{0,1}a_{\nu_1,k_2+1}) =$$

$$= 2\Delta^{1,1}a_{1,k_2+1} - \sum_{\nu_1=1}^{k_1}(\nu_1+1)\Delta^{2,1}(\nu_1 a_{\nu_1,k_2+1}).$$

Отсюда имеем

$$\Delta^{1,1}a_{k_1+1,k_2+1} = \frac{2}{(k_1+1)(k_1+2)}\Delta^{1,1}a_{1,k_2+1} -$$

$$- \frac{1}{(k_1+1)(k_1+2)}\sum_{\nu_1=1}^{k_1}(\nu_1+1)\Delta^{2,1}(\nu_1 a_{\nu_1,k_2+1}) =$$

$$= \Delta^{0,1}\left(\frac{2}{(k_1+1)(k_1+2)}\Delta^{1,0}a_{1,k_2+1} - \frac{1}{(k_1+1)(k_1+2)}\sum_{\nu_1=1}^{k_1}(\nu_1+1)\Delta^{2,0}(\nu_1 a_{\nu_1,k_2+1})\right),$$

$$(k_2+1)(k_2+2)\Delta^{0,1}\left(\frac{2}{(k_1+1)(k_1+2)}\Delta^{1,0}a_{1,k_2+1} -\right.$$

$$\left.- \frac{1}{(k_1+1)(k_1+2)}\sum_{\nu_1=1}^{k_1}(\nu_1+1)\Delta^{2,0}(\nu_1 a_{\nu_1,k_2+1})\right) =$$

$$= \frac{4}{(k_1+1)(k_1+2)}\Delta^{1,1}a_{1,1} - \frac{2}{(k_1+1)(k_1+2)}\sum_{\nu_1=1}^{k_1}(\nu_1+1)\Delta^{2,1}(\alpha_{\nu_1,1}) -$$

$$- \frac{2}{(k_1+1)(k_1+2)}\sum_{\nu_2=1}^{k_2}(\nu_2+1)\Delta^{1,2}(\alpha_{1,\nu_2}) +$$

$$+ \frac{1}{(k_1+1)(k_1+2)}\sum_{\nu_1=1}^{k_1}(\nu_1+1)\sum_{\nu_2=1}^{k_2}(\nu_2+1)\Delta^{2,2}(\alpha_{\nu_1,\nu_2}).$$

Тогда

$$\Delta^{1,1} a_{k_1+1,k_2+1} = \frac{4}{(k_1+1)(k_1+2)(k_2+1)(k_2+2)} \Delta^{1,1} a_{1,1} -$$

$$- \frac{2}{(k_1+1)(k_1+2)(k_2+1)(k_2+2)} \sum_{\nu_1=1}^{k_1} (\nu_1+1) \Delta^{2,1}(\alpha_{\nu_1,1}) -$$

$$- \frac{2}{(k_1+1)(k_1+2)(k_2+1)(k_2+2)} \sum_{\nu_2=1}^{k_2} (\nu_2+1) \Delta^{1,2}(\alpha_{1,\nu_2}) +$$

$$+ \frac{1}{(k_1+1)(k_1+2)(k_2+1)(k_2+2)} \sum_{\nu_1=1}^{k_1} (\nu_1+1) \sum_{\nu_2=1}^{k_2} (\nu_2+1) \Delta^{2,2}(\alpha_{\nu_1,\nu_2}).$$

Используя найденные равенства, получаем

$$k_1 k_2 \Delta^{2,2} a_{k_1,k_2} = \Delta^{2,2} \alpha_{k_1,k_2} + \frac{4}{(k_2+1)(k_2+2)} \Delta^{2,1} \alpha_{k_1,1} -$$

$$- \frac{2}{(k_2+1)(k_2+2)} \sum_{\nu_2=1}^{k_2} (\nu_2+1) \Delta^{2,2}(\alpha_{k_1,\nu_2}) +$$

$$+ \frac{4}{(k_1+1)(k_1+2)} \Delta^{1,2} \alpha_{1,k_2} - \frac{2}{(k_1+1)(k_1+2)} \sum_{\nu_1=1}^{k_1} (\nu_1+1) \Delta^{2,2}(\alpha_{\nu_1,k_2}) +$$

$$+ \frac{16}{(k_1+1)(k_1+2)(k_2+1)(k_2+2)} \Delta^{1,1} a_{1,1} -$$

$$- \frac{8}{(k_1+1)(k_1+2)(k_2+1)(k_2+2)} \sum_{\nu_1=1}^{k_1} (\nu_1+1) \Delta^{2,1}(\alpha_{\nu_1,1}) -$$

$$- \frac{8}{(k_1+1)(k_1+2)(k_2+1)(k_2+2)} \sum_{\nu_2=1}^{k_2} (\nu_2+1) \Delta^{1,2}(\alpha_{1,\nu_2}) +$$

$$+ \frac{4}{(k_1+1)(k_1+2)(k_2+1)(k_2+2)} \sum_{\nu_1=1}^{k_1} (\nu_1+1) \sum_{\nu_2=1}^{k_2} (\nu_2+1) \Delta^{2,2}(\alpha_{\nu_1,\nu_2}).$$

Тогда

$$\sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} k_1 k_2 \left| \Delta^{2,2} a_{k_1,k_2} \right| \le \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} \left| \Delta^{2,2} \alpha_{k_1,k_2} \right| +$$

$$+ 2 \sum_{k_1=1}^{\infty} \left| \Delta^{2,1} \alpha_{k_1,1} \right| + \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{\nu_2=1}^{\infty} \sum_{k_2=\nu_2}^{\infty} \frac{2}{(k_2+1)(k_2+2)} (\nu_2+1) \left| \Delta^{2,2}(\alpha_{k_1,\nu_2}) \right| +$$

$$+ 2 \sum_{k_2=1}^{\infty} \left| \Delta^{1,2} \alpha_{1,k_2} \right| + \sum_{k_1=\nu_1}^{\infty} \sum_{\nu_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} \frac{2}{(k_1+1)(k_1+2)} (\nu_1+1) \left| \Delta^{2,2}(\alpha_{\nu_1,k_2}) \right| +$$

$$+ 4 \left| \Delta^{1,1} a_{1,1} \right| + 8 \sum_{k_1=\nu_1}^{\infty} \sum_{\nu_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} \frac{\nu_1+1}{(k_1+1)(k_1+2)(k_2+1)(k_2+2)} \left| \Delta^{2,1}(\alpha_{\nu_1,1}) \right| +$$

$$+ 8 \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{\nu_2=1}^{\infty} \sum_{k_2=\nu_2}^{\infty} \frac{\nu_2+1}{(k_1+1)(k_1+2)(k_2+1)(k_2+2)} \left| \Delta^{1,2}(\alpha_{1,\nu_2}) \right| +$$

$$+\sum_{\nu_1=1}^{\infty}\sum_{\nu_2=1}^{\infty}\sum_{k_1=\nu_1}^{\infty}\sum_{k_2=\nu_2}^{\infty}(\nu_1+1)(\nu_2+1)\left|\Delta^{2,2}(\alpha_{\nu_1,\nu_2})\right| \le$$

$$\le 18\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}\left|\Delta^{2,2}(\alpha_{k_1,k_2})\right| + 4\left|\Delta^{1,1}a_{1,1}\right|.$$

Значит, (7) следует из (6). Теорема 2 доказана.

