УДК 517.956

И. В. Скрыпник, Ю. В. Намлеева
(Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

СХОДИМОСТЬ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ДИРИХЛЕ В ОБЛАСТЯХ С МЕЛКОЗЕРНИСТОЙ ГРАНИЦЕЙ*

We study the behavior of eigenvalues and eigenfunctions of the Dirichlet problem for nonlinear elliptic second order equations in domains with a finely granulated boundary.

Вивчається поведінка власних значень та власних функцій задачі Діріхле для нелінійних еліптичних рівнянь другого порядку в областях з дрібнозернистою межею.

Настоящая работа посвящена изучению сходимости собственных значений нелинейных задач Дирихле в последовательности областей с мелкозернистой границей. Усреднение линейных задач в таких областях изучалось многими авторами, начиная с В. А. Марченко и Е. Я. Хруслова [1]. Линейные задачи на собственные значения в перфорированных областях также хорошо изучены (см., например, [2, 3]). Для нелинейных уравнений задача Дирихле в перфорированных областях рассматривалась в [4 – 6]. Отметим также работы [7 – 10], в которых изучались нелинейные задачи на собственные значения в фиксированной области.

1. Формулировка условий и результатов. Пусть $\Omega_s = \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{I(s)} F_i^{(s)}$, где $\Omega \subset R^n$ — произвольная ограниченная область, и при каждом натуральном значении s определено конечное число непересекающихся замкнутых множеств $F_i^{(s)}$, $i = \overline{1, I(s)}$, содержащихся в Ω. Обозначим через $d_i^{(s)}$ нижнюю грань радиусов шаров, содержащих $F_i^{(s)}$, $x_i^{(s)}$ — центр такого шара радиуса $d_i^{(s)}$, что $F_i^{(s)} \subset \overline{B\big(x_i^{(s)}, d_i^{(s)}\big)}$. Пусть $r_i^{(s)} = \operatorname{dist}\Big\{ B\big(x_i^{(s)}, d_i^{(s)}\big), \bigcup_{j \neq i} B\big(x_j^{(s)}, d_j^{(s)}\big) \cup \partial\Omega \Big\}$. Будем предполагать, что выполнены условия:

B_1) $d_i^{(s)} \le C_0 r_i^{(s)}$, C_0 — не зависящая от i, s постоянная,

$$\lim_{s\to\infty} \max_{1 \le i \le I(s)} r_i^{(s)} = 0;$$

B_2) для некоторой непрерывной неубывающей функции $\alpha : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, удовлетворяющей условиям $\alpha(0) = 0$, $\alpha(t)/t \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty$, выполнено неравенство

$$\sum_{i=1}^{I(s)} C_m\big(F_i^{(s)}\big) \left\{ \frac{C_m\big(F_i^{(s)}\big) + \alpha^{n-1}\big(d_i^{(s)}\big)}{\big(r_i^{(s)}\big)^n} \right\}^{1/(m-1)} \le C_1 .$$

Здесь и далее все постоянные C_j, $j = 0, 1, \ldots,$ положительные и не зависят от s, $C_m(E)$ — m-емкость множества $E \subset B(x_0, 1/2)$, т. е.

$$C_m(E) = \inf_{\varphi \in V(E)} \int\limits_{B(x_0,1)} |\nabla\varphi|^m dx,$$

где $V(E) = \{ \varphi(x) \in C_0^\infty(B(x_0, 1)) : \varphi(x) = 1,\ x \in E \}$.

Рассмотрим функционалы

---

* Частично поддержана Государственным фондом фундаментальных исследований (проект 01.07/00252).

© И. В. СКРЫПНИК, Ю. В. НАМЛЕЕВА, 2003

$$\Phi_s : \overset{0}{W}{}^1_m(\Omega_s) \times \overset{0}{W}{}^1_m(\Omega_s) \to R^1, \quad G_s : \overset{0}{W}{}^1_m(\Omega_s) \to R^1,$$

$$\Phi_s(u, v) = \int_{\Omega_s} f(x, v(x), \nabla u(x))dx, \quad G_s(u) = \int_{\Omega_s} g(x, u(x))dx.$$

Обозначим

$$f_i(x, u, p) = \frac{\partial f(x, u, p)}{\partial p_i}, \quad f_0(x, u, p) = \frac{\partial f(x, u, p)}{\partial u},$$

$$g_0(x, u) = \frac{\partial g(x, u)}{\partial u}.$$

Пусть функции $f(x, u, p)$, $g(x, u)$ удовлетворяют следующим условиям:

A_1) функции $f(x, u, p)$, $g(x, u)$ измеримы по x для любых $u \in R^1$, $p \in R^n$ и из класса C^1 по u, p при п. в. $x \in \Omega$;

A_2) существуют положительные постоянные C_2, C_3, C_4 такие, что при $2 \le m < n$, $m \le m_1 < nm/(n-m)$, $i = 1, \dots, n$ и при всех значениях $x \in \Omega$, p, $q \in R^n$, $u, v \in R^1$ выполнены неравенства

$$|f_i(x, u, p) - f_i(x, v, q)| \le$$

$$\le C_2\left(1 + |u|^{m_1} + |v|^{m_1} + |p|^m + |q|^m\right)^{(m-2)/m}(|p-q| + |u-v|),$$

$$|f_0(x, u, p)| \le C_2\left(|u|^{m_1} + |p|^m\right)^{(m_1-1)/m_1} + \varphi(x),$$

$$f_0(x, u, p)u \ge -(C_3 - C_4)|p|^m - \varphi(x)(1 + |u|),$$

$$|g_0(x, u)| \le C_2|u|^{m_1-1},$$

где $\varphi(x) \in L_{r_1}(\Omega)$, $r_1 > n/m$, кроме того, пусть $f_i(x, u, 0) = 0$ при $x \in \Omega$, $u \in R^1$, $i = 1, \dots, n$;

A_3) $\forall x \in \overline{\Omega}$ $\forall p, q \in R^n$ $\forall u \in R^1$:

$$\sum_{i=1}^{n} (f_i(x, u, p) - f_i(x, u, q))(p_i - q_i) \ge$$

$$\ge C_3(1 + |p| + |q|)^{m-2}|p-q|^2;$$

A_4) $\forall x \in \overline{\Omega}$ $\forall u \in R^1$:

$$g(x, 0) = 0, \quad f_0(x, 0, 0) = g_0(x, 0) = 0, \quad g_0(x, u)u > 0, \quad u \ne 0.$$

В области Ω_s рассмотрим задачу на собственные значения

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dx_j} f_j(x, u_s(x), \nabla u_s(x)) - f_0(x, u_s(x), \nabla u_s(x)) =$$

$$= \lambda_s g_0(x, u_s(x)), \quad x \in \Omega_s, \tag{1}$$

$$u_s(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega_s. \tag{2}$$

Для формулировки еще одного условия на множества $F_i^{(s)}$, обеспечивающего возможность построения усредненной задачи, нужны вспомогательные функции $v_i^{(s)}(x,k)$. Пусть $\psi_0(x) \in C_0^\infty(B(0,1))$ такая, что $\psi_0(x) = 1$, $x \in B(0, 1/2)$. Для произвольного вещественного k при $d_i^{(s)} < 1/2$ обозначим через $v_i^{(s)}(x,k)$ функцию, принадлежащую пространству $k\psi_0\left(x - x_i^{(s)}\right) + \overset{0}{W}{}_m^1\left(\Omega_i^{(s)}\right)$ и удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\sum_{j=1}^{n} \int\limits_{\Omega_i^{(s)}} f_j\left(x, 0, \nabla v_i^{(s)}(x)\right) \frac{\partial \psi(x)}{\partial x_j} dx = 0 \quad \forall\, \psi(x) \in \overset{0}{W}{}_m^1\left(\Omega_i^{(s)}\right),$$

$$\Omega_i^{(s)} = B\left(x_i^{(s)}, 1\right) \setminus F_i^{(s)} = B_i^{(s)} \setminus F_i^{(s)}. \tag{3}$$

Существование и однозначность определения функции $v_i^{(s)}(x,k)$ доказаны в [4]. Вне $\Omega_i^{(s)}$ полагаем $v_i^{(s)}(x,k) = k\psi_0\left(x - x_i^{(s)}\right)$.

