УДК 517.537.32

П. В. Філевич, М. М. Шеремета (Львів. нац. ун-т)

ПРО ПРАВИЛЬНУ ЗМІНУ ОСНОВНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЦІЛОЇ ФУНКЦІЇ

We establish a necessary and sufficient condition on the coefficients a_n of an entire function $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ in order that its central index, the logarithm of the maximum of modulus, and the logarithm of maximal term be regularly varying functions. We construct the entire function whose logarithm of maximum of modulus is a regularly varying function and the Nevalinna characteristic function is not a regularly varying function.

Встановлено необхідну і достатню умову на коефіцієнти a_n цілої функції $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ для того, щоб її центральний індекс і логарифми максимуму модуля та максимального члена були правильно змінними функціями. Побудовано цілу функцію, логарифм максимуму модуля якої — правильно змінна функція, а характеристична функція Неванлінни не є правильно змінною функцією.

1. Вступ. Як і в [1], додатну вимірну на $[a; +\infty)$ функцію l будемо називати повільно змінною, якщо $l(cx) \sim l(x)$, $x \to +\infty$, для довільного $c \in (0; +\infty)$, і правильно змінною порядку $\rho \in (0; +\infty)$, якщо $l(x) = x^{\rho}\alpha(x)$, де α — повільно змінна функція.

Нехай для цілої функції $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ $M_f(r) = \max\{|f(z)|: |z| = r\}$ — максимум модуля, $T_f(r) = \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+|f(re^{i\varphi})|d\varphi$ — характеристична функція Неванлінни, $\mu_f(r) = \max\{|a_n|r^n: n \ge 0\}$ — максимальний член і $\nu_f(r) = \max\{n \ge 0: |a_n|r^n = \mu_f(r)\}$ — центральний індекс.

У статті [2] доведено, що якщо одна з функцій $\ln M_f(r)$, $T_f(r)$, $\ln\mu_f(r)$ є повільно змінною, то $\ln M_f(r) \sim T_f(r) \sim \ln\mu_f(r)$, $r \to +\infty$, тобто всі три функції є одночасно повільно змінними. Встановлено також необхідну і достатню умову на коефіцієнти a_n, за якої $\ln\mu_f(r)$ — повільно змінна функція, і поставлено задачу про повільне зростання $\nu_f(r)$. Цю задачу розв'язано в [3], де отримано критерій повільного зростання центрального індексу в термінах коефіцієнтів.

У цій статті будемо вивчати подібні задачі щодо правильного зростання основних характеристик цілої функції. Зокрема, покажемо, що функції $\ln M_f(r)$, $\ln\mu_f(r)$, $\nu_f(r)$ є одночасно правильно змінними, і встановимо критерій їх правильної зміни в термінах коефіцієнтів (зауважимо, що функції $\ln\mu_f(r)$ і $\nu_f(r)$ можуть не бути одночасно повільно змінними [3]); отримаємо співвідношення між $M_f(r)$ і $\mu_f(r)$ для цілих функцій f таких, що $\ln\mu_f(r)$ — правильно змінна функція; побудуємо приклад, який показує, що $\ln M_f(r)$ і $T_f(r)$ на відміну від випадку повільної зміни можуть не бути одночасно правильно змінними функціями; в термінах нулів встановимо критерій правильної зміни лічильної функції нулів.

2. Правильне зростання центрального індексу та логарифмів максимуму модуля і максимального члена. Справедлива така теорема.

Теорема 1. *нехай* $\rho \in (0; +\infty)$ *і* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *— ціла функція. Рівносильними є такі умови:*

a) $\ln M_f(r)$ *— правильно змінна функція порядку* ρ;

b) $\ln\mu_f(r)$ *— правильно змінна функція порядку* ρ;

c) $\nu_f(r)$ — *правильно змінна функція порядку* ρ;

d) $\nu_f(r)/\ln\mu_f(r) \to \rho$, $r \to +\infty$;

e) *існує зростаюча послідовність невід'ємних цілих чисел* $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$ *така, що для всіх* $k \geq 0$

$$c_k := \left(\frac{|a_{n_k}|}{|a_{n_{k+1}}|}\right)^{1/(n_{k+1}-n_k)} \uparrow +\infty, \quad k \to \infty, \tag{1}$$

$$|a_n| c_k^n \leq |a_{n_k}| c_k^{n_k}, \quad n \in (n_k; n_{k+1}), \tag{2}$$

$$\frac{n_{k+1}}{\ln|a_{n_{k+1}}| + n_{k+1}\ln c_k} \to \rho, \quad k \to \infty, \tag{3}$$

$$\frac{n_k}{\ln|a_{n_{k+1}}| + n_{k+1}\ln c_k} \to \rho, \quad k \to \infty. \tag{4}$$

Доведення. Якщо одна з функцій $\ln M_f(r)$ чи $\ln\mu_f(r)$ є правильно змінною порядку $\rho \in (0; +\infty)$, то функція f має порядок ρ, а для кожної цілої функції скінченного порядку виконується (див., наприклад, [4, с. 17]) співвідношення

$$\ln M_f(r) \sim \ln\mu_f(r), \quad r \to +\infty. \tag{5}$$

Звідси безпосередньо випливає рівносильність умов a) і b).