В дальнейшем потребуются два простых утверждения.

Лемма 1. *Если последовательность* $\{a_{k_1,k_2}\}$ *удовлетворяет условиям* $a_{k_1,k_2}\to 0$ *при* $k_1+k_2\to\infty$ *и* $\sum_{k_1=1}^{\infty}k_1\sum_{k_2=1}^{\infty}k_2\left|\Delta^{2,2}a_{k_1,k_2}\right|<\infty$, *то*

$$\lim_{n_1+n_2\to\infty}\Delta^{1,1}\alpha_{n_1,n_2} = 0,$$

$$\lim_{n_1+n_2\to\infty}\sum_{k_2=0}^{n_2-1}\left|\Delta^{1,2}\alpha_{n_1,k_2}\right| = 0,$$

$$\lim_{n_1+n_2\to\infty}\sum_{k_1=0}^{n_1-1}\left|\Delta^{2,1}\alpha_{k_1,n_2}\right| = 0.$$

Доказательство. Для $\Delta^{1,1}\alpha_{k_1,k_2}$ при $k_1+k_2\to\infty$ имеем

$$\Delta^{1,1}\alpha_{k_1,k_2} = k_1k_2\Delta^{1,1}a_{k_1,k_2} - k_1\Delta^{1,0}a_{k_1,k_2+1} - k_2\Delta^{0,1}a_{k_1+1,k_2} + a_{k_1+1,k_2+1}\to 0,$$

$$k_1k_2\left|\Delta^{1,1}a_{k_1,k_2}\right| = k_1k_2\left|\sum_{\nu_1=k_1}^{\infty}\sum_{\nu_2=k_2}^{\infty}\Delta^{2,2}a_{\nu_1,\nu_2}\right| \le \sum_{\nu_1=k_1}^{\infty}\sum_{\nu_2=k_2}^{\infty}\nu_1\nu_2\left|\Delta^{2,2}a_{\nu_1,\nu_2}\right|\to 0$$

и

$$k_1\left|\Delta^{1,0}a_{k_1,k_2+1}\right| = k_1\left|\sum_{\nu_1=k_1}^{\infty}\sum_{\nu_2=k_2+1}^{\infty}\Delta^{2,1}a_{\nu_1,\nu_2}\right| = k_1\left|\sum_{\nu_1=k_1}^{\infty}\sum_{\nu_2=k_2+1}^{\infty}\sum_{i_2=\nu_2}^{\infty}\Delta^{2,2}a_{\nu_1,i_2}\right| \le$$

$$\le\sum_{\nu_1=k_1}^{\infty}\sum_{\nu_2=k_2}^{\infty}\nu_1\nu_2\left|\Delta^{2,2}a_{\nu_1,\nu_2}\right|\to 0,$$

аналогично, $k_2\left|\Delta^{0,1}a_{k_1+1,k_2}\right|\to 0$, $\left|a_{k_1+1,k_2+1}\right|\to 0$ (по условию). Поскольку

$$\sum_{k_2=0}^{n_2-1}\left|\Delta^{1,2}\alpha_{n_1,k_2}\right| \le \sum_{k_1=n_1}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{n_2-1}\left|\Delta^{2,2}\alpha_{k_1,k_2}\right| \le \sum_{k_1=n_1}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\left|\Delta^{2,2}\alpha_{k_1,k_2}\right|,$$

в силу теоремы 1 и сходимости ряда $\sum_{k_1=1}^{\infty}k_1\sum_{k_2=1}^{\infty}k_2\left|\Delta^{2,2}a_{k_1,k_2}\right|<\infty$ правая часть последнего неравенства стремится к нулю при $n_1+n_2\to\infty$, что и доказывает соотношение

$$\lim_{n_1+n_2\to\infty}\sum_{k_2=0}^{n_2-1}\left|\Delta^{1,2}\alpha_{n_1,k_2}\right| = 0.$$

Аналогично доказывается соотношение $\lim\limits_{n_1+n_2\to\infty} \sum\limits_{k_1=0}^{n_1-1} \left|\Delta^{2,1}\alpha_{k_1,n_2}\right| = 0$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Если коэффициенты ряда* (1) *удовлетворяют условиям* (2) *и* (3), *то существует непрерывная смешанная производная* $\dfrac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2}$ *в* $T_\varepsilon^2 := [\varepsilon_1, \pi]\times[\varepsilon_2, \pi]$, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$.

Доказательство проводится путем двукратного по каждой переменной преобразования Абеля функции $f(x_1, x_2)$, в результате которого получаем ряд для $(x_1, x_2) \in T_\varepsilon^2$. После дифференцирования этого ряда по каждой переменной получим равномерно сходящийся в T_ε^2 ряд, что и доказывает лемму 2.

В одномерном случае такое утверждение получено в [5].

Пусть

$$\varphi_{k_j}(x_j) := -\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x_j}{2} + \sum_{i_j=1}^{k_j} \sin i_j x_j = -\frac{\cos(k_j+1/2)x_j}{2\sin(x_j/2)},$$

$$\psi_{k_j}(x_j) = \sum_{i_j=0}^{k_j} \varphi_{i_j}(x_j) = -\frac{\sin(k_j+1)x_j}{4\sin^2(x_j/2)},$$

где $j = 1, 2$, $k_j = 0, 1, \ldots$, $x_j \in (0, \pi]$.

Теорема 3. *Если коэффициенты ряда* (1) *удовлетворяют условиям* (2) *и* (3), *то для смешанной производной от суммы этого ряда справедливо представление*

$$\frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} = \sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty} \Delta^{2,2}\alpha_{k_1,k_2}\psi_{k_1}(x_1)\psi_{k_2}(x_2), \qquad x_i \in T_\varepsilon^2, \qquad i = 1, 2. \tag{8}$$

Доказательство. Поскольку при данных условиях ряд (1) сходится равномерно в произвольном прямоугольнике T_ε^2, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ [1], последовательность $(C, 1)$-средних этого ряда

$$\sigma_{n_1,n_2}(f, x_1, x_2) := \sum_{k_1=0}^{n_1}\sum_{k_2=0}^{n_2} 2^{-\gamma_{k_1,k_2}}\left(1-\frac{k_1}{n_1+1}\right)\left(1-\frac{k_2}{n_2+1}\right) a_{k_1,k_2}\cos k_1x_1\cos k_2x_2,$$

где γ_{k_1,k_2} — число нулей вектора $k = (k_1, k_2)$, также сходится равномерно к функции $f(x_1, x_2)$ на T_ε^2 [6]. Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что последовательность $\dfrac{\partial^2\sigma_{n_1,n_2}(f, x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2}$ сходится равномерно на T_ε^2 к функции, стоящей в правой части (8).