Будем предполагать, что выполнено условие

C) существует непрерывная по x для любых $u \in R^1$ и класса C^1 по u при почти всех $x \in \Omega$ функция $c(x,u)$ такая, что для любого шара $B \subset \Omega$ выполнено равенство

$$\lim_{s\to\infty} \sum_{i \in I_s(B)} \sum_{j=1}^{n} \int\limits_0^u \frac{1}{\mu} \int\limits_\Omega f_j\left(x, 0, \nabla v_i^{(s)}(x,\mu)\right) \frac{\partial v_i^{(s)}(x,\mu)}{\partial x_j} dx\, d\mu =$$

$$= \int\limits_B c(x,u)\, dx,$$

причем стремление к пределу является равномерным по u на любом ограниченном интервале изменения u.

Определим функционалы $\Phi: \overset{0}{W}{}_m^1(\Omega) \times \overset{0}{W}{}_m^1(\Omega) \to R^1$, $G: \overset{0}{W}{}_m^1(\Omega) \to R^1$, $C: \overset{0}{W}{}_m^1(\Omega) \to R^1$, где

$$\Phi(u,v) = \int\limits_\Omega f(x, v(x), \nabla u(x))\, dx, \qquad G(u) = \int\limits_\Omega g(x, u(x))\, dx,$$

$$C(u) = \int\limits_\Omega c(x, u(x))\, dx.$$

Кроме того, обозначим

$$F_c(u) = \Phi(u,u) + C(-u), \qquad c_0(x,u) = \frac{\partial c(x,u)}{\partial u},$$

$$M(G) = \left\{ u(x) \in \overset{0}{W}{}_m^1(\Omega) \colon G(u) = 1 \right\},$$

$$M_s(G_s) = \left\{ u_s(x) \in \overset{0}{W}{}_m^1(\Omega_s) \colon G_s(u_s) = 1 \right\}.$$

Рассмотрим предельную задачу на собственные значения

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dx_j} f_j(x, u(x), \nabla u(x)) - f_0(x, u(x), \nabla u(x)) + c_0(x, -u(x)) =$$

$$= \lambda g_0(x, u(x)), \qquad x \in \Omega, \tag{4}$$

$$u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \tag{5}$$

Основным результатом данной статьи является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $\lambda_s = \min\limits_{v_s \in M_s(G_s)} F(v_s) = F(u_s)$ *— собственное значение задачи* (1), (2), $\lambda = \min\limits_{u \in M(G)} F_c(u) = F_c(\tilde{u})$ *— собственное значение задачи* (4), (5), $u_s(x)$ *и* $\tilde{u}(x)$ *— соответствующие собственные функции. Пусть выполнены условия* $B_1), B_2), A_1) - A_4), C)$. *Тогда* $\lim_{s\to\infty} \lambda_s = \lambda$, *и последовательность* $\{u_s(x)\}_{s=1}^{\infty}$ *при* $s \to \infty$ *сходится к* $\tilde{u}(x)$ *сильно в* $W_r^1(\Omega)$ *для любого* $r < m$ *и слабо в* $W_m^1(\Omega)$.

2. Оценки решений модельной задачи. В работах [4, 6] для функции $v_i^{(s)}(x,k)$ были доказаны следующие леммы.

Лемма 1 (теорема 2.2 [4]). *Пусть выполнены условия* $A_1) - A_3)$ *и* $|k| \le N$. *Тогда существует постоянная* C_5, *зависящая только от* n, m, N, *такая, что при* $1 \le i \le I(s)$, $s = 1, 2, \ldots$, *выполнены неравенства*

$$\left\| v_i^{(s)} \right\|^2_{W_2^1(B_i^{(s)})} + \left\| v_i^{(s)} \right\|^m_{W_m^1(B_i^{(s)})} \le$$

$$\le C_5 \left\{ |k|^m C_m\left(F_i^{(s)}\right) \right\}^{2/m} \left\{ |k|^m C_m\left(F_i^{(s)}\right) + \left(d_i^{(s)}\right)^n \right\}^{(m-2)/m},$$

$$\left\| \nabla \bar{v}_i^{(s)} - \nabla \tilde{v}_i^{(s)} \right\|^2_{L_2(B_i^{(s)})} + \left\| \nabla \bar{v}_i^{(s)} - \nabla \tilde{v}_i^{(s)} \right\|^2_{L_m(B_i^{(s)})} \le$$

$$\le C_5 \left| \bar{k} - \tilde{k} \right|^2 \left\{ C_m\left(F_i^{(s)}\right) \right\}^{2/m} \left\{ C_m\left(F_i^{(s)}\right) + \left(d_i^{(s)}\right)^n \right\}^{(m-2)/m},$$

где $\bar{v}_i^{(s)} = v_i^{(s)}(x, \bar{k})$, $\tilde{v}_i^{(s)} = v_i^{(s)}(x, \tilde{k})$, $|\bar{k}| \le N$, $|\tilde{k}| \le N$,

$$\left| v_i^{(s)}(x,k) \right| \le C_5 |k| \left(\frac{C_m\left(F_i^{(s)}\right)}{\left| x - x_i^{(s)} \right|^{n-m}} \right)^{1/(m-1)}, \quad x \in B_i^{(s)} \setminus B\left(x_i^{(s)}, d_i^{(s)}\right).$$

Лемма 2. *Пусть выполнены условия* $A_1) - A_3)$. *Тогда существует постоянная* C_6, *зависящая только от* n, m, *такая, что выполнено неравенство*

$$\left| v_i^{(s)}(x,k) \right| \ge C_6 |k| \left(\frac{C_m\left(F_i^{(s)}\right)}{\left| x - x_i^{(s)} \right|^{n-m}} \right)^{1/(m-1)}, \quad x \in B_i^{(s)} \setminus B\left(x_i^{(s)}, d_i^{(s)}\right).$$

Доказательство. Обозначим $d_i^{(s)} = d$, $F_i^{(s)} = F$, $v_i^{(s)}(x,k) = v(x,k)$, $x_i^{(s)} = x_0$. Подставляя в интегральное тождество (3) для решения модельной задачи пробную функцию $\psi(x) = [k - v(x,k)]\eta^m(x)$, где

$$\eta(x) = \begin{cases} 1, & x \in B(x_0, \rho); \\ 0, & x \notin B(x_0, 2\rho), \end{cases} \quad \text{при} \quad 2d \le \rho < 1,$$

получаем

$$\sum_{j=1}^{n} \int\limits_{B(x_0,1)\setminus F} f_j(x, 0, \nabla v(x,k)) \frac{\partial v(x,k)}{\partial x_j} \eta^m(x)\, dx \le$$

$$\le m \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{B(x_0,1)\setminus F} [k - v(x,k)] f_j(x, 0, \nabla v(x,k)) \frac{\partial \eta(x)}{\partial x_j} \eta^{m-1}(x)\, dx.$$

Используем теперь условия A_2), A_3) и неравенство Гельдера. Считаем, что постоянная $\sigma < (m-1)/m$:

$$\int\limits_{B(x_0,1)\setminus F} (1+|\nabla v(x,k)|)^{m-2}|\nabla v(x,k)|^2\eta^m(x)\,dx \le$$

$$\le \frac{C_7 k}{\rho}\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{B(x_0,2\rho)\setminus B(x_0,\rho)}\left|f_j(x,0,\nabla v(x,k))\right|dx \le$$

$$\le C_7 C_2\frac{kn}{\rho}\int\limits_{B(x_0,2\rho)\setminus B(x_0,\rho)}\left(1+|\nabla v(x,k)|^m\right)^{(m-2)/m}|\nabla v(x,k)|\,dx \le$$

$$\le \frac{C_8 k}{\rho}\left(\int\limits_{B(x_0,2\rho)\setminus B(x_0,\rho)}(1+|\nabla v(x,k)|)^m|v(x,k)|^{-\sigma m/(m-1)}\,dx\right)^{(m-1)/m}\times$$

$$\times\left(\int\limits_{B(x_0,2\rho)\setminus B(x_0,\rho)}|v(x,k)|^{\sigma m}\,dx\right)^{1/m}.$$

