УДК 517.988

В. Л. Макаров (Ин-т математики НАН Украины, Киев),
В. В. Хлобыстов, Е. Ф. Кашпур (Киев. нац. ун-т им. Т. Шевченко),
Б. Р. Михальчук (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПОЛИНОМЫ ТИПА НЬЮТОНА С КОНТИНУАЛЬНЫМИ УЗЛАМИ

We construct an interpolational Newton-type polynomial of integral form with a continual set of knots. This interpolant is unique and preserves an operator polynomial of the corresponding degree.

Побудовано інтерполяційний поліном інтегрального вигляду типу Ньютона з континуальною множиною вузлів. Цей інтерполянт єдиний та зберігає операторний поліном відповідного степеня.

Вопросы обобщения теории интерполирования функций на функционалы и операторы в абстрактных пространствах рассматривались во многих работах (см., например, [1 – 3]). Отметим также результаты, посвященные этому направлению [3 – 8], которые наиболее полно изложены в монографиях [9, 10]. Здесь, в частности, были найдены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи полиномиального операторного интерполирования, дано конструктивное описание всего множества операторных полиномиальных интерполянтов и его подмножества — интерполянтов, сохраняющих полином, решены ряд экстремальных задач и других традиционных вопросов, встречающихся в теории интерполирования. При этом фиксированные узлы интерполяции были элементами бесконечномерных абстрактных пространств, что естественно приводило к неединственности решения задачи интерполирования. Один из путей выделения единственного операторного интерполяционного полинома — использование континуальных узлов, т. е. таких элементов соответствующего абстрактного пространства, которые зависят от числового параметра, пробегающего некоторую замкнутую область из $\mathbb{R}^1$. Первый простейший результат в этом направлении был получен в [11]. Практическое применение операторного интерполирования находится в таких областях, как приближенные вычисления континуальных интегралов, построение приближенных методов решения уравнений, идентификация нелинейных систем и т. д. (см., например, [2, 12, 13]).

В данной работе для функционалов, определенных на пространстве $\mathbb{Q}[0, 1]$ кусочно-непрерывных функций на отрезке $[0, 1]$ с конечным числом точек разрыва первого рода, построен интерполяционный полином типа Ньютона интегрального вида на континуальном множестве узлов. Показано, что такой интерполянт единствен и имеет свойство сохранения полиномов соответствующей степени. Эта работа продолжает исследования [11], где аналогичные результаты получены для частного случая континуальных узлов.

Постановка задачи. Пусть функционал F определен на пространстве $\mathbb{Q}[0, 1]$, задано континуальное множество функций

$$\bar{x}_n(t, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = x_0(t) + \sum_{i=1}^{n} (x_i(t) - x_{i-1}(t)) H(t - \xi_i), \tag{1}$$

зависящих от параметров ξ_i из области

$$\Omega_\xi = \{(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) : 0 \le \xi_1 \le \xi_2 \le \ldots \le \xi_n \le 1\}, \tag{2}$$

$x_i \in \mathbb{C}[0, 1]$, $H(u)$ — функция Хевисайда, Π_n — множество полиномов n-й степени вида

$$\Pi_n = \left\{ P_n : P_n(x) = K_0 + \int_0^1 K_1(z_1)x(z_1)dz_1 + \int_0^1\int_0^1 K_2(z_1,z_2)x(z_1)x(z_2)dz_1dz_2 + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + \int_0^1 \ldots \int_0^1 K_n(z_1,\ldots,z_n)x(z_1)\ldots x(z_n)dz_1\ldots dz_n \right\}, \tag{3}$$

где $x \in \mathbb{Q}[0, 1]$, K_i — кусочно-непрерывные функции по каждой переменной в отдельности на отрезке $[0, 1]$. Требуется на множестве полиномов Π_n найти такой полином P_n^I, для которого выполнялось бы условие

$$P_n^I(\bar{x}_n(\cdot,\xi_1,\ldots,\xi_n)) = F(\bar{x}_n(\cdot,\xi_1,\ldots,\xi_n)), \qquad P_n^I \in \Pi_n, \tag{4}$$

при любых ξ_i из области Ω_ξ в (2). Отметим, что полиномы интегрального вида из множества Π_n находят широкое применение в теории нелинейных систем [13].

Задача построения интерполянта P_n^I с условием (4) при $x_i(t) = ih$, $i = 0, 1, \ldots, n$, $h = \mathrm{const}$, решена в [11]. В этом случае функция $F(\bar{x}_k(\cdot,\xi_1,\ldots,\xi_k))$ симметрична относительно параметров $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ и это обстоятельство существенно упрощало решение задачи. В рассматриваемом случае такой симметрии не будет и способ решения интерполяционной задачи, изложенной в [11], здесь неприменим.

Решение задачи. Будем искать интерполянт P_n^I из Π_n, удовлетворяющий условию (4), в виде

$$P_n^I(x) = K_0^I + \int_0^1 K_1^I(z_1)(x(z_1)-x_0(z_1))dz_1 +$$

$$+ \int_0^1\int_{z_1}^1 K_2^I(z_1,z_2)(x(z_1)-x_0(z_1))(x(z_2)-x_1(z_2))dz_2dz_1 + \ldots$$

$$\ldots + \int_0^1\int_{z_1}^1\ldots\int_{z_{n-1}}^1 K_n^I(z_1,\ldots,z_n)(x(z_1)-x_0(z_1))(x(z_2)-x_1(z_2))\ldots$$

$$\ldots(x(z_n)-x_{n-1}(z_n))dz_ndz_{n-1}\ldots dz_1, \tag{5}$$

где функции K_i^I подлежат определению. Нетрудно показать, что любой полином из Π_n может быть приведен к виду (5) и обратно. Следовательно, $P_n^I \in \Pi_n$. В предположении, что смешанные производные

$$\frac{\partial^k}{\partial\xi_1\ldots\partial\xi_k}F(\bar{x}_k(\cdot,\xi_1,\ldots,\xi_k)), \qquad k = 0, 1, \ldots, n,$$