Обозначим

$$\beta_{k_1,k_2} = \left(1-\frac{k_1}{n_1+1}\right)\left(1-\frac{k_2}{n_2+1}\right)\alpha_{k_1,k_2}, \qquad k_i = 0, 1, \ldots, n_i+1, \qquad i = 1, 2.$$

Тогда

$$\frac{\partial^2\sigma_{n_1,n_2}(f, x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} = \sum_{k_1=1}^{n_1}\sum_{k_2=1}^{n_2} \beta_{k_1,k_2}\sin k_1x_1\sin k_2x_2.$$

После двух преобразований Абеля этого выражения находим

$$\frac{\partial^2 \sigma_{n_1,n_2}(f, x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} = \sum_{k_1=0}^{n_1-1} \sum_{k_2=0}^{n_2-1} \Delta^{2,2}\beta_{k_1,k_2} \psi_{k_1}(x_1)\psi_{k_2}(x_2) +$$

$$+ \sum_{k_1=0}^{n_1-1} \Delta^{2,1}\beta_{k_1,n_2} \psi_{k_1}(x_1)\psi_{n_2}(x_2) +$$

$$+ \sum_{k_2=0}^{n_2-1} \Delta^{1,2}\beta_{n_1,k_2} \psi_{n_1}(x_1)\psi_{k_2}(x_2) + \frac{n_1 n_2}{(n_1+1)(n_2+1)} a_{n_1,n_2} \psi_{n_1}(x_1)\psi_{n_2}(x_2).$$

Выразим $\Delta^{2,2}\beta_{k_1,k_2}$, $\Delta^{2,1}\beta_{k_1,n_2}$, $\Delta^{1,2}\beta_{n_1,k_2}$ через разности последовательности $\{\alpha_{k_1,k_2}\}$. Если $k_1 \le n_1 - 1$, $k_2 \le n_2 - 1$, то

$$\Delta^{2,1}\beta_{k_1,n_2} = \left(1 - \frac{k_1}{n_1+1}\right)\frac{1}{n_2+1} \Delta^{2,0}\alpha_{k_1,n_2} + \frac{2}{(n_1+1)(n_2+1)} \Delta^{1,0}\alpha_{k_1+1,n_2},$$

$$\Delta^{1,2}\beta_{n_1,k_2} = \left(1 - \frac{k_2}{n_2+1}\right)\frac{1}{n_1+1} \Delta^{0,2}\alpha_{n_1,k_2} + \frac{2}{(n_1+1)(n_2+1)} \Delta^{0,1}\alpha_{n_1,k_2+1},$$

$$\Delta^{2,2}\beta_{k_1,k_2} = \left(1 - \frac{k_1}{n_1+1}\right)\left(1 - \frac{k_2}{n_2+1}\right) \Delta^{2,2}\alpha_{k_1,k_2} -$$

$$- 2\left(1 - \frac{k_1}{n_1+1}\right)\frac{1}{n_2+1} \Delta^{2,1}\alpha_{k_1,k_2+1} -$$

$$- 2\left(1 - \frac{k_2}{n_2+1}\right)\frac{1}{n_1+1} \Delta^{1,2}\alpha_{k_1+1,k_2} + \frac{4}{(n_1+1)(n_2+1)} \Delta^{1,1}\alpha_{k_1+1,k_2+1}.$$

Учитывая найденные значения $\Delta^{2,2}\beta_{k_1,k_2}$, $\Delta^{2,1}\beta_{k_1,n_2}$, $\Delta^{1,2}\beta_{n_1,k_2}$, записываем

$$\frac{\partial^2 \sigma_{n_1,n_2}(f, x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} = \sum_{k_1=0}^{n_1-1} \sum_{k_2=0}^{n_2-1} \Delta^{2,2}\alpha_{k_1,k_2} \psi_{k_1}(x_1)\psi_{k_2}(x_2) + R_{n_1,n_2}(x_1, x_2), \qquad (9)$$

где

$$R_{n_1,n_2}(x_1,x_2) = -\frac{1}{n_1+1} \sum_{k_1=0}^{n_1-1} \sum_{k_2=0}^{n_2-1} k_1 \Delta^{2,2}\alpha_{k_1,k_2} \psi_{k_1}(x_1)\psi_{k_2}(x_2) -$$

$$- \frac{1}{n_2+1} \sum_{k_1=0}^{n_1-1} \sum_{k_2=0}^{n_2-1} k_2 \Delta^{2,2}\alpha_{k_1,k_2} \psi_{k_1}(x_1)\psi_{k_2}(x_2) +$$

$$+ \frac{1}{(n_1+1)(n_2+1)} \sum_{k_1=0}^{n_1-1} \sum_{k_2=0}^{n_2-1} k_1 k_2 \Delta^{2,2}\alpha_{k_1,k_2} \psi_{k_1}(x_1)\psi_{k_2}(x_2) -$$

$$- \frac{2}{n_1+1} \sum_{k_1=0}^{n_1-1} \sum_{k_2=0}^{n_2-1} \Delta^{1,2}\alpha_{k_1+1,k_2} \psi_{k_1}(x_1)\psi_{k_2}(x_2) +$$

$$+ \frac{2}{(n_1+1)(n_2+1)} \sum_{k_1=0}^{n_1-1} \sum_{k_2=0}^{n_2-1} k_2 \Delta^{1,2}\alpha_{k_1+1,k_2} \psi_{k_1}(x_1)\psi_{k_2}(x_2) -$$

$$- \frac{2}{n_2+1} \sum_{k_1=0}^{n_1-1} \sum_{k_2=0}^{n_2-1} \Delta^{2,1} \alpha_{k_1,k_2+1} \psi_{k_1}(x_1) \psi_{k_2}(x_2) +$$

$$+ \frac{2}{(n_1+1)(n_2+1)} \sum_{k_1=0}^{n_1-1} \sum_{k_2=0}^{n_2-1} k_1 \Delta^{2,1} \alpha_{k_1,k_2+1} \psi_{k_1}(x_1) \psi_{k_2}(x_2) +$$

$$+ \frac{4}{(n_1+1)(n_2+1)} \sum_{k_1=0}^{n_1-1} \sum_{k_2=0}^{n_2-1} \Delta^{1,1} \alpha_{k_1+1,k_2+1} \psi_{k_1}(x_1) \psi_{k_2}(x_2) +$$

$$+ \frac{1}{n_2+1} \sum_{k_1=0}^{n_1-1} \Delta^{2,0} \alpha_{k_1,n_2} \psi_{k_1}(x_1) \psi_{n_2}(x_2) -$$

$$- \frac{1}{(n_1+1)(n_2+1)} \sum_{k_1=0}^{n_1-1} k_1 \Delta^{2,0} \alpha_{k_1,n_2} \psi_{k_1}(x_1) \psi_{n_2}(x_2) +$$

$$+ \frac{2}{(n_1+1)(n_2+1)} \sum_{k_1=0}^{n_1-1} \Delta^{1,0} \alpha_{k_1+1,n_2} \psi_{k_1}(x_1) \psi_{n_2}(x_2) +$$

$$+ \frac{1}{n_1+1} \sum_{k_2=0}^{n_2-1} \Delta^{0,2} \alpha_{n_1,k_2} \psi_{n_1}(x_1) \psi_{k_2}(x_2) -$$

$$- \frac{1}{(n_1+1)(n_2+1)} \sum_{k_2=0}^{n_2-1} k_2 \Delta^{0,2} \alpha_{n_1,k_2} \psi_{n_1}(x_1) \psi_{k_2}(x_2) +$$

$$+ \frac{2}{(n_1+1)(n_2+1)} \sum_{k_2=0}^{n_2-1} \Delta^{0,1} \alpha_{n_1,k_2+1} \psi_{n_1}(x_1) \psi_{k_2}(x_2) +$$

$$+ \frac{n_1 n_2}{(n_1+1)(n_2+1)} a_{n_1,n_2} \psi_{n_1}(x_1) \psi_{n_2}(x_2).$$

