УДК 517.9

К. Г. Валеев, И. А. Джалладова (Киев. нац. эконом. ун-т)

ВЫВОД МОМЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ, ЗАВИСЯЩЕЙ ОТ ПОЛУМАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА

For a system of difference nonlinear equations that depends on a semi-Markov process, we present a method of the derivation of moment equations for its solutions. For systems of linear equations, we perform the comparison with the well-known results.

Наведено метод виведення моментних рівнянь для розв'язків системи різницевих нелінійних рівнянь, що залежить від кінцевозначного напівмарковського процесу. Для систем лінійних рівнянь виконано порівняння з відомими результатами.

В настоящей статье приведен метод вывода моментных уравнений для решений системы нелинейных уравнений, правая часть которых зависит от полумарковского процесса [1, 2].

1. Рассмотрим систему разностных уравнений

$$X_{k+1} = F(\xi_k, X_k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \quad \dim X_k = m, \tag{1}$$

где ξ_k — полумарковский случайный процесс, принимающий конечное число состояний $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ и определяемый интенсивностями

$$q_{js}(k) = \mathrm{P}\{\xi(r+1) = j, \alpha(r+1) = k \mid \xi(r) = s\},$$

$$j, s = 1, 2, \ldots, n, \quad k = 1, 2, \ldots, r \le j.$$

Здесь $\xi(r)$, $\alpha(r)$ определяют процесс марковского восстановления с дискретным временем $r \ge 0$. Полумарковские матрицы $q_{js}(k)$ удовлетворяют условиям

$$q_{js}(k) \ge 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} q_{js}(k) = 1, \quad j, s = 1, 2, \ldots, n, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Введем функции $q_s(k)$, которые определяют вероятность перехода скачком процесса ξ_k из положения θ_s в момент $t = k$ в любое другое состояние (в том числе возможен переход опять в то же состояние θ_s):

$$q_s(k) = \sum_{j=1}^{n} q_{js}(k), \quad \sum_{k=1}^{\infty} q_j(k) = 1.$$

Кроме того, введем

$$\psi_s(k) = \sum_{j=k+1}^{\infty} q_s(j), \quad \psi_s(0) = 1, \quad s = 1, 2, \ldots, n, \quad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Если процесс ξ_k при $k = 0$ скачком попал в положение θ_s, то $\psi_s(k)$ — вероятность того, что процесс ξ_k остается в положении θ_s в течение времени $\alpha(0) > k$.

Введем вектор вероятностей

$$P(k) = (p_s(k)), \; 1 \le s \le n,$$

где $p_s(k)$ — вероятность того, что случайный процесс ξ_k находится в состоянии θ_s в момент $t = k$, т. е.

$$p_s(k) = \mathrm{P}\{\xi_k = \theta_s\}, \quad s = 1, 2, \ldots, n, \quad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Будем рассматривать матрицы

$$\Psi(k) = \left\| \delta_{js}\psi_s(k) \right\|_{j,s=1}^{n}, \quad Q(k) = \left\| q_{js}(k) \right\|_{j,s=1}^{n}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Пусть полумарковский процесс ξ_k имеет скачки в моменты времени $t = k_j$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, $k_0 = 0$, $k_0 < k_1 < k_2 < \ldots$. Тогда для полумарковского процесса справедливы равенства

$$P(k_j + s) = \Phi(s)P(k_j), \quad s = 0, 1, 2, \ldots, \quad j = 0, 1, 2, \ldots,$$

т. е. любой момент скачка может быть принят за начальный момент времени для полумарковского процесса. В работе [3] выведено матричное уравнение для определения матрицы переходных вероятностей

$$\Phi(k) = \Psi(k) + \sum_{j=1}^{k} \Phi(k-j)Q(j), \quad k = 1, 2, 3, \ldots, \quad \Phi(0) = E.$$

Зная матрицы $\Phi(k)$, $Q(k)$, можно найти значения матрицы $\Phi(k)$. В момент скачка $k = k_j$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, забывается вся предыстория полумарковского процесса, и при $k \ge k_j$ полумарковский процесс ξ_k определен лишь значением $P(k_j)$.