Доведемо рівносильність b) і d). Оскільки [4, с. 13]

$$\ln\mu_f(y) - \ln\mu_f(x) = \int_x^y \frac{\nu_f(t)}{t}\,dt, \quad y > x > 0, \tag{6}$$

то для довільних $c > 1$ і $x > 0$ отримуємо $\nu_f(x)\ln c \leq \ln\mu_f(cx) - \ln\mu_f(x) \leq \leq \nu_f(cx)\ln c$, а тому

$$\frac{\nu_f(x)\ln c}{\ln\mu_f(x)} \leq \frac{\ln\mu_f(cx)}{\ln\mu_f(x)} - 1, \quad 1 - \frac{\ln\mu_f(x)}{\ln\mu_f(cx)} \leq \frac{\nu_f(cx)\ln c}{\ln\mu_f(cx)}.$$

Звідси знаходимо

$$\frac{1}{\ln c}\left(1 - \frac{\ln\mu_f(r/c)}{\ln\mu_f(r)}\right) \leq \frac{\nu_f(r)}{\ln\mu_f(r)} \leq \frac{1}{\ln c}\left(\frac{\ln\mu_f(cr)}{\ln\mu_f(r)} - 1\right). \tag{7}$$

Оскільки функція l є правильно змінною порядку ρ тоді і лише тоді, коли $l(cx)/l(x) \to c^{\rho}$, $x \to +\infty$, для кожного $c > 0$, то з (7) випливає

$$(1 + o(1))\frac{1}{\ln c}\left(1 - \frac{1}{c^{\rho}}\right) \leq \frac{\nu_f(r)}{\ln\mu_f(r)} \leq (1 + o(1))\frac{c^{\rho} - 1}{\ln c}.$$

Звідси при $c \to 1 + 0$ отримуємо d).

Якщо ж справджується умова d), то з (6) маємо

$$\ln\mu_f(r) \sim \rho\int_1^r \frac{\ln\mu_f(t)}{t}\,dt, \quad r \to +\infty. \tag{8}$$

Розглянемо функцію

$$\alpha(r) = \frac{1}{r^\rho}\int_1^r \frac{\ln\mu_f(t)}{t}dt, \qquad r \ge 1,$$

і покажемо, що вона є повільно змінною. Для цього, оскільки α є неперервно диференційовною, досить встановити співвідношення

$$\frac{r\alpha'(r)}{\alpha(r)} \to 0, \qquad r \to +\infty.$$

Враховуючи (8), отримуємо

$$\frac{r\alpha'(r)}{\alpha(r)} = r(\ln\alpha(r))' = -\rho + (1+o(1))\rho = o(1), \qquad r \to +\infty.$$

З повільної зміни функції α випливає, що $\ln\mu_f(r)$ — правильно змінна функція порядку ρ, і, отже, еквівалентність умов b) і d) доведено.

Далі, якщо $\ln\mu_f(r)$ — правильно змінна функція порядку ρ, то згідно з умовою d)

$$\frac{\nu_f(cr)}{\nu_f(r)} \sim \frac{\rho\ln\mu_f(cr)}{\rho\ln\mu_f(r)} \sim c^\rho, \qquad r \to +\infty,$$

тобто $\nu_f(r)$ — правильно змінна функція порядку ρ.

Навпаки, якщо $\nu_f(r)$ — правильно змінна функція порядку ρ, то з (6) маємо

$$\ln\mu_f(cr) \sim \int_c^{cr}\frac{\nu_f(t)}{t}dt = \int_1^r \frac{\nu_f(cx)}{x}dx \sim c^\rho\int_1^r\frac{\nu_f(x)}{x}dx \sim c^\rho\ln\mu_f(r)$$

при $r \to +\infty$, звідки випливає, що й $\ln\mu_f(r)$ — правильно змінна функція порядку ρ.

Доведемо рівносильність умов d) і e). Припустимо спочатку, що справджується умова d), і нехай $\{c_k\}_{k=0}^{\infty}$ — зростаюча послідовність всіх точок розриву центрального індексу $\nu_f(r)$.

Нехай для кожного $k \ge 0$ $n_k = \nu_f(c_k - 0)$, $n_{k+1} = \nu_f(c_k)$. Відомо, що $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$ є зростаючою послідовністю. Крім того, вона задовольняє співвідношення (1) – (4). Доведемо це.