Поскольку условие (6) эквивалентно условию (7) (см. теорему 2), то ряд

$$\sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \Delta^{2,2} \alpha_{k_1,k_2} \psi_{k_1}(x_1) \psi_{k_2}(x_2)$$

сходится равномерно на T_ε^2. Для доказательства теоремы достаточно показать, что при $n_1 + n_2 \to \infty$ последовательность $R_{n_1,n_2}(x_1, x_2)$ стремится к нулю равномерно на T_ε^2. Для $(x_1, x_2) \in T_\varepsilon^2$ имеем

$$|R_{n_1,n_2}(x_1,x_2)| \le \frac{C}{\varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2} \Bigg[\frac{1}{n_1+1} \sum_{k_1=0}^{n_1-1} \sum_{k_2=0}^{n_2-1} k_1 \left| \Delta^{2,2} \alpha_{k_1,k_2} \right| +$$

$$+ \frac{1}{n_2+1} \sum_{k_1=0}^{n_1-1} \sum_{k_2=0}^{n_2-1} k_2 \left| \Delta^{2,2} \alpha_{k_1,k_2} \right| + \frac{1}{(n_1+1)(n_2+1)} \sum_{k_1=0}^{n_1-1} \sum_{k_2=0}^{n_2-1} k_1 k_2 \left| \Delta^{2,2} \alpha_{k_1,k_2} \right| +$$

$$+ \frac{2}{n_1+1} \sum_{k_1=0}^{n_1-1} \sum_{k_2=0}^{n_2-1} \left| \Delta^{1,2} \alpha_{k_1+1,k_2} \right| + \frac{2}{(n_1+1)(n_2+1)} \sum_{k_1=0}^{n_1-1} \sum_{k_2=0}^{n_2-1} k_2 \left| \Delta^{1,2} \alpha_{k_1+1,k_2} \right| +$$

$$+ \frac{2}{n_2+1}\sum_{k_1=0}^{n_1-1}\sum_{k_2=0}^{n_2-1}\left|\Delta^{2,1}\alpha_{k_1,k_2+1}\right| + \frac{2}{(n_1+1)(n_2+1)}\sum_{k_1=0}^{n_1-1}\sum_{k_2=0}^{n_2-1}k_1\left|\Delta^{2,1}\alpha_{k_1,k_2+1}\right| +$$

$$+ \frac{4}{(n_1+1)(n_2+1)}\sum_{k_1=0}^{n_1-1}\sum_{k_2=0}^{n_2-1}\left|\Delta^{1,1}\alpha_{k_1+1,k_2+1}\right| + \frac{1}{n_2+1}\sum_{k_1=0}^{n_1-1}\left|\Delta^{2,0}\alpha_{k_1,n_2}\right| +$$

$$+ \frac{1}{(n_1+1)(n_2+1)}\sum_{k_1=0}^{n_1-1}k_1\left|\Delta^{2,0}\alpha_{k_1,n_2}\right| + \frac{2}{(n_1+1)(n_2+1)}\sum_{k_1=0}^{n_1-1}\left|\Delta^{1,0}\alpha_{k_1+1,n_2}\right| +$$

$$+ \frac{1}{n_1+1}\sum_{k_2=0}^{n_2-1}\left|\Delta^{0,2}\alpha_{n_1,k_2}\right| + \frac{1}{(n_1+1)(n_2+1)}\sum_{k_2=0}^{n_2-1}k_2\left|\Delta^{0,2}\alpha_{n_1,k_2}\right| +$$

$$+ \frac{2}{(n_1+1)(n_2+1)}\sum_{k_2=0}^{n_2-1}\left|\Delta^{0,1}\alpha_{n_1,k_2+1}\right| + \frac{n_1n_2}{(n_1+1)(n_2+1)}\left|a_{n_1,n_2}\right|\Bigg].$$

При $n_1 + n_2 \to \infty$ выражение в квадратных скобках стремится к нулю. Действительно, для любого m_2 имеем

$$\frac{1}{n_2+1}\sum_{k_1=0}^{n_1-1}\sum_{k_2=0}^{n_2-1}k_2\left|\Delta^{2,2}\alpha_{k_1,k_2}\right| \le$$

$$\le \frac{1}{n_2+1}\sum_{k_2=0}^{m_2}k_2\sum_{k_1=0}^{n_1-1}\left|\Delta^{2,2}\alpha_{k_1,k_2}\right| + \sum_{k_2=m_2+1}^{\infty}\sum_{k_1=0}^{n_1-1}\left|\Delta^{2,2}\alpha_{k_1,k_2}\right|.$$

Покажем, что правая часть может быть как угодно малой за счет выбора n_2 и m_2. Для любого $\varepsilon > 0$ можно подобрать m_2 настолько большим, чтобы

$$\sum_{k_2=m_2+1}^{\infty}\sum_{k_1=0}^{n_1-1}\left|\Delta^{2,2}\alpha_{k_1,k_2}\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

поскольку ряд $\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\left|\Delta^{2,2}\alpha_{k_1,k_2}\right|$ сходится. Далее, зафиксировав m_2, будем подбирать n_2 настолько большим, чтобы

$$\frac{1}{n_2+1}\sum_{k_2=0}^{m_2}k_2\sum_{k_1=0}^{n_1-1}\left|\Delta^{2,2}\alpha_{k_1,k_2}\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Для так подобранных n_2 и m_2 и любого $\varepsilon > 0$

$$\frac{1}{n_2+1}\sum_{k_1=0}^{n_1-1}\sum_{k_2=0}^{n_2-1}k_2\left|\Delta^{2,2}\alpha_{k_1,k_2}\right| < \varepsilon.$$

А это означает, что при $n_1 + n_2 \to \infty$

$$\frac{1}{n_2+1}\sum_{k_1=0}^{n_1-1}\sum_{k_2=0}^{n_2-1}k_2\left|\Delta^{2,2}\alpha_{k_1,k_2}\right| \to 0.$$

Рассуждая аналогично, можно показать, что

$$\frac{1}{n_1+1}\sum_{k_1=0}^{n_1-1}\sum_{k_2=0}^{n_2-1} k_1\left|\Delta^{2,2}\alpha_{k_1,k_2}\right| \to 0$$

и

$$\frac{1}{(n_1+1)(n_2+1)}\sum_{k_1=0}^{n_1-1}\sum_{k_2=0}^{n_2-1} k_1k_2\left|\Delta^{2,2}\alpha_{k_1,k_2}\right| \to 0 \quad \text{при} \;\; n_1+n_2\to\infty.$$

Далее,

$$\frac{2}{n_1+1}\sum_{k_1=0}^{n_1-1}\sum_{k_2=0}^{n_2-1}\left|\Delta^{1,2}\alpha_{k_1+1,k_2}\right| = \frac{2}{n_1+1}\sum_{k_1=0}^{n_1-1}\sum_{k_2=0}^{n_2-1}\sum_{\nu_1=k_1+1}^{\infty}\left|\Delta^{2,2}\alpha_{\nu_1,k_2}\right| \le$$

$$\le \frac{2}{n_1+1}\sum_{k_1=0}^{n_1}\sum_{k_2=0}^{n_2-1} k_1\left|\Delta^{2,2}\alpha_{k_1,k_2}\right| + 2\sum_{k_1=n_1+1}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{n_2-1}\left|\Delta^{2,2}\alpha_{k_1,k_2}\right| \to 0$$