Замечание. Если рассматривать только моменты $k = k_j$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, скачков случайного процесса ξ_k, то будут справедливы равенства

$$P(k_{j+1}) = \Pi P(k_j), \quad j = 0, 1, 2, \ldots, \quad \Pi = \left\| \pi_{js} \right\|_{j,s=1}^{n},$$

где Π — стохастическая матрица и

$$\pi_{js} = \sum_{k=1}^{\infty} q_{js}(k), \quad j, s = 1, 2, \ldots, n.$$

Отсюда следует, что дискретный случайный процесс ξ_{k_j}, $j \ge 0$, является марковской цепью.

2. Выведем уравнения, определяющие математические ожидания случайного решения X_k системы уравнений (1). При $\xi_k = \theta_s$ система уравнений (1) принимает вид

$$X_{k+1} = F_s(X_k), \quad F_s(X) \equiv F(Q_s, X), \quad s = 0, 1, 2, \ldots, m. \tag{2}$$

Пусть

$$X_k = R_s(k, X_0), \quad k = 1, \dots, n, \quad R_s(0, X_0) \equiv X_0$$

— общее решение системы (2) в форме Коши. Введем условное математическое ожидание случайного решения X_k при известном детерминированном X_0 и $\xi_0 = \theta_s$:

$$M_s(k, X_0) = \langle X_k | \xi_0 = \theta_s \rangle, \quad s = 1, \dots, n, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

и составим систему уравнений для векторов $M_s(k, X_0)$. С вероятностью $\psi_s(k)$ процесс ξ_k остается в состоянии θ_s и с вероятностями $q_{js}(l)$ переходит из состояния θ_s в состояние θ_j в момент времени $t = l$. При этом переходе получим $X_l = R_s(l, X_0)$.

Отыскание математического ожидания решения системы (2) сведено к решению разностных уравнений типа уравнений марковского восстановления

$$M_s(k, X_0) = \psi_s(k) R_s(k, X_0) + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{n} q_{js}(l) M_j\big(k - l, R_s(l, X_0)\big), \tag{3}$$

$$s = 1, \dots, n.$$

Если известны случайные начальные условия

$$f_s(X_0) = f(X_0 | \xi_0 = \theta_s) p_s(0), \quad s = 1, 2, \dots, n,$$

то математическое ожидание случайного решения системы (1) можно найти по формуле

$$\langle X_k \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} M_s(k, X) f_s(X)\, dX, \quad dX = dx_1 dx_2 \dots dx_m, \tag{4}$$

где $\langle X_k \rangle$ — математическое ожидание вектора X_k.

3. Если система разностных уравнений (1) линейна и имеет вид

$$X_{k+1} = A(\xi_k) X_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad A(\theta_s) = A_s,$$

то система уравнений (3) принимает вид

$$M_s(k, X_0) = \psi_s(k) A_s^k X_0 + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{n} q_{js}(l) M_j\big(k - l, A_s^l X_0\big), \quad s = 1, \dots, n.$$

Поскольку вектор-функции $M_s(k, X_0)$ линейны относительно X_0, то полагая

$$M_s(k, X_0) = M_s(k) X_0, \quad s = 1, 2, \dots, n, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

получаем систему матричных разностных уравнений для матриц $M_s(k)$, $s = 1, 2, \dots, n$,

$$M_s(k) = \psi_s(k) A_s^k + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{n} q_{js}(l) M_j(k - l) A_s^l, \tag{5}$$

$$s = 1, 2, \dots, n, \quad k = 0, 1, 2, \dots .$$

Если матрицы $M_s(k)$, $s = 1, 2, \dots, n$, найдены, то по формуле (4) находим математическое ожидание

$$\langle X_k \rangle = \sum_{k=1}^{n} M_s(k) \langle X_0 | \xi_0 = \theta_s \rangle \mathrm{P}\{\xi_0 = \theta_s\}. \tag{6}$$