Оскільки $\mu_f(r) = |a_{n_{k+1}}|\, r^{n_{k+1}}$ для всіх $r \in [c_k; c_{k+1})$ і $k \ge 0$, то, з одного боку, $\mu_f(c_k) = |a_{n_{k+1}}|\, c_k^{n_{k+1}}$, а з іншого, завдяки неперервності максимального члена $\mu_f(c_k) = |a_{n_k}|\, c_k^{n_k}$. Отже, $|a_{n_{k+1}}|\, c_k^{n_{k+1}} = |a_{n_k}|\, c_k^{n_k}$, $k \ge 0$, звідки безпосередньо випливає (1), а також (2), якщо лише врахувати, що $|a_n|\, c_k^n \le \mu_f(c_k)$, $n \ge 0$.

Далі, згідно з умовою d)

$$\frac{n_{k+1}}{\ln|a_{n_{k+1}}| + n_{k+1}\ln c_k} = \frac{\nu_f(c_k)}{\ln\mu_f(c_k)} \to \rho, \qquad k \to \infty,$$

тобто виконується (3).

Нарешті, розглянувши для кожного $k \ge 1$ зліва від c_k точку r_k таку, що $\nu_f(r_k) = n_k$ і $\ln\mu_f(r_k) \sim \ln\mu_f(c_k)$, $k \to \infty$, і ще раз скориставшись умовою d), отримаємо

$$\frac{n_k}{\ln|a_{n_{k+1}}| + n_{k+1}\ln c_k} = \frac{\nu_f(r_k)}{\ln\mu_f(c_k)} \sim \frac{\nu_f(r_k)}{\ln\mu_f(r_k)} \sim \rho$$

при $k \to \infty$, звідки випливає (4).

Припустимо тепер, що існує зростаюча послідовність невід'ємних цілих чисел $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$ така, що для всіх $k \geq 0$ виконуються співвідношення (1) – (4). Доведемо, що тоді виконується умова d).

Розглянемо допоміжну цілу функцію $g(z) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n z^n$. Доведемо, що із співвідношень (1) і (2) випливає рівність $\nu_g(r) = n_{k+1}$ для всіх $r \in [c_k; c_{k+1})$ і $k \geq 0$.

Справді, якщо $n \in (n_m; n_{m+1}]$ і $m \geq k+1$, то з (1) отримуємо $|a_{n_m}| \leq$ $\leq |a_{n_{k+1}}| c_{k+1}^{n_{k+1}-n_m}$, а тому, скориставшись ще й (2),

$$|a_n| r^n = |a_n| c_m^n \left(\frac{r}{c_m}\right)^n \leq |a_{n_m}| c_m^{n_m} \left(\frac{r}{c_m}\right)^n \leq \frac{|a_{n_{k+1}}|}{c_{k+1}^{n_m - n_{k+1}}} c_m^{n_m} \left(\frac{r}{c_m}\right)^n \leq$$

$$\leq |a_{n_{k+1}}| r^{n_{k+1}} \left(\frac{r}{c_{k+1}}\right)^{n-n_{k+1}} < |a_{n_{k+1}}| r^{n_{k+1}},$$

тобто $\nu_f(r) \leq n_{k+1}$.

Аналогічно, якщо $n \in [n_m; n_{m+1})$ і $m \leq k$, то

$$|a_{n_m}| \leq |a_{n_{k+1}}| c_m^{n_{m+1}-n_m} c_k^{n_{k+1}-n_{m+1}},$$

а отже,

$$|a_n| r^n = |a_n| c_m^n \left(\frac{r}{c_m}\right)^n \leq |a_{n_m}| c_m^{n_m} \left(\frac{r}{c_m}\right)^n \leq$$

$$\leq |a_{n_{k+1}}| c_m^{n_{m+1}-n_m} c_k^{n_{k+1}-n_{m+1}} c_m^{n_m} \left(\frac{r}{c_m}\right)^n \leq |a_{n_{k+1}}| r^{n_{k+1}} \left(\frac{c_k}{r}\right)^{n_{k+1}-n} \leq |a_{n_{k+1}}| r^{n_{k+1}},$$

звідки випливає, що $\nu_f(r) \geq n_{k+1}$, і тому $\nu_f(r) = n_{k+1}$.

Отже, якщо $r \in [c_k; c_{k+1})$, то

$$\frac{n_{k+1}}{\ln|a_{n_{k+2}}| + n_{k+2}\ln c_{k+1}} = \frac{\nu_g(r)}{\ln\mu_g(c_{k+1})} \leq \frac{\nu_g(r)}{\ln\mu_g(r)} \leq$$

$$\leq \frac{\nu_g(r)}{\ln\mu_g(c_k)} = \frac{n_{k+1}}{\ln|a_{n_{k+1}}| + n_{k+1}\ln c_k}.$$

Згідно з (3) і (4) звідси отримуємо $\nu_g(r)/\ln\mu_g(r) \to \rho$, $r \to +\infty$. Залишилось врахувати, що $\nu_f(r) = \nu_g(r)$ і $\ln\mu_f(r) = \ln\mu_g(r)$ для всіх $r \geq r_0$.