при $n_1+n_2\to\infty$. Аналогично

$$\frac{2}{n_2+1}\sum_{k_1=0}^{n_1-1}\sum_{k_2=0}^{n_2-1}\left|\Delta^{2,1}\alpha_{k_1,k_2+1}\right| \to 0 \quad \text{при} \;\; n_1+n_2\to\infty,$$

$$\frac{2}{(n_1+1)(n_2+1)}\sum_{k_1=0}^{n_1-1}\sum_{k_2=0}^{n_2-1} k_2\left|\Delta^{1,2}\alpha_{k_1+1,k_2}\right| \le$$

$$\le \frac{2}{n_1+1}\sum_{k_1=0}^{n_1-1}\sum_{k_2=0}^{n_2-1}\left|\Delta^{1,2}\alpha_{k_1+1,k_2}\right| \to 0 \quad \text{при} \;\; n_1+n_2\to\infty,$$

$$\frac{2}{(n_1+1)(n_2+1)}\sum_{k_1=0}^{n_1-1}\sum_{k_2=0}^{n_2-1} k_1\left|\Delta^{2,1}\alpha_{k_1,k_2+1}\right| \le$$

$$\le \frac{2}{n_2+1}\sum_{k_1=0}^{n_1-1}\sum_{k_2=0}^{n_2-1}\left|\Delta^{2,1}\alpha_{k_1,k_2+1}\right| \to 0 \quad \text{при} \;\; n_1+n_2\to\infty.$$

Далее, согласно лемме 1 $\Delta^{1,1}\alpha_{k_1,k_2}\to 0$ при $k_1+k_2\to\infty$, значит,

$$\frac{1}{n_2+1}\sum_{k_2=0}^{n_2-1}\left|\Delta^{1,1}\alpha_{k_1+1,k_2+1}\right| \to 0$$

и поэтому

$$\frac{1}{n_1+1}\sum_{k_1=0}^{n_1-1}\frac{1}{n_2+1}\sum_{k_2=0}^{n_2-1}\left|\Delta^{1,1}\alpha_{k_1+1,k_2+1}\right| \to 0 \quad \text{при} \;\; n_1+n_2\to\infty.$$

Имеем

$$\frac{1}{n_2+1}\sum_{k_1=0}^{n_1-1}\left|\Delta^{2,0}\alpha_{k_1,n_2}\right| \le \frac{1}{n_2+1}\sum_{k_1=0}^{n_1-1}\sum_{k_2=0}^{n_2-1}\left|\Delta^{2,1}\alpha_{k_1,k_2}\right| \le$$

$$\le \frac{1}{n_2+1}\sum_{k_1=0}^{n_1-1}\sum_{k_2=0}^{n_2-1}\sum_{\nu_2=k_2}^{\infty}\left|\Delta^{2,2}\alpha_{k_1,\nu_2}\right| \le \frac{1}{n_2+1}\sum_{k_1=0}^{n_1-1}\sum_{k_2=0}^{n_2-1} k_2\left|\Delta^{2,2}\alpha_{k_1,k_2}\right| +$$

$$+\sum_{k_1=0}^{n_1-1}\sum_{k_2=n_2}^{\infty}\left|\Delta^{2,2}\alpha_{k_1,k_2}\right| \to 0 \quad \text{при} \quad n_1+n_2\to\infty.$$

Аналогично

$$\frac{1}{n_1+1}\sum_{k_2=0}^{n_2-1}\left|\Delta^{0,2}\alpha_{n_1,k_2}\right| \to 0 \quad \text{при} \quad n_1+n_2\to\infty,$$

$$\frac{1}{(n_1+1)(n_2+1)}\sum_{k_1=0}^{n_1-1}k_1\left|\Delta^{2,0}\alpha_{k_1,n_2}\right| \le$$

$$\le \frac{1}{n_2+1}\sum_{k_1=0}^{n_1-1}k_1\left|\Delta^{2,0}\alpha_{k_1,n_2}\right| \to 0 \quad \text{при} \quad n_1+n_2\to\infty,$$

$$\frac{1}{(n_1+1)(n_2+1)}\sum_{k_2=0}^{n_2-1}k_2\left|\Delta^{0,2}\alpha_{n_1,k_2}\right| \to 0 \quad \text{при} \quad n_1+n_2\to\infty.$$

Далее,

$$\frac{2}{(n_1+1)(n_2+1)}\sum_{k_1=0}^{n_1-1}\left|\Delta^{1,0}\alpha_{k_1+1,n_2}\right| \le$$

$$\le \frac{2}{(n_1+1)(n_2+1)}\sum_{k_1=0}^{n_1-1}\sum_{k_2=0}^{n_2-1}\left|\Delta^{1,1}\alpha_{k_1,k_2}\right| \to 0 \quad \text{при} \quad n_1+n_2\to\infty.$$

Аналогично

$$\frac{2}{(n_1+1)(n_2+1)}\sum_{k_2=0}^{n_2-1}\left|\Delta^{0,1}\alpha_{n_1,k_2+1}\right| \to 0 \quad \text{при} \quad n_1+n_2\to\infty.$$

Наконец, $a_{n_1,n_2}\to 0$ согласно условию, значит, $\dfrac{n_1n_2}{(n_1+1)(n_2+1)}\left|a_{n_1,n_2}\right| \to 0.$ Поэтому согласно изложенному выше из (9) следует (8). Теорема 3 доказана.

***Доказательство теоремы* 1.** Используя представление (8), можно показать, что для любых $k_j = 1, 2, \ldots,\ j = 1, 2,$ справедливы равенства

$$\sum_{i_1=0}^{k_1-1}\sum_{i_2=0}^{k_2-1}\Delta^{2,2}\alpha_{i_1,i_2}\psi_{i_1}(x_1)\psi_{i_2}(x_2) = \sum_{i_1=0}^{k_1-1}\sum_{i_2=0}^{k_2-1}\Delta^{1,1}\alpha_{i_1,i_2}\varphi_{i_1}(x_1)\varphi_{i_2}(x_2) -$$

$$-\sum_{i_1=0}^{k_1-1}\Delta^{1,1}\alpha_{i_1,k_2}\varphi_{i_1}(x_1)\psi_{k_2-1}(x_2) -$$

$$-\sum_{i_2=0}^{k_2-1}\Delta^{1,1}\alpha_{k_1,i_2}\psi_{k_1-1}(x_1)\varphi_{i_2}(x_2) + \Delta^{1,1}\alpha_{k_1,k_2}\psi_{k_1-1}(x_1)\psi_{k_2-1}(x_2),$$

$$\sum_{i_1=0}^{k_1-1}\sum_{i_2=k_2}^{\infty}\Delta^{2,2}\alpha_{i_1,i_2}\psi_{i_1}(x_1)\psi_{i_2}(x_2) = \sum_{i_1=0}^{k_1-1}\sum_{i_2=k_2}^{\infty}\Delta^{1,2}\alpha_{i_1,i_2}\varphi_{i_1}(x_1)\psi_{i_2}(x_2) -$$

$$-\sum_{i_2=k_2}^{\infty}\Delta^{1,2}\alpha_{k_1,i_2}\psi_{k_1-1}(x_1)\psi_{i_2}(x_2),$$

$$\sum_{i_1=k_1}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{k_2-1}\Delta^{2,2}\alpha_{i_1,i_2}\psi_{i_1}(x_1)\psi_{i_2}(x_2) = \sum_{i_1=k_1}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{k_2-1}\Delta^{2,1}\alpha_{i_1,i_2}\psi_{i_1}(x_1)\varphi_{i_2}(x_2) -$$

$$- \sum_{i_1=k_1}^{\infty}\Delta^{2,1}\alpha_{i_1,k_2}\psi_{i_1}(x_1)\psi_{k_2-1}(x_2).$$