Обозначим $M_1(\rho) = \max_{x\in\partial B(x_0,\rho)} v(x,k)$. Тогда

$$\int\limits_{B(x_0,1)\setminus F}(1+|\nabla v(x,k)|)^{m-2}|\nabla v(x,k)|^2\eta^m(x)\,dx \le kC_9 M_1^{\sigma}(\rho)\rho^{n/m}\frac{1}{\rho}\times$$

$$\times\left(\int\limits_{B(x_0,2\rho)\setminus B(x_0,\rho)}(1+|\nabla v(x,k)|)^m|v(x,k)|^{-\sigma m/(m-1)}\,dx\right)^{(m-1)/m}.$$

Определим еще одну срезающую функцию

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & x\in B(x_0,2\rho);\\ 0, & x\notin B(x_0,4\rho)\setminus B(x_0,\rho/2).\end{cases}$$

Тогда

$$\int\limits_{B(x_0,2\rho)}(1+|\nabla v(x,k)|)^{m-2}|\nabla v(x,k)|^2\eta^m(x)\,dx \le kC_9 M_1(\rho)\rho^{n/m}\frac{1}{\rho}\times$$

$$\times\left(\int\limits_{B(x_0,4\rho)}(1+|\nabla v(x,k)|)^m|v(x,k)|^{-\sigma m/(m-1)}\chi^m(x)\,dx\right)^{(m-1)/m}. \tag{6}$$

Для оценки интеграла в правой части неравенства (6) в интегральное тождество (3) подставим пробную функцию $\psi(x) = [v(x,k)]^{1-\sigma m/(m-1)}\chi^m(x)$. В результате получим

$$\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{B(x_0,4\rho)} f_j(x,0,\nabla v(x,k))\left(1-\sigma\frac{m}{m-1}\right)(v(x,k))^{-\sigma m/(m-1)}\frac{\partial v(x,k)}{\partial x_j}\chi^m(x)\,dx =$$

$$= -m\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{B(x_0,4\rho)} f_j(x,0,\nabla v(x,k))(v(x,k))^{1-\sigma m/(m-1)}\frac{\partial\chi(x)}{\partial x_j}\chi^{m-1}(x)\,dx.$$

Применим условия A_2), A_3):

$$\left(1-\sigma\frac{m}{m-1}\right)\int\limits_{B(x_0,4\rho)}(1+|\nabla v(x,k)|)^{m-2}|\nabla v(x,k)|^2(v(x,k))^{-\sigma m/(m-1)}\chi^m(x)dx \le$$

$$\le \frac{C_{10}}{\rho}\int\limits_{B(x_0,4\rho)\setminus B(x_0,\rho/2)}(1+|\nabla v(x,k)|)^{m-1}(v(x,k))^{1-\sigma m/(m-1)}\chi^{m-1}(x)dx.$$

Применяя неравенство Юнга с показателями m и $m/(m-1)$ к сомножителям

$$a = (1+|\nabla v(x,k)|)^{m-1}(v(x,k))^{-\sigma}\chi^{m-1}(x), \qquad b = \frac{1}{\rho}(v(x,k))^{1-\sigma/(m-1)},$$

получаем

$$\int\limits_{B(x_0,4\rho)}(1+|\nabla v(x,k)|)^{m}(v(x,k))^{-\sigma m/(m-1)}\chi^m(x)dx \le$$

$$\le C_{11}\varepsilon^{m/(m-1)}\int\limits_{B(x_0,4\rho)\setminus B(x_0,\rho/2)}(1+|\nabla v(x,k)|)^{m}(v(x,k))^{-\sigma m/(m-1)}\chi^m(x)dx +$$

$$+\frac{C_{11}}{\rho^m\varepsilon^m}\int\limits_{B(x_0,4\rho)\setminus B(x_0,\rho/2)}(v(x,k))^{m-\sigma m/(m-1)}dx.$$

Теперь ε выберем из условия $C_{11}\varepsilon^{m/(m-1)} = 1/2$. Тогда

$$\int\limits_{B(x_0,4\rho)}(1+|\nabla v(x,k)|)^{m}(v(x,k))^{-\sigma m/(m-1)}\chi^m(x)dx \le$$

$$\le \frac{C_{12}}{\rho^m}\int\limits_{B(x_0,4\rho)\setminus B(x_0,\rho/2)}(v(x,k))^{m-\sigma m/(m-1)}dx \le$$

$$\le C_{13}\left(M\left(\frac{\rho}{2}\right)\right)^{m-\sigma m/(m-1)}\rho^{n-m}.$$

Возвращаемся к оценке (6), используя доказанное выше неравенство:

$$\int\limits_{B(x_0,1)\setminus F}(1+|\nabla v(x,k)|)^{m-2}|\nabla v(x,k)|^2\eta^m(x)dx \le$$

$$\le kC_{14}M_1^{\sigma}(\rho)\rho^{n/m}\frac{1}{\rho}\left[\left(M_1\left(\frac{\rho}{2}\right)\right)^{m-\sigma m/(m-1)}\rho^{n-m}\right]^{(m-1)/m} =$$

$$= kC_{14}\rho^{n-m}M_1^{\sigma}(\rho)M_1^{m-1-\sigma}\left(\frac{\rho}{2}\right) \le kC_{14}\rho^{n-m}M_1^{m-1}\left(\frac{\rho}{2}\right).$$

Отсюда

$$\int\limits_{B(x_0,2\rho)}|\nabla(v(x,k)\eta(x))|^m dx \le kC_{15}\rho^{n-m}M_1^{m-1}\left(\frac{\rho}{2}\right) +$$

$$+ C_{15}\int\limits_{B(x_0,2\rho)}|\nabla\eta(x)|^m|v(x,k)|^m dx \le kC_{15}\rho^{n-m}M_1^{m-1}\left(\frac{\rho}{2}\right) +$$

$$+\frac{C_{16}}{\rho^m}k\int\limits_{B(x_0,2\rho)}|v(x,k)|^{m-1}dx \le kC_{17}\rho^{n-m}M_1^{m-1}\left(\frac{\rho}{2}\right).$$

Левая часть последнего неравенства оценивается из определения емкости

$$\int\limits_{B(x_i^{(s)},2\rho)} \left|\nabla\left(v_i^{(s)}(x,k)\eta(x)\right)\right|^m dx \;\geq\; k^m C_m\left(F_i^{(s)}\right).$$

Окончательно получаем

$$k^m C_m\left(F_i^{(s)}\right) \;\leq\; kC_{17}\rho^{n-m}M_1^{m-1}\left(\frac{\rho}{2}\right),$$

откуда легко видеть, что

$$M_1(\rho) \;\geq\; C_{18}k\left\{\frac{C_m\left(F_i^{(s)}\right)}{\rho^{n-m}}\right\}^{1/(m-1)}.$$

После применения неравенства Харнака имеем

$$\min_{|x|=\rho} v_i^{(s)}(x,k) \;\geq\; C_{19}k\left\{\frac{C_m\left(F_i^{(s)}\right)}{\rho^{n-m}}\right\}^{1/(m-1)},$$

что и требовалось доказать.

Используя схему доказательств аналогичного неравенства из работ [5, 6], получаем следующую поточечную оценку.

Лемма 3. *Пусть выполнены условия* $A_1)-A_3)$ *и* $|k|\leq N$. *Тогда существует постоянная* C_{20}, *зависящая только от* n, m, N, *такая, что при* $1\leq i\leq \leq I(s)$, $s=1,2,\ldots$, *выполнено неравенство*

$$\left|\nabla v_i^{(s)}(x,k)\right| \;\leq\; C_{18}\frac{|k|}{\left|x-x_i^{(s)}\right|}\left\{\frac{C_m\left(F_i^{(s)}\right)}{\left|x-x_i^{(s)}\right|^{n-m}}\right\}^{1/(m-1)},$$

$$x\in B\left(x_i^{(s)},\frac{3}{4}\right)\setminus B\left(x_i^{(s)},2d_i^{(s)}\right).$$

Доказательство. Используем такие же обозначения, как и при доказательстве леммы 2. Будем считать, для определенности, что $k>0$. Поскольку $m<n$, то существует постоянная C_{21}, не зависящая от s, такая, что выполняется неравенство

$$\inf\left\{\int\limits_{B(x_0,\rho)}|\nabla\varphi|^m dx\colon \varphi\in C_0^\infty(B(x_0,\rho)),\ \varphi(x)=1,\ x\in F\right\}\leq\; C_{21}C_m(F).$$