***Зауваження* 1.** Умову (4) в теоремі 1 можна замінити умовою $n_{k+1}/n_k \to 1$, $k \to \infty$.

3. Співвідношення між максимумом модуля і максимальним членом. Як було зазначено вище, в класі цілих функцій скінченного порядку виконується співвідношення (5). У цьому класі співідношення (5) є непокращуваним [5]: для довільної додатної на $(-\infty; +\infty)$ функції α такої, що $\alpha(x) = o(x)$, $x \to$ $\to +\infty$, існує ціла функція f скінченного порядку така, що

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}} \left(\ln M_f(r) - \ln\mu_f(r) - \alpha(\ln\mu_f(r))\right) = +\infty.$$

У випадку, коли $\ln\mu_f(r)$ є правильно змінною, співвідношення (5) можна істотно уточнити. Справедливим є таке твердження.

Твердження 1. *Нехай* $\rho\in(0;+\infty)$. *Якщо* f *— ціла функція така, що* $\ln\mu_f(r)$ *— правильно змінна функція порядку* ρ, *то*

$$M_f(r) = o(\mu_f(r)\ln\mu_f(r)), \qquad r\to+\infty. \tag{9}$$

З іншого боку, якою б не була додатна на $(-\infty;+\infty)$ *функція* α *така, що* $\alpha(x)=o(x)$, $x\to+\infty$, *існує ціла функція* f, *для якої* $\ln\mu_f(r)$ *— правильно змінна функція порядку* ρ *і*

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{M_f(r)}{\mu_f(r)\alpha(\ln\mu_f(r))} = +\infty. \tag{10}$$

Доведення. Нехай $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ — ціла функція і $\varepsilon>0$. Тоді згідно з означенням максимального члена і центрального індексу

$$|a_n|(\varepsilon r)^n \le \mu_f(\varepsilon r) = |a_{\nu_f(\varepsilon r)}|(\varepsilon r)^{\nu_f(\varepsilon r)} = |a_{\nu_f(\varepsilon r)}|r^{\nu_f(\varepsilon r)}\varepsilon^{\nu_f(\varepsilon r)} \le$$

$$\le \mu_f(r)\varepsilon^{\nu_f(\varepsilon r)},$$

тобто $|a_n|r^n\le\mu_f(r)\varepsilon^{\nu_f(\varepsilon r)-n}$. Використовуючи двічі останню нерівність (при $\varepsilon=1-\delta$ і $n_1=\nu_f((1-\delta)r)$, а також при $\varepsilon=1+\delta$ і $n_2=\nu_f((1+\delta)r)$), для кожного фіксованого $\delta\in(0;1)$ маємо

$$M_f(r) \le \sum_{n=0}^{\infty}|a_n|r^n = \left(\sum_{n_1\le n<n_2}+\sum_{n<n_1}+\sum_{n\ge n_2}\right)|a_n|r^n \le$$

$$\le \mu_f(r)\left(n_2-n_1+\sum_{n<n_1}(1-\delta)^{n_1-n}+\sum_{n\ge n_2}(1+\delta)^{n_2-n}\right) \le$$

$$\le \mu_f(r)\left(n_2-n_1+\sum_{n\ge1}(1-\delta)^{n}+\sum_{n\ge0}(1+\delta)^{-n}\right) = \mu_f(r)\left(n_2-n_1+\frac{2}{\delta}\right) =$$

$$= \mu_f(r)\left(\nu_f((1+\delta)r)-\nu_f((1-\delta)r)+\frac{2}{\delta}\right). \tag{11}$$

Якщо $\ln\mu_f(r)$ — правильно змінна функція порядку ρ, то згідно з твердженням 1 для довільного $c\in(0;+\infty)$ справджуються співвідношення $\nu_f(cr)\sim$ $\sim c^\rho\nu_f(r)\sim c^\rho\rho\ln\mu_f(r)$, $r\to+\infty$, а тому з (11) дістаємо

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{M_f(r)}{\mu_f(r)\ln\mu_f(r)} \le \varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\nu_f((1+\delta)r)-\nu_f((1-\delta)r)}{\ln\mu_f(r)} =$$

$$= \rho((1+\delta)^\rho-(1-\delta)^\rho).$$

Спрямувавши тут δ до 0, отримаємо (9). Першу частину твердження 2 доведено.

Доведемо його другу частину. Насамперед зауважимо, що існує додатна на $(-\infty;+\infty)$ функція β така, що $\alpha(x)=o(\beta(x))$, $\beta(x)=o(x)$, $\beta(x)\nearrow+\infty$ при $x\to+\infty$.