На основании (8) и последних равенств имеем

$$\frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} = \sum_{i_1=0}^{k_1-1}\sum_{i_2=0}^{k_2-1}\Delta^{1,1}\alpha_{i_1,i_2}\varphi_{i_1}(x_1)\varphi_{i_2}(x_2) +$$

$$+ \sum_{i_1=0}^{k_1-1}\sum_{i_2=k_2}^{\infty}\Delta^{1,2}\alpha_{i_1,i_2}\varphi_{i_1}(x_1)(\psi_{i_2}(x_2) - \psi_{k_2-1}(x_2)) +$$

$$+ \sum_{i_1=k_1}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{k_2-1}\Delta^{2,1}\alpha_{i_1,i_2}(\psi_{i_1}(x_1) - \psi_{k_1-1}(x_1))\varphi_{i_2}(x_2) +$$

$$+ \sum_{i_1=k_1}^{\infty}\sum_{i_2=k_2}^{\infty}\Delta^{2,2}\alpha_{i_1,i_2}(\psi_{i_1}(x_1) - \psi_{k_1-1}(x_1))(\psi_{i_2}(x_2) - \psi_{k_2-1}(x_2)),$$

где $\varphi_{i_j}(x_j) := -\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x_j}{2} + \tilde{D}_{i_j}(x_j)$, $j = 1, 2$, $\tilde{D}_{i_j}(x_j)$ — сопряженные ядра ле порядка i_j.

Интеграл в левой части (4) записываем в виде

$$\sigma := \iint_{P_{l,m}} \left|\frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2}\right| dx_1\, dx_2 =$$

$$= \sum_{k_1=l_1}^{m_1}\sum_{k_2=l_2}^{m_2}\iint_{P_{k_1,k_2}}\left|\frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2}\right| dx_1\, dx_2 =: \sum_{k_1=l_1}^{m_1}\sum_{k_2=l_2}^{m_2} I_{k_1,k_2},$$

где

$$P_{k_1,k_2} = \left\{(x_1, x_2)\colon \frac{\pi}{k_i+1} \le x_i \le \frac{\pi}{k_i},\ i = 1, 2\right\}.$$

Тогда

$$I_{k_1,k_2} \le \iint_{P_{k_1,k_2}} \frac{|\alpha_{k_1,k_2}|}{4}\operatorname{ctg}\frac{x_1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x_2}{2}\, dx_1\, dx_2 +$$

$$+ \iint_{P_{k_1,k_2}} \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x_1}{2}\sum_{i_2=0}^{k_2-1}\left|\Delta^{0,1}\alpha_{k_1,i_2}\right|\left|\tilde{D}_{i_2}(x_2)\right| dx_1\, dx_2 +$$

$$+ \iint_{P_{k_1,k_2}} \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x_2}{2}\sum_{i_1=0}^{k_1-1}\left|\Delta^{1,0}\alpha_{i_1,k_2}\right|\left|\tilde{D}_{i_1}(x_1)\right| dx_1\, dx_2 +$$

$$+ \iint_{P_{k_1,k_2}} \sum_{i_1=0}^{k_1-1}\sum_{i_2=0}^{k_2-1}\left|\Delta^{1,1}\alpha_{i_1,i_2}\right|\left|\tilde{D}_{i_1}(x_1)\right|\left|\tilde{D}_{i_2}(x_2)\right| dx_1\, dx_2 +$$

$$+\iint\limits_{P_{k_1,k_2}} \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x_1}{2}\sum_{i_2=k_2}^{\infty}\left|\Delta^{0,2}\alpha_{k_1,i_2}\right|\left|\psi_{i_2}(x_2)-\psi_{k_2-1}(x_2)\right|dx_1\,dx_2\ +$$

$$+\iint\limits_{P_{k_1,k_2}}\sum_{i_1=0}^{k_1-1}\sum_{i_2=k_2}^{\infty}\left|\Delta^{1,2}\alpha_{i_1,i_2}\right|\left|\tilde{D}_{i_1}(x_1)\right|\left|\psi_{i_2}(x_2)-\psi_{k_2-1}(x_2)\right|dx_1\,dx_2\ +$$

$$+\iint\limits_{P_{k_1,k_2}} \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x_2}{2}\sum_{i_1=k_1}^{\infty}\left|\Delta^{2,0}\alpha_{i_1,k_2}\right|\left|\psi_{i_1}(x_1)-\psi_{k_1-1}(x_1)\right|dx_1\,dx_2\ +$$

$$+\iint\limits_{P_{k_1,k_2}}\sum_{i_1=k_1}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{k_2-1}\left|\Delta^{2,1}\alpha_{i_1,i_2}\right|\left|\psi_{i_1}(x_1)-\psi_{k_1-1}(x_1)\right|\left|\tilde{D}_{i_2}(x_2)\right|dx_1\,dx_2\ +$$

$$+\iint\limits_{P_{k_1,k_2}}\sum_{i_1=k_1}^{\infty}\sum_{i_2=k_2}^{\infty}\left|\Delta^{2,2}\alpha_{i_1,i_2}\right|\left|\psi_{i_1}(x_1)-\psi_{k_1-1}(x_1)\right|\left|\psi_{i_2}(x_2)-\psi_{k_2-1}(x_2)\right|dx_1\,dx_2.$$

Применяя к интегралам от ядер $\tilde{D}_{i_j}(x_j)$ и $\psi_{i_j}(x_j)$, $j = 1, 2$, оценки

$$\left|\tilde{D}_{i_j}(x_j)\right| = \left|\sum_{s=1}^{i_j}\sin sx_j\right| \le (i_j)^2 x_j, \qquad j = 1, 2,$$

и $0 \le |\psi_{i_j}(x_j)| \le \dfrac{C}{x_j^2}$, получаем

$$\sigma := \sum_{k_1=l_1}^{m_1}\sum_{k_2=l_2}^{m_2} I_{k_1,k_2} \le \sum_{k_1=l_1}^{m_1}\sum_{k_2=l_2}^{m_2}\left|\alpha_{k_1,k_2}\right|u_{k_1}u_{k_2}\ +$$

$$+\sum_{k_1=l_1}^{m_1}\sum_{k_2=l_2}^{m_2}\sum_{i_2=0}^{k_2-1}\left|\Delta^{0,1}\alpha_{k_1,i_2}\right|i_2^2u_{k_1}\int\limits_{\pi/(k_2+1)}^{\pi/k_2}x_2\,dx_2\ +$$

$$+\sum_{k_1=l_1}^{m_1}\sum_{k_2=l_2}^{m_2}\sum_{i_1=0}^{k_1-1}\left|\Delta^{1,0}\alpha_{i_1,k_2}\right|i_1^2u_{k_2}\int\limits_{\pi/(k_1+1)}^{\pi/k_1}x_1\,dx_1\ +$$