являются непрерывными функциями по каждой переменной из Ω_ξ, будем искать ядра полинома (5), исходя из следующих условий:

$$\frac{\partial^k}{\partial\xi_1\ldots\partial\xi_k}P_n^I(\bar{x}_k(\cdot,\xi_1,\ldots,\xi_k)) = \frac{\partial^k}{\partial\xi_1\ldots\partial\xi_k}F(\bar{x}_k(\cdot,\xi_1,\ldots,\xi_k)), \quad k = 0, 1, \ldots, n. \tag{6}$$

Проводя вычисления при $\dot{x}_i(t) - x_{i-1}(t) \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $t \in [0, 1]$, получаем

$$K_p^I(z_1,z_2,\ldots,z_p) = (-1)^p\left[(x_1(z_1)-x_0(z_1))(x_2(z_2)-x_1(z_2))\ldots(x_p(z_p)-x_{p-1}(z_p))\right]^{-1} \times$$

$$\times \frac{\partial^p}{\partial z_1\ldots\partial z_p}F(\bar{x}_p(\cdot,z_1,\ldots,z_p)), \quad p = 0, 1, \ldots, n. \tag{7}$$

Приведем утверждение (предложение 1.9 из [14]), которое понадобится нам для дальнейшего изложения.

Предложение. *Пусть* $f(t, \alpha)$, $t \in [0, 1]$, *— числовая функция, зависящая от числового параметра* $\alpha \in \mathbb{R}^1$; g *— функционал на линейном пространстве функций* $X(0, 1)$. *Пусть при данном* $\alpha_0 \in \mathbb{R}^1$:

1) *при всех* $\beta \in \mathbb{R}^1$ $f(t, \alpha_0 + \beta) - f(t, \alpha_0) \in \mathbb{C}^n(0, 1)$ *как функция от* t *(условие согласованности);*

2) *при всех* $t \in [0, 1]$ *существует* $f_2'(t, \alpha_0) \equiv \left.\dfrac{\partial f(t, \alpha)}{\partial \alpha}\right|_{\alpha = \alpha_0}$;

3) $\dfrac{\partial^k}{\partial t^k} \dfrac{f(t, \alpha_0 + \tau) - f(t, \alpha_0)}{\tau} \xrightarrow[\tau \to 0]{} \dfrac{\partial^k}{\partial t^k} f_2'(t, \alpha_0)$ *равномерно по* $t \in [0, 1]$, $k = 0, 1, \ldots, n$;

4) *функционал* g *имеет сильную* $\mathbb{C}^n$*-производную в точке* $f(t, \alpha_0)$.

Тогда сложная функция $k(\alpha) = g(f(\cdot, \alpha))$ *дифференцируема в точке* α_0 *и*

$$\left.\frac{\partial k}{\partial \alpha}\right|_{\alpha = \alpha_0} = \left(g'(f(\cdot, \alpha_0), t), f_2'(t, \alpha_0)\right). \tag{8}$$

Формула (8) является формулой дифференцирования по параметру под знаком функционала. Здесь $g'(f(\cdot, \alpha_0), t)$ — „обобщенная функция" аргумента $t \in [0, 1]$:

$$\left(g'(f(\cdot, \alpha_0), t), f_2'(t, \alpha_0)\right) = \int_0^1 g'(f(\cdot, \alpha_0), t) f_2'(t, \alpha_0) dt.$$

Введем следующие обозначения. Обозначим через $H_\omega(t - z_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, непрерывно дифференцируемые аппроксимации при $\omega \to \infty$ ступенчатых функций $H(t - z_i)$, через $\delta_\omega(t - z_i)$ — производные $H_\omega'(t - z_i)$ по параметрам z_i, которые представляют собой непрерывные аппроксимации дельта-функций Дирака $\delta(t - z_i)$ при $\omega \to \infty$ (такие приближения рассмотрены в [15]), $\varphi(t, z_1, \ldots, z_k, z_{k+1}, \omega)$ — множество функций вида

$$\varphi(t, z_1, \ldots, z_k, z_{k+1}, \omega) = \varphi_0(t) + \sum_{i=1}^{k+1} \varphi_i(t) H_\omega(t - z_i),$$

$$0 \le z_1 \le \ldots \le z_{k+1},$$

где $\varphi_i \in \mathbb{C}[0, 1]$, $i = 0, \ldots, k+1$. В соответствии с функционалом F введем функционал Φ_k, определенный на множестве функций φ:

$$\Phi_k(\varphi(\cdot, z_1, \ldots, z_{k+1}, \omega)) = \frac{\partial^{k-1}}{\partial z_1 \ldots \partial z_{k-1}} F(\varphi(\cdot, z_1, \ldots, z_{k+1}, \omega)).$$

С использованием предложения при $n = 1$ докажем лемму, необходимую для построения операторов разделенных разностей.