Нехай $k\ge0$ — ціле число. Покладемо

$$n_0 = 1, \quad n_{k+1} = [n_k + \beta(2n_k/\rho)] + 1,$$

$$c_0 = \exp\left\{\frac{n_1}{n_0\rho}\right\}, \quad c_{k+1} = c_k \exp\left\{\frac{n_{k+2} - n_{k+1}}{n_{k+1}\rho}\right\},$$

$$a_{n_0} = 1, \quad a_{n_{k+1}} = a_{n_k} c_k^{-(n_{k+1} - n_k)},$$

$$a_n = a_{n_k} c_k^{-(n - n_k)}, \quad n \in (n_k; n_{k+1}).$$

Нехай також $b_j = (n_{j+1} - b_j)/n_j$. Оскільки

$$\prod_{j=1}^{k} (1 + b_j) = \prod_{j=1}^{k} \frac{n_{j+1}}{n_j} = n_{k+1} \uparrow +\infty, \quad k \to \infty,$$

то добуток $\prod_{j=1}^{\infty}(1 + b_j)$, а з ним і ряд $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ є розбіжними. Завдяки цьому

$$c_k = c_0 \exp\left\{\frac{1}{\rho}\sum_{j=1}^{k} b_j\right\} \uparrow +\infty, \quad k \to \infty.$$

Тому функція $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ є цілою і для послідовності $\{n_k\}$ виконуються, як легко бачити, умови (1) та (2). Отже, $\nu_f(c_k) = n_{k+1}$ (див. доведення теореми 1). Звідси отримуємо $\mu_f(c_k) = a_{n_{k+1}} c_k^{n_{k+1}} = a_{n_k} c_k^{n_k}$.

Доведемо за індукцією, що

$$a_{n_k} c_k^{n_k} = \exp\{n_{k+1}/\rho\}. \tag{12}$$

При $k = 0$ рівність (12) є очевидною. Припустимо, що вона виконується для деякого $k = p \geq 0$, тобто $a_{n_p} c_p^{n_p} = \exp\{n_{p+1}/\rho\}$. Тоді

$$a_{n_{p+1}} c_{p+1}^{n_{p+1}} = a_{n_p} c_p^{-(n_{p+1} - n_p)} c_p^{n_{p+1}} \exp\left\{\frac{n_{p+2} - n_{p+1}}{\rho}\right\} =$$

$$= a_{n_p} c_p^{n_p} \exp\left\{\frac{n_{p+2} - n_{p+1}}{\rho}\right\} =$$

$$= \exp\left\{\frac{n_{p+1}}{\rho}\right\} \exp\left\{\frac{n_{p+2} - n_{p+1}}{\rho}\right\} = \exp\left\{\frac{n_{p+2}}{\rho}\right\},$$

тобто (12) виконується і для $k = p + 1$. Рівність (12) доведено.

З (12) отримуємо

$$n_{k+1}/(\ln|a_{n_{k+1}}| + n_{k+1} \ln c_k) = n_{k+1}/(\ln|a_{n_k}| + n_k \ln c_k) = \rho,$$

тобто справджується (3), а тому й (4), оскільки $n_{k+1}/n_k \to 1$, $k \to +\infty$. Отже, $\ln \mu_f(r)$ — правильно змінна функція порядку ρ.

Покажемо, що для функції f виконується (10). Справді, для всіх $k \geq k_0$

$$M_f(c_k) \geq \sum_{n=n_k}^{n_{k+1}} a_k c_k^n = a_{n_k} c_k^{n_k} (n_{k+1} - n_k + 1) \geq$$

$$\geq \mu_f(c_k) \beta(2n_k/\rho) \geq \mu_f(c_k) \beta(n_{k+1}/\rho) = \mu_f(c_k) \beta(\ln \mu_f(c_k)),$$

звідки й випливає (10).

4. Логарифм максимуму модуля і характеристична функція Неванлінни. У 1961 р. на колоквіумі з класичної теорії функцій у Корнельському університеті було складено список проблем [6], першою серед яких була така проблема: якщо для цілої функції f існує $\lim\limits_{r\to+\infty}\dfrac{\ln M_f(r)}{r^\rho}$, то чи існує $\lim\limits_{r\to+\infty}\dfrac{T_f(r)}{r^\rho}$? У 1963 р. негативну відповідь отримав А. А. Гольдберг [7] (див. також приклади 1 і 1′ в [8, с. 100, 104]): існує ціла функція f така, що $\lim\limits_{r\to+\infty}\dfrac{\ln M_f(r)}{r^\rho}$ існує, але $\lim\limits_{r\to+\infty}\dfrac{T_f(r)}{r^\rho}$ не існує. Використовуючи ідею, яка є близькою до тієї, на якій базується побудова прикладу 1′ з [8, с. 104], доведемо наступне сильніше твердження.

Твердження 2. *Для довільного $\rho\in(0;+\infty)$ існує ціла функція f така, що $\lim\limits_{r\to+\infty}\dfrac{\ln M_f(r)}{r^\rho}=1$, тобто $\ln M_f(r)$ — правильно змінна функція порядку ρ, але $T_f(r)$ не є правильно змінною функцією.*

Зауваження 2. Для функції f з твердження 2 границя $\lim\limits_{r\to+\infty}\dfrac{T_f(r)}{r^\rho}$ не існує. Справді, якщо б ця границя існувала, то вона дорівнювала б деякому додатному числу a, оскільки для цілих функцій скінченного порядку виконується співвідношення $\varlimsup\limits_{r\to+\infty}\dfrac{\ln M_f(r)}{T_f(r)}<+\infty$ (див., наприклад, [8, с. 565]). Тоді всупереч твердженню 2 з рівності $\lim\limits_{r\to+\infty}\dfrac{T_f(r)}{r^\rho}=a$ ми отримали б, що $T_f(r)$ є правильно змінною функцією.