Значит, для любого $\varepsilon>0$ существует функция $\varphi(x)\in C_0^\infty(B(x_0,\rho))$, $\varphi(x)=1$ при $x\in F$, такая, что

$$\int\limits_{B(x_0,\rho)}|\nabla\varphi|^m dx \;\leq\; C_{21}(C_m(F)+\varepsilon).$$

Пусть $z(x)=\max\{2\varphi(x)-1,0\}$ и $G=\{x\in B(x_0,\rho)\colon z(x)>0\}=\{x\in B(x_0,\rho)\colon \varphi(x)>1/2\}$. Применяя неравенства Пуанкаре, получаем

$$\operatorname{meas} G \;\leq\; 2^m\int\limits_{B(x_0,\rho)}|\varphi(x)|^m dx \;\leq$$

$$\leq\; C_{22}\rho^m\int\limits_{B(x_0,\rho)}|\nabla\varphi(x)|^m dx \;\leq\; C_{23}\rho^m(C_m(F)+\varepsilon). \tag{7}$$

Пусть M — произвольное число из интервала $(0,k)$. Подставим пробную функцию $\psi(x)=v_M(x)-Mz(x)$ в интегральное тождество (3) для решения модельной задачи $v(x,k)$. Здесь

$$v_M(x) = \begin{cases} v(x,k), & x \in E_M = \{ x \in B(x_0,1) \setminus F : 0 \le v(x,k) \le M \}; \\ M, & x \in B(x_0,1) \setminus E_M. \end{cases}$$

После применения условий A_2), A_3), неравенства Юнга и (7) получаем

$$\int_{E_{M'}} \left(|\nabla v(x,k)|^2 + |\nabla v(x,k)|^m \right) dx \le C_{24} M (C_m(F) + \varepsilon)$$

и переходим к пределу при $\varepsilon \to 0$. Выбирая

$$M = M' = \max_{B(x_0,1)\setminus B(x_0,2\rho/3)} |v(x,k)| \le C_5 |k| \left\{ \frac{C_m(F)}{\rho^{n-m}} \right\}^{1/(m-1)},$$

имеем

$$\int_{E_{M'}} \left(|\nabla v(x,k)|^2 + |\nabla v(x,k)|^m \right) dx \le C_{25} |k| \left\{ \frac{C_m(F)}{\rho^{n-m}} \right\}^{1/(m-1)} C_m(F). \tag{8}$$

Возьмем ρ такое, что $2d \le \rho \le 3/4$. Аналогично доказательству теоремы 5 из работы [5], используя метод Мозера, получаем

$$\operatorname{vrai\,max} \left\{ |\nabla v(x,k)|^m : \frac{3}{4}\rho \le |x - x_0| \le \frac{5}{4}\rho \right\} \le$$

$$\le C_{25} \rho^{-n} \int_{E_{M'}} (1 + |\nabla v(x,k)|)^{m-2} |\nabla v(x,k)|^2 \psi^2(x) dx,$$

где $\psi(x) \in C_0^\infty(B(x_0,1))$ — функция, равная единице при $3\rho/4 \le |x - x_0| \le \le 5\rho/4$, нулю вне множества $2\rho/3 \le |x - x_0| \le 4\rho/3$ и такая, что $0 \le \psi(x) \le 1$, $|\nabla \psi| \le 20/\rho$. Отсюда и из (8) имеем

$$|\nabla v(x,k)|^m \le C_{26} \rho^{-n} \int_{E_{M'}} (1 + |\nabla v(x,k)|)^{m-2} |\nabla v(x,k)|^2 dx \le$$

$$\le C_{27} |k| \rho^{-n} \left\{ \frac{C_m(F)}{\rho^{n-m}} \right\}^{1/(m-1)} C_m(F).$$

Окончательно получаем

$$|\nabla v(x,k)|^m \le C_{28} |k| \left\{ \frac{C_m(F)}{\rho^{n-m}} \right\}^{m/(m-1)} \frac{1}{\rho^m}$$

при $x : 3\rho/4 \le |x - x_0| \le 5\rho/4$, что и доказывает нужную нам оценку.

3. Доказательство основной теоремы. Из условия A_2) получаем, что функционалы $\Phi(v_1, v_2)$, $G(v)$ дифференцируемы, $\Phi'(v_1,v_2) = \Phi_1'(v_1,v_2) + \Phi_2'(v_1,v_2)$, где

$$(\Phi_1'(v_1,v_2), u) = \int_\Omega \sum_{i=1}^n f_i(x, v_2, \nabla v_1) \frac{\partial u}{\partial x_i} dx,$$

$$(\Phi_2'(v_1,v_2), u) = \int_\Omega f_0(x, v_2, \nabla v_1) u \, dx \quad \forall u \in \overset{0}{W}{}_m^1(\Omega),$$

и

$$(G'(v), u) = \int_\Omega g_0(x, v) u \, dx \quad \forall u \in \overset{0}{W}{}_m^1(\Omega).$$

Аналогично определяются производные функционалов $\Phi_s(v_1, v_2)$, $G_s(v)$.

Также из условий A_2), A_3) следует, что функционал $G(u)$ слабо непрерывен, т. е. слабая сходимость последовательности $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ к $u_0(x)$ в $\overset{0}{W}{}_m^1(\Omega)$ влечет за собой сходимость $G(u_n)$ к $G(u_0)$ при $n \to \infty$, и функционал $\Phi(u, v)$ имеет следующие свойства:

а) для любой функции $v(x) \in \overset{0}{W}{}_m^1(\Omega)$, $C \in R^1$ множество $\Phi_{C,v} = \{u \in \overset{0}{W}{}_m^1(\Omega) : \Phi(u, v) \le C\}$ выпукло;

б) для любого ограниченного множества $D \subset \overset{0}{W}{}_m^1(\Omega)$ и произвольной последовательности $v_n(x) \in \overset{0}{W}{}_m^1(\Omega)$ из того, что $v_n(x) \rightharpoonup v_0(x)$, следует, что $\Phi(u, v_n) \to \Phi(u, v_0)$ равномерно относительно $u \in D$; при произвольном $v(x) \in \overset{0}{W}{}_m^1(\Omega)$ функционал $\Phi(\cdot, v) : \overset{0}{W}{}_m^1(\Omega) \to R^1$ непрерывен. (Здесь через $\rightharpoonup$ обозначена слабая сходимость в $\overset{0}{W}{}_m^1(\Omega)$.)

Из условия A_4) следует, что множества $M_s(G_s)$, $M(G)$ являются многообразиями класса C^1 такими, что $G_s'(u) \ne 0$ при $u \in M_s(G_s)$ и $G'(u) \ne 0$ при $u \in M(G)$. В работе [7] (теорема 5) доказано следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть V — рефлексивное банахово пространство, $\Phi(u, v) : V \times \times V \to R^1$ — выпуклый относительно и действительный функционал, $G(v)$ — слабо непрерывный действительный функционал на V, $F(v) = \Phi(v, v)$, $v \in V$. Допустим, что F, G дифференцируемы в V и для данной $c \in R^1$ множество $M = \{v \in V : G(v) = c\}$ не пусто и $G'(v) \ne 0$ для $v \in M$. Пусть $F(v) \to \infty$ при $\|v\| \to \infty$ на M. Тогда существуют $v_0 \in M$, $\lambda \in R^1$ такие, что $F'(v_0) = \lambda G'(v_0)$, $v_0 = \min_{v \in M} F(v)$.*

Другими словами, если выполнены условия $A_1) - A_4$), то существует $\lambda_s = \min_{v_s \in M_s(G_s)} F(v_s) = F(u_s)$ — собственное значение задачи (1), (2), $u_s(x)$ — соответствующая собственная функция. Можно показать, используя леммы 1 – 3, что функция $c(x, u)$ дифференцируема по u и

$$|c(x, u)| \le C_{29}|u|^m, \quad |c_0(x, u)| \le C_{29}|u|^{m-1},$$

$$c(x, u) \ge 0, \quad c_0(x, 0) = 0.$$

Тогда существует $\lambda = \min_{u \in M(G)} F_c(u) = F_c(\bar{u})$ — собственное значение задачи (4), (5), $\bar{u}(x)$ — соответствующая собственная функция. Можно показать, что $\operatorname{vrai\,max}_{x \in \Omega}|\bar{u}(x)|$ ограничен. Пусть $\{\bar{u}_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ — равномерно ограниченная последовательность функций из $C^{\infty}(\Omega)$, сходящаяся к $\bar{u}(x)$ в $W_m^1(\Omega)$.