Лемма 1 (правило подстановки). *Пусть функционал* F *и фиксированные функции* φ_i, $(\varphi_i(t) + \varphi_{i+1}(t)) \neq 0$, $t \in [0, 1]$, *таковы, что имеет место равномерная сходимость*

$$\frac{\partial}{\partial z_k} \Phi_k(\ldots, \omega) \longrightarrow \frac{\partial}{\partial z_k} \Phi_k(\ldots, \infty)$$

по z_k, *когда* $\omega \to \infty$, *и для* Φ_k *справедлива формула* (8) *дифференцирования по параметру* z_k *под знаком функционала*:

$$\frac{\partial}{\partial z_k} \Phi_k(\varphi(\cdot, z_1, \ldots, z_k, z_{k+1}, \omega)) =$$

$$= \left(\Phi_k'(\varphi(\cdot, z_1, \ldots, z_k, z_{k+1}, \omega), t), \frac{\partial}{\partial z_k} \varphi(t, z_1, \ldots, z_k, z_{k+1}, \omega)\right) =$$

$$= -\left(\Phi_k'(\varphi(\cdot, z_1, \ldots, z_k, z_{k+1}, \omega), t), \varphi_k(t) \delta_\omega(t - z_k)\right) =$$

$$= -\int_0^1 \Phi_k'(\varphi(\cdot, z_1, \ldots, z_k, z_{k+1}, \omega), t) \varphi_k(t) \delta_\omega(t - z_k) dt$$

с непрерывными по t *функциональными производными и равномерно по* t

$$\Phi_k'(\varphi(\cdot, z_1, \ldots, z_k, z_{k+1}, \omega), t) \longrightarrow \Phi_k'(\varphi(\cdot, z_1, \ldots, z_k, z_{k+1}, \infty), t)$$

при $\omega \to \infty$. *Тогда выполняется правило подстановки*

$$\left[\frac{\partial}{\partial z_k} \frac{\partial^{k-1}}{\partial z_1 \ldots \partial z_{k-1}} F\left(\varphi_0(\cdot) + \sum_{i=1}^{k+1} \varphi_i(\cdot) H(\cdot - z_i)\right)\right]_{z_{k+1} = z_k} =$$

$$= \frac{\varphi_k(z_k)}{\varphi_k(z_k) + \varphi_{k+1}(z_k)} \frac{\partial}{\partial z_k} \left[\frac{\partial^{k-1}}{\partial z_1 \ldots \partial z_{k-1}} F\left(\varphi_0(\cdot) + \sum_{i=1}^{k+1} \varphi_i(\cdot) H(\cdot - z_i)\right)\right]_{z_{k+1} = z_k}, \quad (9)$$

$$0 \le z_1 \le z_2 \le \ldots \le z_{k+1} \le 1, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Доказательство. В условиях леммы, полагая в предложении 1.9 из [14] $g = \Phi_k$, $f_2' = \varphi'$, с учетом непрерывно дифференцируемых приближений ступенчатых функций из [15] имеем

$$I_1 = \left[\frac{\partial}{\partial z_k} \frac{\partial^{k-1}}{\partial z_1 \ldots \partial z_{k-1}} F\left(\varphi_0(\cdot) + \sum_{i=1}^{k+1} \varphi_i(\cdot) H(\cdot - z_i)\right)\right]_{z_{k+1} = z_k} =$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial z_k} \frac{\partial^{k-1}}{\partial z_1 \ldots \partial z_{k-1}} \lim_{\omega \to \infty} F\left(\varphi_0(\cdot) + \sum_{i=1}^{k+1} \varphi_i(\cdot) H_\omega(\cdot - z_i)\right)\right]_{z_{k+1} = z_k} =$$

$$= \left[\lim_{\omega \to \infty} \frac{\partial}{\partial z_k} \Phi_k(\varphi(\cdot, z_1, \ldots, z_k, z_{k+1}, \omega))\right]_{z_{k+1} = z_k} =$$

$$= \left[\lim_{\omega \to \infty} \left(\Phi_k'(\varphi(\cdot, z_1, \ldots, z_k, z_{k+1}, \omega), t), \frac{\partial}{\partial z_k} \varphi(t, z_1, \ldots, z_k, z_{k+1}, \omega)\right)\right]_{z_{k+1} = z_k} =$$

$$= -\left[\lim_{\omega \to \infty} \left(\Phi_k'(\varphi(\cdot, z_1, \ldots, z_k, z_{k+1}, \omega), t), \varphi_k(t) \delta_\omega(t - z_k)\right)\right]_{z_{k+1} = z_k} =$$

$$= -\left[\lim_{\omega \to \infty} \int_0^1 \Phi_k'(\varphi(\cdot, z_1, \ldots, z_k, z_{k+1}, \omega), t) \varphi_k(t) \delta_\omega(t - z_k) dt\right]_{z_{k+1} = z_k}.$$

Поскольку $\Phi_k'(\ldots, \omega, t) \to \Phi_k'(\ldots, \infty, t)$ равномерно по t при $\omega \to \infty$, то, вычитая и прибавляя под знаком интеграла функцию $\Phi_k'(\ldots, \infty, t)$, получаем

$$I_1 = -\left[\lim_{\omega\to\infty}\int_0^1 \left(\Phi_k'(\varphi(\cdot, z_1, \ldots, z_k, z_{k+1}, \omega), t) - \right.\right.$$

$$- \left.\Phi_k'(\varphi(\cdot, z_1, \ldots, z_k, z_{k+1}, \infty), t)\right)\varphi_k(t)\delta_\omega(t-z_k)\,dt +$$

$$+ \left.\int_0^1 \Phi_k'(\varphi(\cdot, z_1, \ldots, z_k, z_{k+1}, \infty), t)\varphi_k(t)\delta_\omega(t-z_k)\,dt\right]_{z_{k+1}=z_k}.$$