Доведення. Розглянемо цілі функції

$$E_\rho(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(1+k/\rho)},\qquad F_\rho(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k}}{\Gamma(1+2k/\rho)}=E_{\rho/2}(z^2).$$

Перша з цих функцій, як відомо, називається функцією Міттаг-Леффлера, і для неї (див., наприклад, [8, с. 115])

$$\ln M_{E_\rho}(r)=\ln E_\rho(r)\sim r^\rho,\qquad T_{E_\rho}(r)\sim\sigma_1 r^\rho,\qquad r\to+\infty,\tag{13}$$

де

$$\sigma_1=\sigma_1(\rho)=\begin{cases}1/(\pi\rho), & 1/2\le\rho<+\infty;\\ \sin\pi\rho/(\pi\rho), & 0<\rho\le 1/2.\end{cases}$$

З (13) легко отримуємо

$$\ln M_{F_\rho}(r)=\ln F_\rho(r)\sim r^\rho,\qquad T_{F_\rho}(r)\sim\sigma_2 r^\rho,\qquad r\to+\infty,\tag{14}$$

де $\sigma_2=\sigma_2(\rho)=\sigma_1(\rho/2)>\sigma_1(\rho)=\sigma_1$.

Нехай $c>1$ — фіксоване натуральне число таке, що

$$c>2^\rho\rho e,\qquad c\rho e>2^\rho,\qquad 2+\ln(c\rho)<\rho\sqrt{c},\qquad \frac{\sigma_2\sqrt{c}-1}{\sigma_1\sqrt{c}+1}>1.\tag{15}$$

Для кожного натурального n покладемо $\eta_{2n-2}=1$,

$$\eta_{2n-1}=\begin{cases}1, & (2n-1)\in[c^{4p};c^{4p+2}), & p=0,1,2,\ldots;\\ 0, & (2n-1)\in[c^{4p+2};c^{4p+4}), & p=0,1,2,\ldots,\end{cases}$$

і розглянемо цілу функцію

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\eta_k z^k}{\Gamma(1+k/\rho)}.$$

Покажемо, що ця функція є шуканою.

Оскільки $F_\rho(r) \le f(r) = M_f(r) \le E_\rho(r)$, то з (13) і (14) отримуємо $\lim\limits_{r\to+\infty} \frac{\ln M_f(r)}{r^\rho} = 1$. Доведемо, що $T_f(r)$ не є правильно змінною функцією порядку ρ.

Насамперед зауважимо, що з відомої формули Стірлінга $\Gamma(1+x) \sim \sim x^x e^{-x}\sqrt{2\pi x}$, $x \to +\infty$, рівності $\Gamma(1)=1$ і співвідношення $x^x e^{-x} \to 1$, $x \downarrow 0$, випливає нерівність

$$\Gamma(1+x) \ge A x^x e^{-x}, \quad x > 0, \tag{16}$$

де A — деяка додатна стала. З (16), зокрема, маємо $p\,! = \Gamma(1+p) \ge A p^p e^{-p}$, якщо $p \in \mathbb{N}$.

Згідно з (16) і першою з нерівностей (15) для кожного $r > 0$

$$\sum_{k \ge r^\rho c} \frac{r^k}{\Gamma(1+k/\rho)} \le \frac{1}{A} \sum_{k \ge r^\rho c} \left(\frac{k}{c}\right)^{k/\rho} \left(\frac{\rho e}{c}\right)^{k/\rho} =$$

$$= \frac{1}{A} \sum_{k \ge r^\rho c} \left(\frac{\rho e}{c}\right)^{k/\rho} \le \frac{1}{A} \sum_{k \ge 1} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{A}. \tag{17}$$

Крім того, якщо $m = r^\rho / c$ — натуральне число, то за (16) і другою та третьою з нерівностей (15) маємо

$$\sum_{k \le r^\rho / c} \frac{r^k}{\Gamma(1+k/\rho)} - 1 \le \frac{1}{A} \sum_{k=1}^{m} (mc)^{k/\rho} \left(\frac{\rho e}{k}\right)^{k/\rho} =$$

$$= \frac{1}{A} \frac{m^{m/\rho}}{(m!)^{1/\rho}} \sum_{k=1}^{m} (c\rho e)^{k/\rho} \left(\frac{m!}{k^k m^{m-k}}\right)^{1/\rho} \le \frac{1}{A^{1+1/\rho}} \frac{m^{m/\rho}}{(m)^{m/\rho} e^{-m/\rho}} \sum_{k=1}^{m} (c\rho e)^{k/\rho} =$$

$$= \frac{e^{m/\rho}}{A^{1+1/\rho}} (c\rho e)^{m/\rho} \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(c\rho e)^{(m-k)/\rho}} \le$$

$$\le \frac{e^{m/\rho}}{A^{1+1/\rho}} (c\rho e)^{m/\rho} = \frac{1}{A^{1+1/\rho}} \exp\left\{\frac{r^\rho}{c\rho}(2 + \ln(c\rho))\right\} \le \frac{1}{A^{1+1/\rho}} \exp\left\{\frac{r^\rho}{\sqrt{c}}\right\}. \tag{18}$$