Аналогично можно составить разностные уравнения для матриц вторых моментов

$$D_s(k, X_0) = \left\langle X_k X_k^* \mid \xi_0 = \theta_s \right\rangle, \quad s = 1, 2, \ldots, n, \quad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Для матриц $D_s(k, X_0)$, $s = 1, 2, \ldots, n$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, находим систему уравнений

$$D_s(k, X_0) = \psi_s(k) A_s^k X_0 X_0^* (A_s^*)^k + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{n} q_{js}(l) D_j\left(k - l, A_s^l X_0\right).$$

Если $D_s(k, X_0)$, $s = 1, 2, \ldots, n$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, будут найдены, то матрицы вторых моментов случайного решения X_k можно найти по формуле

$$\left\langle X_k X_k^* \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} D_s(k, X) f_s(X)\, dX, \quad dX = dx_1 dx_2 \ldots dx_m.$$

Пример. Найдем моментные уравнения для решений разностного уравнения

$$x_{k+1} = a(\xi_k) x_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \quad a(\theta_s) = a_s, \quad s = 1, 2, \tag{7}$$

где $\xi(t)$ — полумарковский процесс, принимающий два состояния θ_1 и θ_2.

Предполагая, что

$$Q(1) = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q(2) = \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}25 \\ 0{,}25 & 0{,}25 \end{pmatrix},$$

$$\Psi(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Psi(1) = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}5 \end{pmatrix},$$

$$Q(k) = 0, \quad \Psi(k) = 0, \quad k = 2, 3, \ldots,$$

систему уравнений (5) записываем в виде

$$M_1(0) = 1, \quad M_1(1) = 0{,}5a_1 + 0{,}5M_2(0)a_1,$$

$$M_1(2) = 0{,}5M_2(1)a_1 + 0{,}25M_1(0)a_1^2 + 0{,}25M_2(0)a_1^2,$$

$$M_1(3) = 0{,}5M_2(2)a_1 + 0{,}25M_1(1)a_1^2 + 0{,}25M_2(1)a_1^2,$$

$$M_2(0) = 1, \quad M_2(1) = 0{,}5a_2 + 0{,}5M_1(0)a_2,$$

$$M_2(2) = 0{,}5M_1(1)a_2 + 0{,}25M_2(0)a_2^2 + 0{,}25M_1(0)a_2^2,$$

$$M_2(3) = 0{,}5M_1(2)a_2 + 0{,}25M_2(1)a_2^2 + 0{,}25M_1(1)a_2^2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Из этой системы уравнений находим

$$M_1(0) = 1, \quad M_1(1) = a_1, \quad M_1(2) = \frac{a_1}{2}(a_1 + a_2),$$

$$M_1(3) = \frac{a_1}{4}(a_1 + a_2)^2, \quad M_1(4) = \frac{a_1}{8}(a_1 + a_2)^3,$$

$$M_2(0) = 1, \quad M_2(1) = a_2, \quad M_2(2) = \frac{a_2}{2}(a_1 + a_2),$$

$$M_2(3) = \frac{a_2}{4}(a_1 + a_2)^2, \quad M_2(4) = \frac{a_2}{8}(a_1 + a_2)^3.$$

Из формулы (6) находим математическое ожидание случайного решения уравнения (7):

$$\langle x_k \rangle = \frac{a_1}{2^{k-1}}(a_1+a_2)^{k-1}\langle x_0 \mid \xi_0 = \theta_1 \rangle \mathrm{P}\{\xi(0)=\theta_1\} +$$

$$+ \frac{a_2}{2^{k-1}}(a_1+a_2)^{k-1}\langle x_0 \mid \xi_0 = \theta_2 \rangle \mathrm{P}\{\xi(0)=\theta_2\}, \quad k = 1, 2.$$