Построим последовательность $\left\{\bar{\bar{u}}_{s,k}(x)\right\}_{s=1}^{\infty}$, сходящуюся слабо к $\bar{u}_k(x)$ в $\overset{0}{W}{}_m^1(\Omega)$ при $s \to \infty$, $\bar{\bar{u}}_{s,k}(x) \in M_s(G)$. Для этого по функции $\alpha(t)$ из условия B_2) определяется неубывающая функция $\omega : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ такая, что $\omega(t) \le C_0 t/(1 + C_0)$, с постоянной C_0 из условия B_1),

$$\omega(t) \le t^{n/(n-1)}, \qquad \frac{\omega(t)}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} 0,$$

$$\frac{\alpha^{n-1}(\omega(t))}{t^n} \xrightarrow[t\to 0]{} \infty, \qquad \frac{t^n}{\omega^{n-m}(t)} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0.$$

Вводятся также последовательность $\rho_i^{(s)} = \max\left\{ d_i^{(s)}, \omega\left(r_i^{(s)}\right)\right\}$ и подмножества индексов $I'_s = \{ i : i = 1, \ldots, I(s),\ d_i^{(s)} \ge \omega(r_i^{(s)})\}$, $I''_s = \{ i : i = 1, \ldots, I(s),\ d_i^{(s)} < \omega(r_i^{(s)})\}$. В работе [4] доказано следующее утверждение.

Лемма 4 (лемма 3.1 [4]). *При выполнении условий B_1), B_2) имеют место соотношения*

$$\lim_{s\to\infty} \sum_{i\in I'_s} C_m\left(F_i^{(s)}\right) = 0, \qquad \lim_{s\to\infty} \sum_{i\in I''_s} \left(\rho_i^{(s)}\right)^n = 0, \qquad \sum_{i=1}^{I(s)} C_m\left(F_i^{(s)}\right) \le C_{30}.$$

Определим срезающие функции:

$$1)\quad \psi_i^{(s)}(x) \in \overset{0}{W}{}_m^1\left(B\left(x_i^{(s)}, \left(1 + \frac{1}{2C_0}\right) d_i^{(s)}\right)\right), \qquad \psi_i^{(s)}(x) = 1, \quad x \in F_i^{(s)},$$

$$0 \le \psi_i^{(s)}(x) \le 1, \qquad \int_\Omega \left|\nabla \psi_i^{(s)}(x)\right|^m dx \le C_{31}\left\{ C_m\left(F_i^{(s)}\right) + 2^{-i-s}\right\};$$

2) выберем числа τ_1, τ_2 и функции $\varphi_i^{(s)}(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ так, чтобы $1 < \tau_1 < \tau_2 < 1 + (1/2C_0)$ и

$$0 \le \varphi_i^{(s)}(x) \le 1, \qquad \left|\nabla \varphi_i^{(s)}\right| \le \frac{C_{32}}{\rho_i^{(s)}},$$

$$\varphi_i^{(s)}(x) = \begin{cases} 1, & x \in B\left(x_i^{(s)}, \tau_1\rho_i^{(s)}\right); \\ 0, & x \notin B\left(x_i^{(s)}, \tau_2\rho_i^{(s)}\right). \end{cases}$$

Носители функций $\varphi_i^{(s)}(x)$ ($\psi_i^{(s)}(x)$) при заданном s и различных i между собой не пересекаются. Обозначим через $\tilde{u}_{k,i}^s$ среднее функции $\tilde{u}_k(x)$ по шару $D_i^{(s)} = B\left(x_i^{(s)}, \tau_2\rho_i^{(s)}\right)$

$$\tilde{u}_{k,i}^s = \frac{1}{\operatorname{meas} D_i^{(s)}} \int_{D_i^{(s)}} \tilde{u}_k(x)\,dx.$$

Для любого фиксированного $\mu \in (0, 1)$ определим функцию $\tilde{u}_{s,k}(x) \in \overset{0}{W}{}_m^1(\Omega_s)$:

$$\tilde{u}_{s,k}(x) = \tilde{u}_k(x) + \frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{3} \tilde{q}_{s,k}^{(l)}(x), \tag{9}$$

$$\tilde{q}_{s,k}^{(1)}(x) = \mu \sum_{i\in I'_s} \left(\tilde{u}_{k,i}^{(s)} - \tilde{u}_k(x)\right)\psi_i^{(s)}(x) + \mu \sum_{i\in I''_s} \left(\tilde{u}_{k,i}^{(s)} - \tilde{u}_k(x)\right)\varphi_i^{(s)}(x),$$

$$\tilde{q}_{s,k}^{(2)}(x) = \sum_{i\in I'_s} \upsilon_i^{(s)}\left(x, -\mu\tilde{u}_{k,i}^{(s)}\right)\varphi_i^{(s)}(x), \tag{10}$$

$$\bar{q}^{(3)}_{s,k}(x) = \sum_{i\in I''_s} v_i^{(s)}\left(x, -\mu\bar{u}^{(s)}_{k,i}\right)\varphi_i^{(s)}(x).$$

С использованием свойств решения модельной задачи и леммы 4 доказываются следующие утверждения.

Лемма 5. *При выполнении условий* $A_1) - A_3), B_1), B_2)$ *последовательности* $\bar{q}^{(1)}_{s,k}(x)$, $\bar{q}^{(2)}_{s,k}(x)$ *сильно сходятся к нулю в* $W^1_m(\Omega)$ *при* $s\to\infty$.

Лемма 6. *При выполнении условий* $A_1) - A_3), B_1), B_2)$ *последовательность* $\bar{q}^{(3)}_{s,k}(x)$ *сходится к нулю при* $s\to\infty$ *сильно в* $W^1_r(\Omega)$ *при любом* $r<m$ *и слабо в* $W^1_m(\Omega)$.

Из условий $A_2), A_4)$ следует, что для любого фиксированного s существует постоянная $l(s)$ такая, что $G_s\left(l(s)\bar{u}_{s,k}(x)\right) = 1$. Можно доказать, что

$$\lim_{s\to\infty} l(s) = 1. \tag{11}$$

Действительно, по построению $\bar{u}_{s,k}(x) \rightharpoonup \bar{u}_k(x)$ в $W^1_m(\Omega)$ при $s\to\infty$. Пусть $\lim_{s\to\infty} l(s) = l \neq 1$. Из слабой сходимости функционала G следует

$$1 = \lim_{k\to\infty}\lim_{s\to\infty} G_s\left(l(s)\bar{u}_{s,k}(x)\right) = \lim_{k\to\infty}\lim_{s\to\infty} G\left(l(s)\bar{u}_{s,k}(x)\right) = G(l\bar{u}(x)),$$

т. е. $G(l\bar{u}(x)) = G(\bar{u}(x)) = 1$. Отсюда, очевидно, получаем $l=1$ и (11) доказано.

Выберем $\bar{\bar{u}}_{s,k}(x) = l(s)\bar{u}_{s,k}(x)$. При таком выборе функции $\bar{\bar{u}}_{s,k}(x)$, используя леммы 5, 6 и условие C), получаем следующее утверждение.