$$+\sum_{k_1=l_1}^{m_1}\sum_{k_2=l_2}^{m_2}\sum_{i_1=0}^{k_1-1}\sum_{i_2=0}^{k_2-1}\left|\Delta^{1,1}\alpha_{i_1,i_2}\right|i_1^2i_2^2\int\limits_{\pi/(k_1+1)}^{\pi/k_1}x_1\,dx_1\int\limits_{\pi/(k_2+1)}^{\pi/k_2}x_2\,dx_2\ +$$

$$+\ C\left(\sum_{k_1=l_1}^{m_1}\sum_{k_2=l_2}^{m_2}\sum_{i_2=k_2}^{\infty}\left|\Delta^{0,2}\alpha_{k_1,i_2}\right|u_{k_1}+\sum_{k_1=l_1}^{m_1}\sum_{k_2=l_2}^{m_2}\sum_{i_1=0}^{k_1-1}\sum_{i_2=k_2}^{\infty}\left|\Delta^{1,2}\alpha_{i_1,i_2}\right|i_1^2\int\limits_{\pi/(k_1+1)}^{\pi/k_1}x_1\,dx_1\ +\right.$$

$$+\sum_{k_1=l_1}^{m_1}\sum_{k_2=l_2}^{m_2}\sum_{i_1=k_1}^{\infty}\left|\Delta^{2,0}\alpha_{i_1,k_2}\right|u_{k_2}\ +$$

$$\left.+\sum_{k_1=l_1}^{m_1}\sum_{k_2=l_2}^{m_2}\sum_{i_1=k_1}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{k_2-1}\left|\Delta^{2,1}\alpha_{i_1,i_2}\right|i_2^2\int\limits_{\pi/(k_2+1)}^{\pi/k_2}x_2\,dx_2+\sum_{k_1=l_1}^{m_1}\sum_{k_2=l_2}^{m_2}\sum_{i_1=k_1}^{\infty}\sum_{i_2=k_2}^{\infty}\left|\Delta^{2,2}\alpha_{i_1,i_2}\right|\right):=$$

$$:= \sigma^1_{l,m}+\sigma^2_{l,m}+\sigma^3_{l,m}+\sigma^4_{l,m}+\sigma^5_{l,m}+\sigma^6_{l,m}+\sigma^7_{l,m}+\sigma^8_{l,m}+\sigma^9_{l,m}.$$

Оценим $\sigma^1_{l,m}$, $\sigma^2_{l,m}$, $\sigma^3_{l,m}$, $\sigma^4_{l,m}$, $\sigma^5_{l,m}$, $\sigma^6_{l,m}$, $\sigma^7_{l,m}$, $\sigma^8_{l,m}$, $\sigma^9_{l,m}$:

$$\sigma^2_{l,m} \le C\left(\sum_{k_1=l_1}^{m_1} u_{k_1} \sum_{k_2=0}^{l_2-1} \frac{m_2+1-l_2}{m_2}\frac{k_2^2}{l_2^2}\left|\Delta^{0,1}\alpha_{k_1,k_2}\right| + \right.$$

$$\left. + \sum_{k_1=l_1}^{m_1} u_{k_1} \sum_{k_2=l_2}^{\infty} \min(k_2+1-l_2,\, m_2+1-l_2)\left|\Delta^{0,2}\alpha_{k_1,k_2}\right|\right),$$

$$\sigma^3_{l,m} \le C\left(\sum_{k_1=0}^{l_1-1} \frac{m_1+1-l_1}{m_1}\frac{k_1^2}{l_1^2} \sum_{k_2=l_2}^{m_2} u_{k_2}\left|\Delta^{1,0}\alpha_{k_1,k_2}\right| + \right.$$

$$\left. + \sum_{k_1=l_1}^{\infty} \min(k_1+1-l_1,\, m_1+1-l_1) \sum_{k_2=l_2}^{m_2} u_{k_2}\left|\Delta^{2,0}\alpha_{k_1,k_2}\right|\right),$$

$$\sigma^4_{l,m} \le C\left(\frac{m_1+1-l_1}{m_1}\frac{m_2+1-l_2}{m_2}\sum_{k_1=0}^{l_1-1}\sum_{k_2=0}^{l_2-1}\frac{k_1^2}{l_1^2}\frac{k_2^2}{l_2^2}\left|\Delta^{1,1}\alpha_{k_1,k_2}\right| + \right.$$

$$+ \frac{m_1+1-l_1}{m_1}\sum_{k_1=0}^{l_1-1}\frac{k_1^2}{l_1^2}\sum_{i_2=l_2}^{\infty}\min(k_2+1-l_2,\, m_2+1-l_2)\left|\Delta^{1,2}\alpha_{k_1,k_2}\right| +$$

$$+ \frac{m_2+1-l_2}{m_2}\sum_{i_1=l_1}^{\infty}\min(k_1+1-l_1,\, m_1+1-l_1)\sum_{k_2=0}^{l_2-1}\frac{k_2^2}{l_2^2}\left|\Delta^{2,1}\alpha_{k_1,k_2}\right| +$$

$$\left. + \sum_{k_1=l_1}^{\infty}\min(k_1+1-l_1,\, m_1+1-l_1)\sum_{k_2=l_2}^{\infty}\min(k_2+1-l_2,\, m_2+1-l_2)\left|\Delta^{2,2}\alpha_{k_1,k_2}\right|\right),$$

$$\sigma^5_{l,m} \le C\sum_{k_1=l_1}^{m_1} u_{k_1}\sum_{k_2=l_2}^{\infty}\min(k_2+1-l_2,\, m_2+1-l_2)\left|\Delta^{0,2}\alpha_{k_1,k_2}\right|, \tag{10}$$

$$\sigma^7_{l,m} \le C\sum_{k_1=l_1}^{\infty}\min(k_1+1-l_1,\, m_1+1-l_1)\sum_{k_2=l_2}^{m_2} u_{k_2}\left|\Delta^{2,0}\alpha_{k_1,k_2}\right|,$$

$$\sigma^6_{l,m} \le C\left(\frac{m_1+1-l_1}{m_1}\sum_{k_1=0}^{l_1-1}\frac{k_1^2}{l_1^2}\sum_{k_2=l_2}^{\infty}\min(k_2+1-l_2,\, m_2+1-l_2)\left|\Delta^{1,2}\alpha_{k_1,k_2}\right| + \right.$$

$$\left. + \sum_{k_1=l_1}^{\infty}\min(k_1+1-l_1,\, m_1+1-l_1)\sum_{k_2=l_2}^{\infty}\min(k_2+1-l_2,\, m_2+1-l_2)\left|\Delta^{2,2}\alpha_{k_1,k_2}\right|\right),$$

$$\sigma^8_{l,m} \le C\left(\frac{m_2+1-l_2}{m_2}\sum_{k_1=l_1}^{\infty}\min(k_1+1-l_1,\, m_1+1-l_1)\sum_{k_2=0}^{l_2-1}\frac{k_2^2}{l_2^2}\left|\Delta^{2,1}\alpha_{k_1,k_2}\right| + \right.$$

$$\left. + \sum_{k_1=l_1}^{\infty}\min(k_1+1-l_1,\, m_1+1-l_1)\sum_{k_2=l_2}^{\infty}\min(k_2+1-l_2,\, m_2+1-l_2)\left|\Delta^{2,2}\alpha_{k_1,k_2}\right|\right),$$

$$\sigma^9_{l,m} \le C\sum_{k_1=l_1}^{\infty}\min(k_1+1-l_1, m_1+1-l_1)\sum_{k_2=l_2}^{\infty}\min(k_2+1-l_2, m_2+1-l_2)\left|\Delta^{2,2}\alpha_{k_1,k_2}\right|.$$

Учитывая соотношения (8), (10), имеем

$$\sigma = \sum_{k_1=l_1}^{m_1}\sum_{k_2=l_2}^{m_2}\left|\alpha_{k_1,k_2}\right|u_{k_1}u_{k_2} + O(\omega_{l,m}),$$

что и завершает доказательство теоремы 1.