Аналогично находим второй момент:

$$\langle x_k^2 \rangle = \frac{a_1^2}{2^{k-1}}(a_1^2+a_2^2)^{k-1}\langle x_0^2 \mid \xi_0 = \theta_1 \rangle \mathrm{P}\{\xi(0)=\theta_1\} +$$

$$+ \frac{a_2^2}{2^{k-1}}(a_1^2+a_2^2)^{k-1}\langle x_0^2 \mid \xi_0 = \theta_2 \rangle \mathrm{P}\{\xi(0)=\theta_2\}, \quad k = 1, 2.$$

4. Пусть в системе разностных уравнений (1) полумарковский процесс переходит в марковский процесс, заданный уравнением

$$P(k+1) = BP(k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \quad B = \|\beta_{is}\|_{j,s=1}, \tag{8}$$

и имеет интенсивности, определенные по формулам

$$\psi_s(k) = \beta_s^k, \quad s = 1, 2, \ldots, n, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$q_{ss}(k) \equiv 0, \quad q_{js}(k) = \beta_{js}\beta_s^{k-1}, \quad j \neq s, \quad j, s = 1, 2, \ldots, n, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Система моментных уравнений (3) примет вид

$$M_s(k, X_0) = \beta_{sk}^k R_s(k, X_0) + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{\substack{s=1 \\ j \neq s}}^{n} \beta_{js}\beta_s^{l-1}(l) M_j\big(k-l, R_s(l, X_0)\big),$$

$$s = 1, \ldots, n,$$

а система уравнений (13) — вид

$$M_s(k) = \beta_{ss}^k A_s^k + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{n} \beta_{js}\beta_{ss}^{l-1} M_j(k-l) A_s^l, \tag{9}$$

$$s = 1, \ldots, n, \quad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

5. В работе [4] выведены моментные уравнения, определяющие математическое ожидание случайного решения X_k системы линейных разностных уравнений

$$X_{k+1} = A(\xi_k) X_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{10}$$

где ξ_k — марковский случайный процесс, принимающий значения $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ с вероятностями

$$p_s(k) = \mathrm{P}\{\xi_k = \theta_s\}, \quad s = 1, 2, \ldots, n, \quad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Полагаем, что вероятности $p_j(k)$ удовлетворяют системе уравнений (8).

Введем векторы условных математических ожиданий

$$G_s(k) = \langle X_k \mid \xi_k = \theta_s \rangle \mathrm{P}\{\xi_k = \theta_s\}, \quad s = 1, 2, \ldots, n, \quad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

В работе [4] доказано, что векторы $G_s(k)$ удовлетворяют системе линейных моментных уравнений

$$G_j(k+1) = \sum_{s=1}^{n} \beta_{js} A_s G_s(k), \quad A_s = A(\theta_s), \quad j, s = 1, 2, \ldots, n.$$

При этом математическое ожидание $\langle X_k \rangle$ случайного решения системы уравнений (10) находится по формуле

$$\langle X_k \rangle = \sum_{j=1}^{n} G_j(k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Предполагая, что X_0 — детерминированный вектор, получаем

$$G_j(0) = X_0 p_j(0), \quad p_j(0) = \mathrm{P}\{\xi_0 = \theta_s\}.$$

Систему уравнений (10) можно записать в матричной форме

$$\begin{pmatrix} G_1(k+1) \\ G_2(k+1) \\ \ldots \\ G_n(k+1) \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} G_1(k) \\ G_2(k) \\ \ldots \\ G_n(k) \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} \beta_{11}A_1 & \beta_{12}A_2 & \cdots & \beta_{1n}A_n \\ \beta_{21}A_1 & \beta_{22}A_2 & \cdots, & \beta_{2n}A_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta_{n1}A_1 & \beta_{n2}A_2 & \cdots & \beta_{nn}A_n \end{pmatrix}, \tag{11}$$

из которой находим математическое ожидание

$$\langle X_k \rangle = (EEE \ldots E) H^k(p) \begin{pmatrix} X_0 p_1(0) \\ X_0 p_2(0) \\ \ldots \\ X_0 p_n(0) \end{pmatrix}, \tag{12}$$

где $(EEE \ldots E)$ — блочная матрица, элементами которой являются единичные матрицы.