Для первого интеграла при условии $\delta_\omega > 0$, что не является обременительным (см., например, [15]), с учетом равномерной сходимости $\Phi_k'(\ldots, \omega, t) \to \to \Phi_k'(\ldots, \infty, t)$ имеем

$$\left|\int_0^1 \left(\Phi_k'(\varphi(\cdot, z_1, \ldots, z_k, z_{k+1}, \omega), t) - \Phi_k'(\varphi(\cdot, z_1, \ldots, z_k, z_{k+1}, \infty), t)\right)\varphi_k(t)\delta_\omega(t-z_k)\,dt\right| \le$$

$$\le \int_0^1 \left|\Phi_k'(\varphi(\cdot, z_1, \ldots, z_k, z_{k+1}, \omega), t) - \Phi_k'(\varphi(\cdot, z_1, \ldots, z_k, z_{k+1}, \infty), t)\right|\left|\varphi_k(t)\right|\delta_\omega(t-z_k)\,dt \le$$

$$\le \varepsilon\int_0^1 |\varphi_k(t)|\delta_\omega(t-z_k)\,dt,$$

где $\varepsilon > 0$ может быть выбрано сколь угодно малым, а

$$\int_0^1 |\varphi_k(t)|\delta_\omega(t-z_k)\,dt \to |\varphi_k(z_k)| \quad \text{при} \quad \omega \to \infty.$$

Поэтому

$$I_1 = -\left[\lim_{\omega\to\infty}\int_0^1 \Phi_k'(\varphi(\cdot, z_1, \ldots, z_k, z_{k+1}, \infty), t)\varphi_k(t)\delta_\omega(t-z_k)\,dt\right]_{z_{k+1}=z_k} =$$

$$= -\left[\Phi_k'(\varphi(\cdot, z_1, \ldots, z_k, z_{k+1}, \infty), z_k)\varphi_k(z_k)\right]_{z_{k+1}=z_k} =$$

$$= -\Phi_k'(\varphi(\cdot, z_1, \ldots, z_k, z_k, \infty), z_k)\varphi_k(z_k). \tag{10}$$

С другой стороны,

$$I_2 = \frac{\partial}{\partial z_k}\left[\frac{\partial^{k-1}}{\partial z_1\ldots\partial z_{k-1}} F\left(\varphi_0(\cdot) + \sum_{i=1}^{k+1}\varphi_i(\cdot)H(\cdot - z_i)\right)\right]_{z_{k+1}=z_k} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial z_k}\left[\frac{\partial^{k-1}}{\partial z_1\ldots\partial z_{k-1}} \lim_{\omega\to\infty} F\left(\varphi_0(\cdot) + \sum_{i=1}^{k+1}\varphi_i(\cdot)H_\omega(\cdot - z_i)\right)\right]_{z_{k+1}=z_k} =$$

$$= \lim_{\omega\to\infty}\frac{\partial}{\partial z_k}\Phi_k(\varphi(\cdot, z_1, \ldots, z_k, z_k, \infty)) =$$

$$= \lim_{\omega\to\infty}\left(\Phi_k'(\varphi(\cdot, z_1, \ldots, z_k, z_k, \omega), t), \frac{\partial}{\partial z_k}\varphi(t, z_1, \ldots, z_k, z_k, \omega)\right) =$$

$$= -\lim_{\omega\to\infty}\left(\Phi_k'(\varphi(\cdot, z_1, \ldots, z_k, z_k, \omega), t), (\varphi_k(t) + \varphi_{k+1}(t))\delta_\omega(t-z_k)\right) =$$

$$= -\lim_{\omega\to\infty}\int_0^1 \Phi_k'(\varphi(\cdot, z_1, \ldots, z_k, z_k, \omega), t)(\varphi_k(t) + \varphi_{k+1}(t))\delta_\omega(t - z_k)dt.$$

Проводя такие же преобразования, как и при вычислении I_1, находим

$$I_2 = -\lim_{\omega\to\infty}\int_0^1 \Phi_k'(\varphi(\cdot, z_1, \ldots, z_k, z_k, \infty), t)(\varphi_k(t) + \varphi_{k+1}(t))\delta_\omega(t - z_k)dt =$$

$$= -\Phi_k'(\varphi(\cdot, z_1, \ldots, z_k, z_k, \omega), z_k)(\varphi_k(z_k) + \varphi_{k+1}(z_k)). \tag{11}$$

Сопоставляя соотношения (10), (11), получаем формулу (9). Лемма доказана.

***Замечание* 1.** Нетрудно показать, что в случае равенств $\varphi_1(t) = \varphi_2(t) = \ldots \ldots = \varphi_n(t)$ или, что то же самое, $x_{k+1}(t) - 2x_k(t) + x_{k-1}(t) = 0$, т. е. когда функционал $\Phi_k(\varphi(\cdot, z_1, z_2, \ldots, z_k, z_{k+1}))$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, можно рассматривать как симметричную функцию переменных $z_1, \ldots, z_{k+1}$, правило подстановки (9) будет всегда справедливым. Действительно, рассмотрим очевидное равенство

$$2\int_\xi^1\int_{z_k}^1 \frac{\partial^2}{\partial z_k \partial z_{k+1}}\Phi_k(\varphi(\cdot, z_1, z_2, \ldots, z_k, z_{k+1}))dz_{k+1}z_k =$$

$$= \int_\xi^1\int_\xi^1 \frac{\partial^2}{\partial z_k \partial z_{k+1}}\Phi_k(\varphi(\cdot, z_1, z_2, \ldots, z_k, z_{k+1}))dz_{k+1}z_k, \quad \xi \in (0, 1).$$

Раскрывая внутренние интегралы в этом равенстве, получаем

$$2\int_\xi^1 \left[\frac{\partial}{\partial z_k}\Phi_k(\varphi(\cdot, z_1, z_2, \ldots, z_k, z_{k+1}))\right]\Bigg|_{z_{k+1}=z_k}^{z_{k+1}=1} dz_k =$$

$$= \int_\xi^1 \left[\frac{\partial}{\partial z_k}\Phi_k(\varphi(\cdot, z_1, z_2, \ldots, z_k, z_{k+1}))dz_k\right]\Bigg|_{z_{k+1}=\xi}^{z_{k+1}=1}.$$

Далее, проводя несложные преобразования, имеем

$$2\int_\xi^1 \left[\frac{\partial}{\partial z_k}\Phi_k(\varphi(\cdot, z_1, z_2, \ldots, z_k, z_{k+1}))\right]\Bigg|_{z_{k+1}=z_k} dz_k =$$

$$= \int_\xi^1 \frac{\partial}{\partial z_k}\Phi_k(\varphi(\cdot, z_1, z_2, \ldots, z_k, z_k))dz_k,$$

откуда, ввиду произвольности ξ следует правило подстановки (9), если функции $\varphi_i(t)$, $i = 1, \ldots, n-1$, равны между собой. Еще раз отметим, что именно такая ситуация рассматривается в работе [11], где $\varphi_i(t) = h = \mathrm{const}$, $i = 1, \ldots, n$.