Зауважимо далі, що функцію f можна подати в одному з двох виглядів

$$f(z) = E_\rho(z) + f_1(z) = F_\rho(z) - f_2(z), \tag{19}$$

де

$$f_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\eta_k - 1) z^k}{\Gamma(1+k/\rho)}, \quad f_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\eta_{2k-1}) z^{2k-1}}{\Gamma(1+(2k-1)/\rho)}.$$

Нехай $r = c^{(4p+1)/\rho}$, $p \ge 0$. Тоді $r^\rho / c = c^{4p} \in \mathbb{N}$, $r^\rho c = c^{4p+2}$. Оскільки $1 - \eta_k = 0$, якщо $k \in [c^{4p}; c^{4p+2}) = [r^\rho / c; r^\rho c)$, то згідно з (17) і (18)

$$M_{f_1}(r) \le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\eta_k - 1| r^k}{\Gamma(1+k/\rho)} \le \left(\sum_{k \le r^\rho/c} + \sum_{k \ge r^\rho c} \right) \frac{r^k}{\Gamma(1+k/\rho)} \le$$

$$\le \frac{1}{A} + 1 + \frac{1}{A^{1+1/\rho}} \exp\left\{ \frac{r^\rho}{\sqrt{c}} \right\}.$$

Звідси і з (19), враховуючи [5, с. 45], що $T_{g_1+g_2}(r) \le T_{g_1}(r) + T_{g_2}(r) + \ln 2$ для довільних мероморфних функцій g_1, g_2, отримуємо

$$T_f(r) \le T_{E_\rho}(r) + T_{f_1}(r) + \ln 2 \le T_{E_\rho}(r) + \ln M_{f_1}(r) + \ln 2 \le$$

$$\le (1+o(1)) \left(\sigma_1 + \frac{1}{\sqrt{c}} \right) r^\rho, \quad r = c^{(4p+1)/\rho}, \quad p \to +\infty. \tag{20}$$

Нехай $r = c^{(4p+3)/\rho}$, $p \ge 0$. Тоді $r^\rho / c = c^{4p+2} \in \mathbb{N}$, $r^\rho c = c^{4p+4}$. Оскільки $\eta_{2k-1} = 0$, якщо $k \in [c^{4p+2}; c^{4p+4}) = [r^\rho/c; r^\rho c)$, то за (17) і (18)

$$M_{f_2}(r) \le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\eta_{2k-1}| r^{2k-1}}{\Gamma(1+(2k-1)/\rho)} \le \left(\sum_{n \le r^\rho/c} + \sum_{n \ge r^\rho c} \right) \frac{r^n}{\Gamma(1+n/\rho)} \le$$

$$\le \frac{1}{A} + 1 + \frac{1}{A^{1+1/\rho}} \exp\left\{ \frac{r^\rho}{\sqrt{c}} \right\}.$$

Звідси і з (19) отримуємо

$$T_f(r) \ge T_{F_\rho}(r) - T_{f_2}(r) - \ln 2 \ge T_{F_\rho}(r) - \ln M_{f_2}(r) - \ln 2 \ge$$

$$\ge (1+o(1)) \left(\sigma_2 - \frac{1}{\sqrt{c}} \right) r^\rho, \quad r = c^{(4p+3)/\rho}, \quad p \to \infty. \tag{21}$$

Скориставшись нарешті останньою з нерівностей (15), а також (20) і (21), при $\alpha = c^{2/\rho}$ маємо

$$\varlimsup_{r \to +\infty} \frac{T_f(\alpha r)}{T_f(r)} \ge \varlimsup_{p \to +\infty} \frac{T_f(\alpha c^{(4p+1)/\rho})}{T_f(c^{(4p+1)/\rho})} = \varlimsup_{p \to +\infty} \frac{T_f(c^{(4p+3)/\rho})}{T_f(c^{(4p+1)/\rho})} \ge$$

$$\ge \varlimsup_{p \to +\infty} \frac{\left(\sigma_2 - \frac{1}{\sqrt{c}} \right) c^{(4p+3)}}{\left(\sigma_1 + \frac{1}{\sqrt{c}} \right) c^{(4p+1)}} = \frac{\sigma_2 \sqrt{c} - 1}{\sigma_1 \sqrt{c} + 1} c^2 > c^2 = \alpha^\rho,$$

тобто $T_f(r)$ не є правильно змінною функцією.