Систему уравнений (9) запишем в виде

$$\beta_{ss} M_s(k) = \beta_{ss} \beta_{ss}^k A_s^k + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{n} \beta_{js} \beta_{ss}^l M_j(k-l) A_s^l, \tag{13}$$

$$s = 1, \ldots, n, \quad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

В системе уравнений (13) заменим k на $k+1$:

$$\beta_{ss} M_s(k+1) = \beta_{ss} \beta_{ss}^k A_s^{k+1} + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{n} \beta_{js} \beta_{ss} M_j(k) A_s +$$

$$+ \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{n} \beta_{js} \beta_{ss}^l M_j(k-l) A_s^{l+1}, \quad s = 1, \ldots, n, \quad k = 0, 1, 2, \ldots . \tag{14}$$

Умножая систему уравнений (13) на $\beta_{ss} A_s$ и вычитая из системы уравнений (14), получаем уравнения

$$\beta_{ss} M_s(k+1) - \beta_{ss} M_s(k) \beta_{ss} A_s = \sum_{s=1}^{n} \beta_{js} \beta_{ss} M_j(k) A_s,$$

или

$$M_s(k+1) = \sum_{s=1}^{n} \beta_{js} M_j(k) A_s, \quad s = 1, 2, \ldots, n.$$

Последнюю систему разностных уравнений можно записать в виде

$$(M_1(k+1) \quad M_2(k+1) \; \ldots \; M_n(k+1)) = (M_1(k) \quad M_2(k) \; \ldots \; M_n(k))H, \qquad (15)$$

где матрица H размера $mn \times mn$ введена в формулах (11). Решение системы уравнений (15) имеет вид

$$(M_1(k) \quad M_2(k) \; \ldots \; M_n(k)) = (M_1(0) \quad M_2(0) \; \ldots \; M_n(0))H^k, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Зная матрицы $M_s(k)$, $s = 1, 2, \ldots, n$, находим математическое ожидание случайного решения

$$\langle X_k \rangle = \sum_{s=1}^{n} M_s(k) X_0 p_k(0) = (M_1(k) \quad M_2(k) \; \ldots \; M_n(k)) \begin{pmatrix} X_0 p_1(0) \\ X_0 p_2(0) \\ \ldots \\ X_0 p_n(0) \end{pmatrix}.$$

Поскольку $M_s(0) = E$, $s = 1, 2, \ldots, n$, окончательно получаем

$$\langle X_k \rangle = (EE \ldots E) H^k \begin{pmatrix} X_0 p_1(0) \\ X_0 p_2(0) \\ \ldots \\ X_0 p_n(0) \end{pmatrix}. \qquad (16)$$

Формулы (12) и (16) совпадают.

1. *Королюк В. С., Турбин А. Ф.* Полумарковские процессы и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1976. – 192 с.
2. *Тихонов В. И., Миронов Н. А.* Марковские процессы. – М.: Сов. радио, 1977. – 488 с.
3. *Валеев К. Г., Карелова О. Л., Горелов В. И.* Оптимизация линейных систем со случайными коэффициентами – М.: Изд-во Рос. ун-та дружбы народов, 1996. – 258 с.
4. *Валеев К. Г., Стрижак О. Л.* Метод моментных уравнений. – Киев, 1985. – 56 с.

Получено 15.05.2002,
после доработки — 17.03.2003