Покажем теперь, что при некоторых условиях формула подстановки (9) будет иметь место и в случае, когда функции φ_i, $i = 0, \ldots, k+1$, принадлежат пространству $\mathbb{Q}[0, 1]$, т. е. являются кусочно-непрерывными на $[0, 1]$ с конечным числом точек разрыва первого рода. Итак, пусть $\varphi_i(x) \in \mathbb{Q}[0, 1]$, а $\varphi_{i\omega}(x)$ — последовательность непрерывных на $[0, 1]$ функций таких, что $\varphi_{i\omega}(x) \to \varphi_i(x)$ при $\omega \to \infty$ (детально о построении $\varphi_{i\omega}(x)$ см. в [15]). Обозначим

$$\overline{\varphi}(t, z_1, \ldots, z_k, z_{k+1}, \omega) = \varphi_{0\omega}(t) + \sum_{i=1}^{k+1} \varphi_{i\omega}(t) H(t - z_i).$$

Лемма 2. *Пусть выполнены условия леммы* 1 *и функции*

$$\frac{\partial}{\partial z_k} \Phi_k(\overline{\varphi}(t, z_1, \ldots, z_k, z_{k+1}, \omega)),$$

$$\frac{\partial}{\partial z_k} \Phi_k(\overline{\varphi}(t, z_1, \ldots, z_k, z_k, \omega))$$

равномерно сходятся по z_k *при* $\omega \to \infty$. *Тогда справедливо правило подстановки* (9), *где* $\varphi_i(x) \in \mathbb{Q}[0, 1]$, $i = 0, 1, \ldots, k+1$.

Доказательство легко получить из формулы (9), заменив в ней φ_i на $\varphi_{i\omega}$ и в условиях леммы переходя к пределу в левой и правой частях при $\omega \to \infty$; под значением функций $\varphi_k(x)$, $\varphi_{k+1}(x)$ в точке разрыва будем понимать полусумму левостороннего и правостороннего пределов.

Примеры. Пусть $F(x) = \int_0^1 x^2(t)dt$. Тогда нетрудно показать, что при $u \le v$

$$\left[\frac{\partial}{\partial u} F(\varphi_0(\cdot) + \varphi_1(\cdot)H(\cdot - u) + \varphi_2(\cdot)H(\cdot - v))\right]_{v=u} = -\,2\varphi_0(u)\varphi_1(u) - \varphi_1^2(u),$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[F(\varphi_0(\cdot) + \varphi_1(\cdot)H(\cdot - u) + \varphi_2(\cdot)H(\cdot - v))\right]_{v=u} =$$

$$= -\,2\varphi_0(u)[\varphi_1(u) + \varphi_2(u)] - [\varphi_1(u) + \varphi_2(u)]^2$$

и правило подстановки

$$\left[\frac{\partial}{\partial u} F(\varphi_0(\cdot) + \varphi_1(\cdot)H(\cdot - u) + \varphi_2(\cdot)H(\cdot - v))\right]_{v=u} =$$

$$= \frac{\varphi_1(u)}{\varphi_1(u) + \varphi_2(u)} \frac{\partial}{\partial u}\left[F(\varphi_0(\cdot) + \varphi_1(\cdot)H(\cdot - u) + \varphi_2(\cdot)H(\cdot - v))\right]_{v=u}$$

не выполняется. Для функционала же $F(x) = \left(\int_0^1 x(t)dt\right)^2$, как нетрудно убедиться, это правило имеет место.

В дальнейшем изложении будем полагать, что все функции x_i, $i = 0, 1, \ldots$ $\ldots, n$, принадлежат пространству $\mathbb{Q}[0, 1]$. Рассмотрим m-е слагаемое в правой части (5) как интегральный оператор с ядром (7) при $p = m$ и покажем, что этот оператор является оператором разделенной разности порядка m для функционала F, зависящим от фиксированных функций-узлов $x_0, x_1, \ldots, x_m$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия леммы* 2,

$$F[x_0; x_1; \ldots; x_m]h_{m-1}\ldots h_0 =$$

$$= (-1)^m \int_0^1 \int_{z_1}^1 \ldots \int_{z_{m-1}}^1 [(x_1(z_1) - x_0(z_1)) \ldots (x_m(z_m) - x_{m-1}(z_m))]^{-1} \times$$

$$\times \frac{\partial^m}{\partial z_1 \ldots \partial z_m} F(\overline{x}_m(\cdot)) h_0(z_1) \ldots h_{m-1}(z_m) dz_m \ldots dz_1. \qquad (12)$$

Тогда $F[x_0; x_1; \ldots; x_m]$ — m*-линейный оператор, удовлетворяющий условию*

$$F[x_0; x_1; \ldots; x_{m-1}; x_m](x_m - x_{m-1})h_{m-2}\ldots h_0 =$$

$$= \{F[x_0;x_1;\ldots;x_{m-2};x_m] - F[x_0;x_1;\ldots;x_{m-2};x_{m-1};]\} h_{m-2}h_{m-1}\ldots h_0$$
$$\forall\, h_0, h_1, \ldots, h_{m-2} \in \mathbb{Q}[0,1],$$

т. е. является оператором разделенной разности порядка m для функционала F.