Приведем следствия из оценки (4), в которых остаточные члены содержат только вторые разности последовательности $\{\alpha_{k_1,k_2}\}$.

Следствие 1. *Пусть числа* a_{k_1,k_2} *удовлетворяют условиям* (2) *и* (3). *Тогда справедлива оценка*

$$\iint\limits_{P_{l,m}}\left|\frac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_1\,\partial x_2}\right|dx_1\,dx_2 = \sum_{k_1=l_1}^{m_1}\sum_{k_2=l_2}^{m_2}\left|\alpha_{k_1,k_2}\right|u_{k_1}u_{k_2} +$$

$$+ O\left(\sum_{k_1=l_1}^{m_1}u_{k_1}\sum_{k_2=0}^{\infty}\frac{m_2+1-l_2}{m_2}\min\left(\frac{k_2^3}{l_2^2},k_2,m_2\right)\left|\Delta^{0,2}\alpha_{k_1,k_2}\right| +\right.$$

$$+ \sum_{k_1=0}^{\infty}\frac{m_1+1-l_1}{m_1}\min\left(\frac{k_1^3}{l_1^2},k_1,m_1\right)\sum_{k_2=l_2}^{m_2}u_{k_2}\left|\Delta^{2,0}\alpha_{k_1,k_2}\right| +$$

$$\left.+ \frac{m_1+1-l_1}{m_1}\,\frac{m_2+1-l_2}{m_2}\sum_{k_1=0}^{\infty}\min\left(\frac{k_1^3}{l_1^2},k_1,m_1\right)\sum_{k_2=0}^{\infty}\min\left(\frac{k_2^3}{l_2^2},k_2,m_2\right)\left|\Delta^{2,2}\alpha_{k_1,k_2}\right|\right),$$

$$1 \le l_i \le m_i, \quad i = 1, 2.$$

Следствие 2. *Если числа* a_{k_1,k_2} *удовлетворяют условиям* (2) *и* (3), *то при* $l_i = 1$ *справедлива оценка*

$$\iint\limits_{P_{l,m}}\left|\frac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_1\,\partial x_2}\right|dx_1\,dx_2 = \sum_{k_1=1}^{m_1}\sum_{k_2=1}^{m_2}\left|\alpha_{k_1,k_2}\right|u_{k_1}u_{k_2} +$$

$$+ O\left(\sum_{k_1=1}^{m_1}u_{k_1}\sum_{k_2=1}^{\infty}\min(k_2,m_2)\left|\Delta^{0,2}\alpha_{k_1,k_2}\right| +\right.$$

$$\left.+ \sum_{k_1=1}^{\infty}\min(k_1,m_1)\sum_{k_2=1}^{m_2}u_{k_2}\left|\Delta^{2,0}\alpha_{k_1,k_2}\right| + \sum_{k_1=1}^{\infty}\min(k_1,m_1)\sum_{k_2=1}^{\infty}\min(k_2,m_2)\left|\Delta^{2,2}\alpha_{k_1,k_2}\right|\right).$$

Поскольку в условиях теоремы 3 функция $f(x_1, x_2)$ на $T_\varepsilon^2 := [\varepsilon_1, \pi] \times [\varepsilon_2, \pi]$ для любых $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ имеет непрерывные производные, теорему 3 можно переформулировать в терминах оценки вариации по Харди – Витали функции $f(x_1, x_2)$ на множестве $P_{l,m} = \left[\frac{\pi}{m_1+1};\frac{\pi}{l_1}\right]\times\left[\frac{\pi}{m_2+1};\frac{\pi}{l_2}\right]$.

Определение. *Функция* $f(x, y)$ *называется функцией ограниченной вариации в понимании Харди – Витали, если она является функцией ограниченной вариации на каждом ребре квадрата* $T^2 := [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$ *и существует константа* $M > 0$ *такая, что*

$$\sum_i\sum_k\left|f(x_{i+1},y_{k+1}) - f(x_{i+1},y_k) - f(x_i,y_{k+1}) + f(x_i,y_k)\right| \le M$$

для любой прямоугольной сетки с углами $(x_i, y_k) \in T^2$ [4].

Следствие 3. *Пусть последовательность* $\{a_{k_1,k_2}\} \to 0$ *при* $k_1 + k_2 \to \infty$ *и квазивыпукла. Тогда для вариации по Харди – Витали функции* $f(x_1, x_2)$ *справедлива оценка*

$$V(f, P_{l,m}) = \sum_{k_1=l_1}^{m_1} \sum_{k_2=l_2}^{m_2} \left|\alpha_{k_1,k_2}\right| u_{k_1} u_{k_2} +$$

$$+ O\left(\sum_{k_1=l_1}^{m_1} u_{k_1} \sum_{k_2=0}^{\infty} \frac{m_2+1-l_2}{m_2} \min\left(\frac{k_2^3}{l_2^2}, k_2, m_2\right) \left|\Delta^{0,2}\alpha_{k_1,k_2}\right| + \right.$$

$$+ \sum_{k_1=0}^{\infty} \frac{m_1+1-l_1}{m_1} \min\left(\frac{k_1^3}{l_1^2}, k_1, m_1\right) \sum_{k_2=l_2}^{m_2} u_{k_2} \left|\Delta^{2,0}\alpha_{k_1,k_2}\right| +$$

$$\left. + \frac{m_1+1-l_1}{m_1} \frac{m_2+1-l_2}{m_2} \sum_{k_1=0}^{\infty} \min\left(\frac{k_1^3}{l_1^2}, k_1, m_1\right) \sum_{k_2=0}^{\infty} \min\left(\frac{k_2^3}{l_2^2}, k_2, m_2\right) \left|\Delta^{2,2}\alpha_{k_1,k_2}\right| \right),$$

$$1 \le l_i \le m_i, \quad i = 1, 2,$$

с абсолютными постоянными в остаточных членах.

1. *Теляковский С. А.* Некоторые оценки для тригонометрических рядов с квазивыпуклыми коэффициентами // Мат. сб. – 1964. – **63**. – С. 426 – 444.
2. *Жижиашвили Л. В.* Сопряженные функции и тригонометрические ряды. – Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1969. – 102 с.
3. *Теляковский С. А.* Оценки интеграла от производной суммы тригонометрического ряда с квазивыпуклыми коэффициентами // Мат. сб. – 1995. – **186**. – С. 111 – 122.
4. *Алимов Ш. А., Ильин В. А., Никишин Е. М.* Вопросы сходимости кратных тригонометрических рядов и спектральных разложений // Успехи мат. наук. – 1976. – **31**. – С. 28 – 84.
5. *Дьяченко М. И.* Некоторые проблемы теории кратных тригонометрических рядов // Там же. – 1992. – **47**. – С. 97 – 162.
6. *Подкорытов А. Н.* Средние Фейера в двумерном случае // Вестн. Ленингр. ун-та. – 1978. – № 13. – С. 32 – 39.

Получено 30.09.2002,
после доработки — 25.03.2003