Лемма 7. *Пусть выполнены условия* $A_1) - A_3), B_1), B_2), C)$. *Тогда*

$$\lim_{k\to\infty}\lim_{s\to\infty}\int_0^1\int_\Omega f_0\left(x, \bar{u}_k(x) + \theta\left(\bar{\bar{u}}_{s,k}(x) - \bar{u}_k(x)\right), \nabla\bar{\bar{u}}_{s,k}(x)\right)\times$$
$$\times\left[\bar{\bar{u}}_{s,k}(x) - \bar{u}_k(x)\right]dx\,d\theta = 0, \tag{12}$$

$$\lim_{k\to\infty}\lim_{s\to\infty}\int_0^1\int_\Omega\sum_{j=1}^n f_j\left(x, \bar{u}_k(x), \nabla\bar{u}_k(x) + \mu\left(\nabla\bar{\bar{u}}_{s,k}(x) - \nabla\bar{u}_k(x)\right)\right)\times$$
$$\times\frac{\partial\left[\bar{\bar{u}}_{s,k}(x) - \bar{u}_k(x)\right]}{\partial x_j}dx\,d\mu = \int_\Omega c(x, -\bar{u}(x))\,dx. \tag{13}$$

Доказательство. Действительно, применяя условие A_2), получаем

$$\left|\int_0^1\int_\Omega f_0\left(x, \bar{u}_k(x) + \theta\left(\bar{\bar{u}}_{s,k}(x) - \bar{u}_k(x)\right), \nabla\bar{\bar{u}}_{s,k}(x)\right)\left[\bar{\bar{u}}_{s,k}(x) - \bar{u}_k(x)\right]dx\,d\theta\right| \le$$
$$\le C_{32}\int_0^1\int_\Omega\left[\left(1 + \left|\bar{u}_k(x) + \theta\left(\bar{\bar{u}}_{s,k}(x) - \bar{u}_k(x)\right)\right|^{m_1} + \left|\nabla\bar{\bar{u}}_{s,k}(x)\right|^m\right)^{(m_1-1)/m_1} + \varphi(x)\right]\times$$
$$\times\left|\bar{\bar{u}}_{s,k}(x) - \bar{u}_k(x)\right|dx\,d\theta.$$

Интеграл в правой части последнего неравенства стремится к нулю при $s\to\infty$, так как последовательность $\left\{\left(\bar{\bar{u}}_{s,k}(x) - \bar{u}_k(x)\right)\right\}_{s=1}^\infty$ сходится к нулю слабо в $\overset{0}{W}{}^1_m(\Omega)$, т. е. (12) доказано. Тогда

$$\int_0^1 \int_\Omega \sum_{j=1}^n f_j\Big(x, \tilde{u}_k(x), \nabla \tilde{u}_k(x) + \mu\Big(\nabla \tilde{\tilde{u}}_{s,k}(x) - \nabla \tilde{u}_k(x)\Big)\Big) \frac{\partial\Big[\tilde{\tilde{u}}_{s,k}(x) - \tilde{u}_k(x)\Big]}{\partial x_j} dx\, d\mu =$$

$$= I_1^{(s,k)} + I_2^{(s,k)} + I_3^{(s,k)}, \tag{14}$$

где

$$I_1^{(s,k)} =$$

$$= (l(s)-1)\int_0^1 \int_\Omega \sum_{j=1}^n f_j\Big(x, \tilde{u}_k(x), \nabla \tilde{u}_k(x) + \mu\Big(\nabla \tilde{\tilde{u}}_{s,k}(x) - \nabla \tilde{u}_k(x)\Big)\Big) \frac{\partial \tilde{u}_k(x)}{\partial x_j} dx\, d\mu,$$

$$I_2^{(s,k)} = l(s)\int_0^1 \frac{1}{\mu}\int_\Omega \sum_{j=1}^n f_j\Big(x, \tilde{u}_k(x), \nabla \tilde{u}_k(x) + \mu\Big(\nabla \tilde{\tilde{u}}_{s,k}(x) - \nabla \tilde{u}_k(x)\Big)\Big) \times$$

$$\times \frac{\partial\Big(\tilde{q}^{(1)}_{s,k}(x) + \tilde{q}^{(2)}_{s,k}(x)\Big)}{\partial x_j} dx\, d\mu,$$

$$I_3^{(s,k)} =$$

$$= l(s)\int_0^1 \frac{1}{\mu}\int_\Omega \sum_{j=1}^n f_j\Big(x, \tilde{u}_k(x), \nabla \tilde{u}_k(x) + \mu\Big(\nabla \tilde{\tilde{u}}_{s,k}(x) - \nabla \tilde{u}_k(x)\Big)\Big) \frac{\partial \tilde{q}^{(3)}_{s,k}(x)}{\partial x_j} dx\, d\mu.$$

Поскольку $\lim_{s\to\infty}(l(s)-1) = 0$, то $\lim_{s\to\infty} I_1^{(s,k)} = 0$. Из леммы 5 следует $\lim_{s\to\infty} I_2^{(s,k)} = 0$. Рассмотрим отдельно $I_3^{(s,k)}$:

$$I_3^{(s,k)} = \int_0^1 \frac{1}{\mu}\int_\Omega \sum_{j=1}^n f_j\Big(x, 0, \nabla \tilde{q}^{(3)}_{s,k}(x)\Big) \frac{\partial \tilde{q}^{(3)}_{s,k}}{\partial x_j} dx\, d\mu +$$

$$+ I_{3,1}^{(s,k)} + I_{3,2}^{(s,k)} + I_{3,3}^{(s,k)} + I_{3,4}^{(s,k)}, \tag{15}$$

где

$$I_{3,1}^{(s,k)} = l(s)\int_0^1 \int_\Omega \sum_{j=1}^n \Big[f_j\Big(x, \tilde{u}_k(x), \nabla \tilde{u}_k(x) + \mu\Big(\nabla \tilde{\tilde{u}}_{s,k}(x) - \nabla \tilde{u}_k(x)\Big)\Big) -$$

$$- f_j\Big(x, \tilde{u}_k(x), l(s)\nabla \tilde{q}^{(3)}_{s,k}(x)\Big)\Big] \frac{\partial \tilde{q}^{(3)}_{s,k}}{\partial x_j} dx\, d\mu,$$

$$I_{3,2}^{(s,k)} =$$

$$= l(s)\int_0^1 \frac{1}{\mu}\int_\Omega \sum_{j=1}^n \Big[f_j\Big(x, \tilde{u}_k(x), l(s)\nabla \tilde{q}^{(3)}_{s,k}(x)\Big) - f_j\Big(x, \tilde{u}_k(x), \nabla \tilde{q}^{(3)}_{s,k}(x)\Big)\Big] \frac{\partial \tilde{q}^{(3)}_{s,k}}{\partial x_j} dx\, d\mu,$$

$$I_{3,3}^{(s,k)} =$$

$$= l(s)\int_0^1 \frac{1}{\mu}\int_\Omega \sum_{j=1}^n \Big[f_j\Big(x, \tilde{u}_k(x), \nabla \tilde{q}^{(3)}_{s,k}(x)\Big) - f_j\Big(x, 0, \nabla \tilde{q}^{(3)}_{s,k}(x)\Big)\Big] \frac{\partial \tilde{q}^{(3)}_{s,k}}{\partial x_j} dx\, d\mu,$$

$$I_{3,4}^{(s,k)} = [\, l(s)-1\,]\int_0^1 \frac{1}{\mu}\int_\Omega \sum_{j=1}^n f_j\Big(x, 0, \nabla \tilde{q}^{(3)}_{s,k}(x)\Big) \frac{\partial \tilde{q}^{(3)}_{s,k}}{\partial x_j} dx\, d\mu.$$

Для оценки $I_{3,1}^{(s,k)}$ применяем условие A_2) и неравенство Гельдера

$$\left|I_{3,1}^{(s,k)}\right| \le$$

$$\le C_{33}\int_0^1 \frac{1}{\mu}\left(\int_\Omega \left(1+|\tilde{u}_k|^{m_1}+|\nabla\tilde{u}_k|^m+\left|\nabla\tilde{q}_{s,k}^{(1)}\right|^m+\left|\nabla\tilde{q}_{s,k}^{(2)}\right|^m+\left|\nabla\tilde{q}_{s,k}^{(3)}\right|^m\right)dx\right)\times$$

$$\times\left\{\left[\int_\Omega \left(\left|\nabla\tilde{q}_{s,k}^{(1)}\right|+\left|\nabla\tilde{q}_{s,k}^{(2)}\right|\right)^{m/2}\left|\nabla\tilde{q}_{s,k}^{(3)}\right|^{m/2}dx\right]^{2/m}+\right.$$

$$\left.+\left[\int_\Omega \left(|\nabla\tilde{u}_k|\left|\nabla\tilde{q}_{s,k}^{(3)}\right|\right)^{m/2}dx\right]^{2/m}\right\}d\mu.$$