Доказательство. Для $m = 1$ имеем

$$F[x_0;x_1](x_1 - x_0) = (-1)^1 \int_0^1 [(x_1(z_1) - x_0(z_1))]^{-1} \times$$
$$\times \frac{\partial}{\partial z_1} F(x_0(\cdot) + (x_1(\cdot) - x_0(\cdot))H(\cdot - z_1))(x_1(z_1) - x_0(z_1))dz_1 =$$
$$= -\int_0^1 \frac{\partial}{\partial z_1} F(x_0(\cdot) + (x_1(\cdot) - x_0(\cdot))H(\cdot - z_1))dz_1 = F(x_1(\cdot)) - F(x_0(\cdot)).$$

Для произвольного m с учетом леммы 2 (правила подстановки) получим

$$F[x_0;x_1;\ldots;x_{m-1};x_m](x_m - x_{m-1})h_{m-2}\ldots h_0 =$$
$$= (-1)^m \int_0^1 \int_{z_1}^1 \ldots \int_{z_{m-1}}^1 [(x_1(z_1) - x_0(z_1))\ldots(x_m(z_m) - x_{m-1}(z_m))]^{-1} \times$$
$$\times \frac{\partial^m}{\partial z_1 \ldots \partial z_m} F(\bar{x}_m(\cdot))h_0(z_1)\ldots h_{m-2}(z_{m-1})(x_m(z_m) - x_{m-1}(z_m))dz_m \ldots dz_1 =$$
$$= (-1)^m \int_0^1 \int_{z_1}^1 \ldots \int_{z_{m-1}}^1 [(x_1(z_1) - x_0(z_1))\ldots(x_{m-1}(z_{m-1}) - x_{m-2}(z_{m-1}))]^{-1} \times$$
$$\times \frac{\partial^m}{\partial z_1 \ldots \partial z_m} F\left(x_0(\cdot) + \sum_{i=1}^m (x_i(\cdot) - x_{i-1}(\cdot))H(\cdot - z_i)\right) h_0(z_1)h_1(z_2)\ldots h_{m-2}(z_{m-1})dz_m \ldots dz_1 =$$
$$= (-1)^m \int_0^1 \int_{z_1}^1 \ldots \int_{z_{m-2}}^1 [(x_1(z_1) - x_0(z_1))\ldots(x_{m-1}(z_{m-1}) - x_{m-2}(z_{m-1}))]^{-1} \times$$
$$\times \frac{\partial^{m-1}}{\partial z_1 \ldots \partial z_{m-1}} F\left(x_0(\cdot) + \sum_{i=1}^m (x_i(\cdot) - x_{i-1}(\cdot))H(\cdot - z_i)\right)\Bigg|_{z_{m-1}}^1 \times$$
$$\times\; h_0(z_1)h_1(z_2)\ldots h_{m-2}(z_{m-1})dz_{m-1}\ldots dz_1 =$$
$$= (-1)^m \int_0^1 \int_{z_1}^1 \ldots \int_{z_{m-2}}^1 [(x_1(z_1) - x_0(z_1))\ldots(x_{m-1}(z_{m-1}) - x_{m-2}(z_{m-1}))]^{-1} \times$$
$$\times \frac{\partial^{m-1}}{\partial z_1 \ldots \partial z_{m-1}} F(\bar{x}_{m-1}(\cdot))h_0(z_1)h_1(z_2)\ldots h_{m-2}(z_{m-1})dz_{m-1}\ldots dz_1 -$$
$$- (-1)^m \int_0^1 \int_{z_1}^1 \ldots \int_{z_{m-2}}^1 [(x_1(z_1) - x_0(z_1))\ldots(x_{m-1}(z_{m-1}) - x_{m-2}(z_{m-1}))]^{-1} \times$$
$$\times \frac{x_{m-1}(z_{m-1}) - x_{m-2}(z_{m-1})}{x_m(z_{m-1}) - x_{m-2}(z_{m-1})} \frac{\partial^{m-1}}{\partial z_1 \ldots \partial z_{m-1}} \times$$

$$\times\ F\left(x_0(\cdot)+\sum_{i=1}^{m-2}(x_i(\cdot)-x_{i-1}(\cdot))H(\cdot-z_i)+(x_m(\cdot)-x_{m-2}(\cdot))H(\cdot-z_{m-1})\right)\times$$

$$\times\ h_0(z_1)h_1(z_2)\ldots h_{m-2}(z_{m-1})dz_{m-1}\ldots dz_1\ =$$

$$=\ -\ F[x_0;x_1;\ldots;x_{m-1}]h_{m-2}h_{m-3}\ldots h_0\ +\ F[x_0;x_1;\ldots;x_{m-2};x_m]h_{m-2}h_{m-3}\ldots h_0\ =$$

$$=\ \{F[x_0;x_1;\ldots;x_{m-2};x_m]-F[x_0;x_1;\ldots;x_{m-2};x_{m-1}]\}h_{m-2}h_{m-3}\ldots h_0 \tag{13}$$

$$\forall\ h_0,h_1,\ldots,h_{m-2}\in\ \mathbb{Q}[0,1],$$

что и доказывает теорему.