5. Правильне зростання лічильної функції нулів. Припустимо, що f — ціла функція, $f(0) \ne 0$, і нехай $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ — послідовність нулів f, занумерованих у порядку неспадання модулів, $n_f(r) = \sum_{|\lambda_n| \le r} 1$ — лічильна функція нулів, $N_f(r) = \int_0^r \frac{n(t)}{t} dt$ — неванліннова характеристика розподілу нулів.

Використовуючи теорему 1, можна встановити зв'язок між правильним зростанням $n_f(r)$ чи $N_f(r)$ і поведінкою послідовності $\{\lambda_n\}$.

Справді, нехай $\{n_k\}$ — така зростаюча послідовність невід'ємних цілих чисел, що $n_0 = 0$ і

$$\left|\lambda_{n_k-1}\right| < \left|\lambda_{n_k}\right| = \ldots = \left|\lambda_{n_{k+1}-1}\right| < \left|\lambda_{n_{k+1}}\right|, \quad k \geq 1. \tag{22}$$

Тоді, як легко бачити, $n_f(r) = n_{k+1}$, якщо $r \in [|\lambda_{n_k}|; |\lambda_{n_{k+1}}|]$ і $k \geq 0$.

Покладемо $a_0 = a_{n_0} = 1$, $a_n = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{1}{|\lambda_j|}$, $n \geq 1$, $c_k = |\lambda_{n_k}|$, $k \geq 0$, і розглянемо цілу функцію $f^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Оскільки згідно з (22)

$$\left(\frac{a_{n_k}}{a_{n_{k+1}}}\right)^{1/(n_{k+1}-n_k)} = \left(\prod_{j=n_k}^{n_{k+1}-1} |\lambda_j|\right)^{1/(n_{k+1}-n_k)} =$$

$$= \left|\lambda_{n_k}\right| = c_k \uparrow +\infty, \quad k \to \infty,$$

і $a_n c_k^n = a_{n_k} c_k^{n_k}$ для всіх $n \in (n_k; n_{k+1})$ та $k \geq 0$, тобто виконуються співвідношення (1) і (2), то (див. доведення теореми 1) $\nu_{f^*}(r) = n_{k+1} = n_f(r)$, якщо $n \in [c_k; c_{k+1}) = [|\lambda_{n_k}|; |\lambda_{n_{k+1}}|]$ і $k \geq 0$. Зрозуміло також, що $\nu_{f^*}(r) = n_f(r) = 0$, якщо $r \in [0; c_0]$, і тому $\nu_{f^*}(r) = n_f(r)$, $r \geq 0$. Отже, згідно з (6)

$$\ln \mu_{f^*}(r) = \int_0^r \frac{\nu_{f^*}(t)}{t} dt + \ln|a_0| = \int_0^r \frac{n_f(t)}{t} dt = N_f(r).$$

Із викладеного і теореми 1 випливає, що функції $n_f(r)$ та $N_f(r)$ є одночасно правильно змінними порядку $\rho \in (0; +\infty)$. Крім того, помітивши, що співвідношення (3) і (4) можна перетворити до вигляду

$$\frac{1}{n_{k+1}}\left(n_k \ln\left|\lambda_{n_k}\right| - \sum_{j=0}^{n_k-1} \ln|\lambda_j|\right) \to \frac{1}{\rho}, \quad k \to \infty, \tag{23}$$

$$\ln\left|\lambda_{n_k}\right| - \frac{1}{n_k} \sum_{j=0}^{n_k-1} \ln|\lambda_j| \to \frac{1}{\rho}, \quad k \to \infty, \tag{24}$$

з теореми 1 отримуємо такий критерій правильної зміни $N_f(r)$ (а отже, і $n_f(r)$) в термінах нулів функції f.

Теорема 2. *Нехай $\rho \in (0; +\infty)$. Для того щоб функція $N_f(r)$ була правильно змінною порядку ρ, необхідно і достатньо, щоб для визначеної вище послідовності $\{n_k\}$ виконувались співвідношення* (23) *і* (24).

1. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. – М.: Наука, 1985. – 142 с.
2. *Заболоцкий Н. В., Шеремета М. Н.* О медленном возрастании основных характеристик целых функций // Мат. заметки. – 1999. – **65**, № 2. – С. 206–214.
3. *Скасків О. Б., Тракало О. М.* Про повільне зростання лічильної функції додатної послідовності // Вісн. Львів. нац. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2000. – Вип. 57. – С. 36–40.
4. *Полиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа. – М.: Наука, 1978. – Т. 2. – 432 с.
5. *Шучинская Е. Ф.* О неравенстве Бореля для целых функций конечного порядка // Изв. СКНЦВШ. Естеств. науки. – 1981. – № 1. – С. 22–23.
6. *Исследовательские* проблемы // Математика: сб. пер. иностр. ст. – М.: Изд-во иностр. лит., 1963. – № 7:5. – С. 133–136.
7. *Гольдберг А. А.* Три приклади цілих функцій // Допов. АН УРСР. – 1963. – № 4. – С. 443–446.
8. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций. – М.: Наука, 1970. – 592 с.

Одержано 23.10.2001,
після доопрацювання — 24.01.2003