Первое слагаемое в фигурных скобках стремится к нулю при $s\to\infty$ в силу лемм 5, 6. Рассмотрим второе слагаемое:

$$\int_\Omega \left(|\nabla\tilde{u}_k|\left|\nabla\tilde{q}_{s,k}^{(3)}\right|\right)^{m/2}dx \le$$

$$\le C_{34}\sum_{i\in I_s''}\left(\int_{D_i^{(s)}}|\nabla\tilde{u}_k|^m dx\right)^{1/2}\left(\int_{B_i^{(s)}}\left|\nabla\left(v_i^{(s)}\left(x,-\mu\tilde{u}_{k,i}^{(s)}\right)\varphi_i^{(s)}(x)\right)\right|^m dx\right)^{1/2},$$

и стремление к нулю получаем из свойств абсолютной непрерывности интеграла, так как

$$\lim_{s\to\infty}\int_{\bigcup_{i\in I_s''}D_i^{(s)}}|\nabla\tilde{u}_k|^m dx = 0.$$

Кроме того,

$$\int_\Omega \left(1+|\tilde{u}_k|^{m_1}+|\nabla\tilde{u}_k|^m+\left|\nabla\tilde{q}_{s,k}^{(1)}\right|^m+\left|\nabla\tilde{q}_{s,k}^{(2)}\right|^m+\left|\nabla\tilde{q}_{s,k}^{(3)}\right|^m\right)dx \le C_{35},$$

где постоянная C_{35} не зависит от s. Отсюда получаем $\lim_{s\to\infty}I_{3,1}^{(s,k)}=0$, $\lim_{s\to\infty}I_{3,2}^{(s,k)}=0$, $\lim_{s\to\infty}I_{3,4}^{(s,k)}=0$ из (10), $\lim_{s\to\infty}I_{3,3}^{(s,k)}=0$ из лемм 5, 6. Оставшийся интеграл в правой части (15) представим в виде

$$\int_0^1\frac{1}{\mu}\int_\Omega\sum_{j=1}^n f_j\left(x,0,\nabla\tilde{q}_{s,k}^{(3)}(x)\right)\frac{\partial\tilde{q}_{s,k}^{(3)}}{\partial x_j}dx\,d\mu = I_4^{(s,k)}+I_5^{(s,k)}, \tag{16}$$

где

$$I_4^{(s,k)} = \int_0^1\frac{1}{\mu}\int_\Omega\sum_{i\in I_s''}\sum_{j=1}^n f_j\left(x,0,\nabla\tilde{v}_i^{(s)}\left(x,-\mu\tilde{u}_{k,i}^{(s)}\right)\right)\frac{\partial\tilde{v}_i^{(s)}\left(x,-\mu\tilde{u}_{k,i}^{(s)}\right)}{\partial x_j}dx\,d\mu,$$

$$I_5^{(s,k)} =$$

$$= \int_0^1\frac{1}{\mu}\int_\Omega\sum_{i\in I_s''}\sum_{j=1}^n\left[f_j\left(x,0,\nabla\left(\tilde{v}_i^{(s)}\left(x,-\mu\tilde{u}_{k,i}^{(s)}\right)\varphi_i^{(s)}(x)\right)\right)\frac{\partial\left(\tilde{v}_i^{(s)}\left(x,-\mu\tilde{u}_{k,i}^{(s)}\right)\varphi_i^{(s)}(x)\right)}{\partial x_j}-\right.$$

$$\left.-f_j\left(x,0,\nabla\tilde{v}_i^{(s)}\left(x,-\mu\tilde{u}_{k,i}^{(s)}\right)\right)\frac{\partial\tilde{v}_i^{(s)}\left(x,-\mu\tilde{u}_{k,i}^{(s)}\right)}{\partial x_j}\right]dx\,d\mu.$$

Методами, изложенными в гл. 9 книги [4], доказывается, что $\lim_{s\to\infty}I_5^{(s,k)}=0$.

При заданном числе k определим $d = d(k) > 0$ так, чтобы колебание функции $\tilde{u}_k(x)$ не превышало $(1/k)^{m/2}$ на любом множестве $E \subset \Omega$, диаметр которого меньше $2d$. Возможность такого выбора $d(k)$ следует из непрерывности указанных функций в $\overline{\Omega}$. Представим множество $\overline{\Omega}$ в виде объединения непересекающихся подмножеств $\overline{\Omega}_l$, $l = 1, \ldots, L(k)$, с кусочно-гладкими границами так, чтобы диаметр каждого из множеств Ω_l был меньше d.

Выберем число $s_1 = s_1(k)$ так, чтобы при $s \geq s_1$ для $i = \overline{1, I(s)}$ выполнялось неравенство $r_i^{(s)} + d_i^{(s)} < d$. Обозначим через $I_s(\Omega_l)$ множество индексов $i \in I_s''$ таких, что $x_i^{(s)} \in \Omega_l$. Определим следующее среднее:

$$\tilde{u}_l^{(k)} = \frac{1}{\operatorname{meas}\Omega_l} \int\limits_{\Omega_l} \tilde{u}_k(x)\,dx.$$

Тогда

$$I_4^{(s,k)} = \int\limits_0^1 \frac{1}{\mu} \int\limits_\Omega \sum_{l=1}^{L} \sum_{i \in I_s(\Omega_l)} \sum_{j=1}^{n} f_j\left(x, 0, \nabla \tilde{v}_i^{(s)}\left(x, -\mu \tilde{u}_l^{(k)}\right)\right) \frac{\partial \tilde{v}_i^{(s)}\left(x, -\mu \tilde{u}_l^{(k)}\right)}{\partial x_j}\,dx\,d\mu +$$

$$+ \int\limits_0^1 \frac{1}{\mu} \int\limits_\Omega \sum_{l=1}^{L} \sum_{i \in I_s(\Omega_l)} \sum_{j=1}^{n} \left[f_j\left(x, 0, \nabla \tilde{v}_i^{(s)}\left(x, -\mu \tilde{u}_{k,i}^{(s)}\right)\right) \frac{\partial \tilde{v}_i^{(s)}\left(x, -\mu \tilde{u}_{k,i}^{(s)}\right)}{\partial x_j} - \right.$$

$$\left. - f_j\left(x, 0, \nabla \tilde{v}_i^{(s)}\left(x, -\mu \tilde{u}_l^{(k)}\right)\right) \frac{\partial \tilde{v}_i^{(s)}\left(x, -\mu \tilde{u}_l^{(k)}\right)}{\partial x_j} \right] dx\,d\mu = I_6^{(s,k)} + I_7^{(s,k)}.$$

Из выбора разбиения области Ω получаем $\lim_{s \to \infty} I_7^{(s,k)} = 0$. По данному разбиению $\{\Omega_l\}_{l=1}^{L}$ области Ω выберем число $s_2 = s_2(k)$ так, чтобы при $|t| \leq M$, $s \geq s_2$, $l = 1, \ldots, L$ выполнялось неравенство

$$\left| \int\limits_0^1 \frac{1}{\mu} \int\limits_\Omega \sum_{i \in I_s''} \sum_{j=1}^{n} f_j\left(x, 0, \nabla \tilde{v}_i^{(s)}(x, -\mu)\right) \frac{\partial \tilde{v}_i^{(s)}(x, -\mu)}{\partial x_j}\,dx\,d\mu - \int\limits_\Omega c(x, t)\,dx \right| \leq \frac{1}{Lk}. \tag{17}$$

Представим $I_6^{(s,k)}$ в виде

$$I_6^{(s,k)} = \sum_{l=1}^{L} \sum_{i \in I_s(\Omega_l)} \sum_{j=1}^{n} \int\limits_0^{-\tilde{u}_l^{(k)}} \frac{1}{\mu} \int\limits_\Omega f_j\left(x, 0, \nabla \tilde{v}_i^{(s)}(x, \mu)\right) \frac{\partial \tilde{v}_i^{(s)}(x, \mu)}{\partial x_j}\,dx\,d\mu =$$

$$= \int\limits_\Omega c(x, -\tilde{u}(x))\,dx + I_{6,1}^{(s,k)} + I_{6,2}^{(k)} + I_{6,3}^{(k)}, \tag{18}$$

где

$$I_{6,1}^{(s,k)} =$$

$$= \sum_{l=1}^{L} \left[\sum_{i \in I_s(\Omega_l)} \sum_{j=1}^{n} \int\limits_0^{-\tilde{u}_l^{(k)}} \frac{1}{\mu} \int\limits_\Omega f_j\left(x, 0, \nabla \tilde{v}_i^{(s)}(x, \mu)\right) \frac{\partial \tilde{v}_i^{(s)}(x, \mu)}{\partial x_j}\,dx\,d\mu - \int\limits_{\Omega_l} c\left(x, -\tilde{u}_l^{(k)}\right) dx \right],$$

$$I_{6,2}^{(k)} = \sum_{l=1}^{L} \int\limits_{\Omega_l} c\left(x, -\tilde{u}_l^{(k)}\right) dx - \int\limits_\Omega c(x, -\tilde{u}_k(x))\,dx,$$

$$I_{6,3}^{(k)} = \int\limits_\Omega \left[c(x, -\tilde{u}_k(x)) - c(x, -\tilde{u}(x)) \right] dx.$$

$\lim_{k\to\infty} I_{6,1}^{(s,k)} = 0$ из неравенства (17), $\lim_{k\to\infty} I_{6,m}^{(k)} = 0$, $m = 2, 3$, из непрерывности функции $c(x, t)$. Из (14) – (16) и (18) получаем (13), и доказательство леммы завершено.