Таким образом, полином (5) с ядрами, определяемыми соотношениями (7), можно рассматривать как интерполяционный операторный полином типа Ньютона, построенный по узлам $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Пусть теперь функционал F такой, что смешанная производная

$$\frac{\partial^{n+1}}{\partial z_1\ldots\partial z_{n+1}}F\left(\varphi_0(\cdot)+\sum_{i=1}^{n+1}\varphi_i(\cdot)H(\cdot-z_i)\right)$$

есть непрерывная функция переменных $z_1, \ldots, z_{n+1}$ при $0\le z_1\le\ldots\le z_{n+1}$ и, кроме того, в условиях лемм 1, 2 $k=1,2,\ldots,n$. Тогда согласно (12), (13) остаточный член интерполяционной формулы (5), (7) можно представить в виде

$$R_{n+1}(F;x)\ =\ F[x_0;x_1;\ldots;x_n;x](x-x_n)\ldots(x-x_0)\ =$$

$$=\ (-1)^{n+1}\int_0^1\int_{z_1}^1\ldots\int_{z_n}^1[(x_1(z_1)-x_0(z_1))\ldots(x_n(z_n)-x_{n-1}(z_n))(x(z_{n+1})-x_n(z_{n+1}))]^{-1}\times$$

$$\times\ \frac{\partial^{n+1}}{\partial z_1\ldots\partial z_{n+1}}F\left(x_0(\cdot)+\sum_{i=1}^{n}(x_i(\cdot)-x_{i-1}(\cdot))H(\cdot-z_i)+(x(\cdot)-x_n(\cdot))H(\cdot-z_{n+1})\right)\times$$

$$\times\ (x(z_1)-x_0(z_1))\ldots(x(z_{n+1})-x_n(z_{n+1}))dz_{n+1}dz_n\ldots dz_1\ =$$

$$=\ (-1)^{n+1}\int_0^1\int_{z_1}^1\ldots\int_{z_n}^1[(x_1(z_1)-x_0(z_1))\ldots(x_n(z_n)-x_{n-1}(z_n))]^{-1}\times$$

$$\times\ \frac{\partial^{n+1}}{\partial z_1\ldots\partial z_{n+1}}F\left(x_0(\cdot)+\sum_{i=1}^{n}(x_i(\cdot)-x_{i-1}(\cdot))H(\cdot-z_i)+(x(\cdot)-x_n(\cdot))H(\cdot-z_{n+1})\right)\times$$

$$\times\ (x(z_1)-x_0(z_1))\ldots(x(z_n)-x_{n-1}(z_n))dz_{n+1}dz_n\ldots dz_1. \tag{14}$$

На основании изложенного выше сформулируем следующий результат.

Теорема 2. *В условиях леммы 2 на пространстве функций* $\mathbb{Q}[0,1]$ *имеет место представление*

$$F(x)\ =\ P_n^I(x)\ +\ R_{n+1}(F;x),$$

где полином $P_n^I(x)$ *определяется формулами* (5), (7), *а* R_{n+1} — *соотношением* (14).

Доказательство следует непосредственно из теоремы 1, если учесть, что слагаемые полинома $P_n^I(x)$ и остаточный член $R_{n+1}(F;x)$ можно рассматривать как операторные разделенные разности, построенные по узлам (x_0), (x_0, x_1), (x_0, x_1, x_2), $\ldots$, $(x_0, x_1, \ldots, x_n, x)$.

Как было показано выше, полином типа Ньютона $P_n^I(x)$ является интерполяционным для функционала $F(x)$ с узлами интерполяции $x_i \in \mathbb{Q}[0,1]$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Использовав вид остаточного члена $R_{n+1}(F;x)$, определяемого равенством (14), докажем справедливость следующего более сильного утверждения.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия леммы* 2. *Тогда узлами интерполяции полинома* $P_n^I(x)$ *являются все элементы континуального множества* (1), *где* $x_i \in \mathbb{Q}[0,1]$.

Доказательство. Рассмотрим остаточный член интерполяционной формулы (5), (7) в точке $\bar{x}_n$. Имеем

$$R_{n+1}(F;\bar{x}_n(\cdot)) = (-1)^{n+1}\int_0^1\int_{z_1}^1\ldots\int_{z_n}^1 [(x_1(z_1)-x_0(z_1))\ldots(x_n(z_n)-x_{n-1}(z_n))]^{-1}\times$$

$$\times\frac{\partial^{n+1}}{\partial z_1\ldots\partial z_{n+1}}F\left(x_0(\cdot)+\sum_{i=1}^n(x_i(\cdot)-x_{i-1}(\cdot))H(\cdot-z_i)+(\bar{x}_n(\cdot)-x_n(\cdot))H(\cdot-z_{n+1})\right)\times$$

$$\times(\bar{x}_n(z_1)-x_0(z_1))\ldots(\bar{x}_n(z_n)-x_{n-1}(z_n))dz_{n+1}dz_n\ldots dz_1 =$$

$$= (-1)^{n+1}\int_{\xi_1}^1\int_{\xi_2}^1\ldots\int_{\xi_n}^1\int_{z_n}^1 [(x_1(z_1)-x_0(z_1))\ldots(x_n(z_n)-x_{n-1}(z_n))]^{-1}\times$$

$$\times\frac{\partial^{n+1}}{\partial z_1\ldots\partial z_{n+1}}F\left(x_0(\cdot)+\sum_{i=1}^n(x_i(\cdot)-x_{i-1}(\cdot))H(\cdot-z_i)+(\bar{x}_n(\cdot)-x_n(\cdot))H(\cdot-z_{n+1})\right)\times$$

$$\times(\bar{x}_n(z_1)-x_0(z_1))\ldots(\bar{x}_n(z_n)-x_{n-1}(z_n))dz_{n+1}dz_n\ldots dz_1. \tag{15}$$

Рассмотрим выражение

$$(\bar{x}_n(t)-x_n(t))H(t-z_{n+1}) =$$

$$= \left\{x_0(\cdot)+\sum_{i=1}^n(x_i(t)-x_{i-1}(t))H(t-\xi_i)-x_n(t)\right\}H(t-z_{n+1}).$$

Поскольку $H(t-\xi_i)H(t-z_{n+1}) = H(t-z_{n+1})$ при $\xi_1\le\xi_2\le\ldots\le\xi_n\le z_{n+1}$, то

$$(\bar{x}_n(t)-x_n(t))H(t-z_{n+1}) = 0.$$

Следовательно, $R_{n+1}(F;\bar{x}_n(\cdot)) = 0$, так как частная производная по z_{n+1} в формуле (15) от функции, которая не содержит эту переменную, равна нулю. Теорема доказана.

Замечание 2. Узлы интерполяции $x_0, x_1, \ldots, x_n$ являются элементами континуального множества $\bar{x}_n(t,\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$ при соответствующем выборе параметров ξ_i: $x_k=\bar{x}_n$ при $\xi_1=\xi_2=\ldots=\xi_k=0$, $\xi_{k+1}=\ldots=\xi_n=1$, $k=0, 1, 2, \ldots, n$.

Отметим два важных свойства интерполяционного операторного полинома типа Ньютона (5), (7).

Теорема 4. *Пусть выполнены условия леммы* 2. *Тогда полином вида* (5), (7) *является единственным среди всех интерполяционных полиномов из* Π_n *на континуальных узлах и сохраняет полиномы степени не выше* n.

Доказательство. Покажем единственность. Действительно, пусть существует другой полином $P_{n_0}^I \in \Pi_n$ вида (3), который интерполирует функционал F на континуальном множестве узлов (1). Как отмечалось выше, он может быть приведен к виду (5) с некоторыми фиксированными ядрами $\bar{K}_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Поскольку

$$P_{n_0}^I(\bar{x}_k(\cdot,\xi_1,\ldots,\xi_k)) = F(\bar{x}_k(\cdot,\xi_1,\ldots,\xi_k)),$$

то

$$\frac{\partial^k}{\partial\xi_1\ldots\partial\xi_k} P_{n_0}^I(\bar{x}_k(\cdot,\xi_1,\ldots,\xi_k)) = \frac{\partial^k}{\partial\xi_1\ldots\partial\xi_k} F(\bar{x}_k(\cdot,\xi_1,\ldots,\xi_k)), \qquad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Тогда согласно (7) получаем $K_i = \overline{K}_i$, т. е. ядра полиномов P_n^I и $P_{n_0}^I$ совпадают и, значит, совпадают сами полиномы. Покажем теперь, что полином P_n^I имеет свойство сохранения полиномов степени меньшей или равной n. Пусть P_m — некоторый полином из Π_n вида (3) и $m \le n$. Рассмотрим $R_{n+1}(P_m;x)$. Нетрудно видеть, что

$$\frac{\partial^{n+1}}{\partial z_1\ldots\partial z_{n+1}} P_m\left(x_0(\cdot) + \sum_{i=1}^{n}(x_i(\cdot) - x_{i-1}(\cdot))\right)H(\cdot - z_i) + (x(\cdot) - x_n(\cdot))H(\cdot - z_{n+1}) = 0$$

$$\forall\, m \le n.$$

Учитывая это, из (14) получаем $R_{n+1}(P_m;x) = 0 \quad \forall\, m \le n$, т. е. интерполяционная формула типа Ньютона (5), (7) точна на всех полиномах степени меньшей или равной n.

1. *Prenter P. M.* Lagrange and Hermite interpolation in Banach spaces // Approxim. Theory. – 1971. – **4**, № 4. – P. 419 – 432.
2. *Porter W. A.* Data interpolation: causality structure and system identification // Inform. and Contr. – 1975. – **29**, № 3. – P. 217 – 233.
3. *Егоров А. Д., Соболевский П. И., Янович Л. А.* Приближенные методы вычисления континуальных интегралов. – Минск: Наука и техника, 1985. – 310 с.
4. *Макаров В. Л., Хлобыстов В. В.* Об общей структуре полиномиальных функциональных интерполянтов // Докл. АН СССР. – 1991. – **318**, № 4. – С. 805 – 808.
5. *Макаров В. Л., Хлобыстов В. В.* Полиномиальное интерполирование нелинейных функционалов // Там же. – 1991. – **321**. – С. 470 – 473.
6. *Макаров В. Л., Хлобыстов В. В.* Полиномиальное интерполирование операторов в гильбертовых пространствах // Докл. АН России. – 1992. – **324**, № 4. – С. 742 – 745.
7. *Макаров В. Л., Хлобыстов В. В.* Эрмитова интерполяция операторов в гильбертовых пространствах // Там же. – 1992. – **327**, № 2. – С. 183 – 186.
8. *Макаров В. Л., Хлобыстов В. В.* Полиномиальное интерполирование операторов в векторных пространствах // Там же. – 1993. – **329**, № 2. – С. 135 – 139.
9. *Макаров В. Л., Хлобыстов В. В.* Основы теории полиномиального операторного интерполирования. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1998. – 278 с.
10. *Макаров В. Л., Хлобыстов В. В., Янович Л. А.* Интерполирование операторов. – Киев: Наук. думка, 2000. – 406 с.
11. *Макаров В. Л., Хлобыстов В. В.* Интерполяционная формула типа Ньютона для нелинейных функционалов // Докл. АН СССР. – 1989. – **307**, № 3. – С. 534 – 537.
12. *Porter W. A.* Synthesis of polynomic system // SIAM J. Math. Anal. – 1980. – **11**, № 2. – P. 308 – 315.
13. *Пупков К. И., Капалин В. И., Ющенко А. С.* Функциональные ряды в теории нелинейных систем. – М.: Наука, 1976. – 448 с.
14. *Авербух В. И., Смолянов О. Г.* Теория дифференцирования в линейных топологических пространствах // Успехи мат. наук. – 1967. – **22**, № 6. – С. 201 – 260.
15. *Антосик П., Микусинский Я., Сикорский Р.* Теория обобщенных функций. Секвенциальный подход. – М.: Мир, 1976. – 311 с.

Получено 08.01.2002