Тогда, используя определение собственного значения задачи (1), (2) и теорему Лагранжа, имеем

$$\lambda_s \le F\left(\bar{\bar{u}}_{s,k}\right) = \int_\Omega f(x, \bar{u}_k(x), \nabla \bar{u}_k(x))\,dx +$$

$$+ \int_\Omega \left[f\left(x, \bar{\bar{u}}_{s,k}(x), \nabla \bar{\bar{u}}_{s,k}(x)\right) - f\left(x, \bar{u}_k(x), \nabla \bar{\bar{u}}_{s,k}(x)\right)\right] dx +$$

$$+ \int_\Omega \left[f\left(x, \bar{u}_k(x), \nabla \bar{\bar{u}}_{s,k}(x)\right) - f(x, \bar{u}_k(x), \nabla \bar{u}_k(x))\right] dx = \int_\Omega f(x, \bar{u}_k(x), \nabla \bar{u}_k(x))\,dx +$$

$$+ \int_0^1 \int_\Omega f_0\left(x, \bar{u}_k(x) + \theta\left(\bar{\bar{u}}_{s,k}(x) - \bar{u}_k(x)\right), \nabla \bar{\bar{u}}_{s,k}(x)\right)\left[\bar{\bar{u}}_{s,k}(x) - \bar{u}_k(x)\right] dx\,d\theta +$$

$$+ \int_0^1 \int_\Omega \sum_{j=1}^n f_j\left(x, \bar{u}_k(x), \nabla \bar{u}_k(x) + \mu\left(\nabla \bar{\bar{u}}_{s,k}(x) - \nabla \bar{u}_k(x)\right)\right) \frac{\partial\left[\bar{\bar{u}}_{s,k}(x) - \bar{u}_k(x)\right]}{\partial x_j}\,dx\,d\mu.$$

Используя (12), (13) и сильную сходимость $\bar{u}_k(x)$ к $\bar{u}(x)$, находим

$$\overline{\lim_{s\to\infty}} \lambda_s \le \int_\Omega f(x, \bar{u}(x), \nabla \bar{u}(x))\,dx + \int_\Omega c(x, -\bar{u}(x))\,dx = \lambda.$$

Таким образом, получено соотношение

$$\overline{\lim_{s\to\infty}} \lambda_s \le \lambda. \tag{19}$$

Далее будем доказывать неравенство

$$\underline{\lim_{s\to\infty}} \lambda_s \ge \lambda. \tag{20}$$

Из (19) следует оценка $F(u_s) = \lambda_s \le C_{36}$ с некоторой постоянной C_{36}. Используя условия на функцию $f(x, u, p)$, получаем

$$C_{37} \int_\Omega |\nabla u_s|^m\,dx \le \int_\Omega f(x, u_s(x), \nabla u_s(x))\,dx \le C_{36}.$$

Отсюда $\|u_s\|_{\overset{0}{W}{}^1_m(\Omega)} \le C_{38}$. Следовательно, существует слабо сходящаяся в $\overset{0}{W}{}^1_m(\Omega)$ при $s \to \infty$ подпоследовательность последовательности $u_s(x)$, предел которой обозначим $\bar{u}(x) \in \overset{0}{W}{}^1_m(\Omega)$.

Запишем асимптотическое разложение функции $u_s(x)$, зафиксировав постоянную $\mu \in (0, 1)$:

$$u_s(x) = \bar{u}_k(x) + \frac{1}{\mu} \sum_{l=1}^3 \bar{q}_{s,k}^{(l)}(x) + \omega_{s,k}(x),$$

где $\bar{q}_{s,k}^{(l)}(x)$ имеют такой же вид, как в (9), и строятся аналогично с помощью решений вспомогательных модельных задач, срезающих функций и функции $\bar{u}(x)$, $\omega_{s,k}(x) \in \overset{0}{W}{}_m^1(\Omega_s)$ — остаточный член разложения. Аналогично доказательству теоремы 3.1 [4] получаем, что $\omega_{s,k}(x)$ сходится к нулю сильно в $\overset{0}{W}{}_m^1(\Omega)$ при $s \to \infty$. $G_s(u_s) = 1$ по определению собственной функции, и так как G — слабо непрерывный функционал, то $G(\bar{u}) = 1$. Значит,

$$\lambda_s = F(u_s) = \int_\Omega f(x, u_s(x), \nabla u_s(x))dx = \int_\Omega f(x, \bar{u}_k(x), \nabla \bar{u}_k(x))dx +$$

$$+ \int_0^1 \int_\Omega f_0(x, \bar{u}_k(x) + \theta(u_s(x) - \bar{u}_k(x)), \nabla u_s(x))[u_s(x) - \bar{u}_k(x)]\,dx\,d\theta +$$

$$+ \int_0^1 \int_\Omega \sum_{j=1}^n f_j(x, \bar{u}_k(x), \nabla \bar{u}_k(x) + \mu(\nabla u_s(x) - \nabla \bar{u}_k(x))) \frac{\partial[u_s(x) - \bar{u}_k(x)]}{\partial x_j}\,dx\,d\mu.$$

Как и в лемме 7, доказывается, что

$$\varliminf_{s\to\infty} \lambda_s = \varliminf_{s\to\infty} F(u_s) = F_c(\bar{u}) \geq \inf_{u \in M(G)} F_c(u) = \lambda.$$

Таким образом, получаем неравенство (20). Из (19) и (20) следует утверждение теоремы 1.

1. *Марченко В. А., Хруслов Е. Я.* Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей. – Киев: Наук. думка, 1974. – 280 с.
2. *Иосифьян Г. А., Олейник О. А., Шамаев А. С.* Усреднение собственных значений и собственных функций краевой задачи теории упругости перфорированной области // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. – 1983. – № 4. – С. 53 – 63.
3. *Олейник О. А., Шапошникова Т. А.* Об усреднении решений задач Дирихле в частично перфорированной области общего вида с непериодической структурой // Там же. – 1995. – № 2. – С. 49 – 55.
4. *Скрыпник И. В.* Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач. – М.: Физматлит, 1990. – 448 с.
5. *Скрыпник И. В.* Асимптотика решений нелинейных эллиптических задач в перфорированных областях // Мат. сб. – 1993. – **184**, № 10. – С. 67 – 90.
6. *Скрыпник И. В.* Новые условия усреднения нелинейных задач Дирихле в перфорированных областях // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 5. – С. 675 – 694.
7. *Browder F.* Variation methods for nonliner elliptic eigenvalue problems // Bull. Amer. Math. Soc. – 1965. – **71**, № 1. – P. 176 – 183.
8. *Browder F.* Infinitive dimensional manifolds and nonlinear elliptic eigenvalue problems // Ann. Math. – 1965. – **82**, № 3. – P. 459 – 477.
9. *Fučik F., Nečas J., Souček J., Souček V.* Spectral analysis of nonlinear operators // Lect. Notes Math. – Berlin: Springer, 1973. – **346**.
10. *Похожаев С. И.* О собственных функциях квазилинейных эллиптических задач // Мат. сб. – 1970. – **82**, № 2. – С. 192 – 212.

Получено 01.07.2002