УДК 512.723

І. І. Бурбан (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

СТАБІЛЬНІ РОЗШАРУВАННЯ НА РАЦІОНАЛЬНІЙ КРИВІЙ ІЗ ОДНІЄЮ ПРОСТОЮ ПОДВІЙНОЮ ТОЧКОЮ *

We present the classification of stable vector bundles on a rational curve with one simple double node.

Наведено класифікацію стабільних векторних розшарувань на раціональній кривій із однією простою подвійною точкою.

1. Вступ. Уперше векторні розшарування на еліптичній кривій було досліджено в роботі М. Атьї [1], де наведено повну класифікацію нерозкладних розшарувань, обчислено їх групи когомологій, а також знайдено формули розкладу тензорного добутку нерозкладних векторних розшарувань у пряму суму нерозкладних векторних розшарувань.

Геометричну класифікацію розшарувань на еліптичних кривих дав Т. Ода [2], згідно з якою будь-яке нерозкладне розшарування на еліптичній кривій ізоморфне тензорному добутку так званого уніпотентного розшарування з прямим образом (відносно етального накриття) лінійного розшарування. Щоправда, це твердження виконується лише для кривих над полем характеристики 0.

Векторні розшарування на циклах проективних прямих вивчались у роботі [3] (див. також [4, 5]). Нерозкладне векторне розшарування можна описати двома дискретними параметрами, а саме вектором мультистепенів $\mathbf{d}$ та кратністю m, і одним неперервним параметром λ. У роботі [6] знайдено формули розкладу тензорного добутку нерозкладних векторних розшарувань у пряму суму нерозкладних векторних розшарувань. Формули для дуального векторного розшарування в термінах комбінаторики роботи [3] наведено у роботі [4]. Проте досі нез'ясованим залишалося питання про точну будову стабільних розшарувань і не існувало уніфікованого підходу до опису векторних розшарувань на еліптичних кривих та циклах проективних прямих.

Інтерес до розшарувань на кривих арифметичного роду 1 значно зріс після появи роботи Фрідмана, Моргана та Віттена [7], присвяченої $\mathbf{F}$-теорії, та роботи Поліщука і Заслова [8], присвяченої гомологічній дзеркальній симетрії (див. також [9]).

Мотивацією цієї статті є необхідність дослідження векторних розшарувань на еліптичних фібраціях, а її основними результатами є явний алгоритм побудови стабільного розшарування рангу r і степеня d та така теорема.

Теорема 1. *Нехай* $\mathbf{E}$ — *раціональна крива з однією простою подвійною точкою (наприклад, задана рівнянням* $zy^2 = x^3 - zx^2$), $r > 0$, d — *цілі числа, причому* $(r, d) = 1$, $\lambda \in \mathbf{k}^* = \mathbf{E}_{reg}$. *Тоді на* $\mathbf{E}$ *існує єдине стабільне розшарування рангу* r, *степеня* d *із детермінантом* $O_{\mathbf{E}}(d\lambda)$. *Якщо* $\mathcal{E}$ — *стабільне розшарування на* $\mathbf{E}$, *то його ранг та степінь є взаємно простими.*

2. Векторні розшарування на кривих арифметичного роду 1. Нехай $\mathbf{E}$ — довільна проективна крива арифметичного роду 1. Тоді, очевидно, $\mathrm{Ext}_{O_{\mathbf{E}}}(O_{\mathbf{E}}, O_{\mathbf{E}}) = \mathrm{H}^1(O_{\mathbf{E}}) = \mathbf{k}$. Тому існує лише одне розширення

$$0 \to O \to \mathcal{F}_2 \to O \to 0,$$

* Частково підтримана грантом CRDF UM-2094 та проектом „Globale Methoden in der komplexen Geometrie" Німецького дослідницького фонду.

в якому $\mathcal{F}_2$ не розщеплюється. Повторюючи дослівно аргументи з [1], приходимо до висновку, що адитивна оболонка структурного пучка $\mathcal{O}$ (тобто категорія, яка одержується із структурного пучка за допомогою розширень та взяття прямих доданків) складається з нерозкладних розшарувань $\mathcal{F}_1 = \mathcal{O}, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \ldots$, де кожне розшарування $\mathcal{F}_s$ однозначно визначається короткою точною послідовністю

$$0 \to \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_s \to \mathcal{F}_{s-1} \to 0, \quad s \geq 2.$$

Окрім цього виконується співвідношення $\mathcal{F}_s = \mathrm{Sym}^{s-1}(\mathcal{F}_2)$. Розшарування $\mathcal{F}_s$, $s \geq 1$, називаються *уніпотентними*.

Теорема 2 (див. [2], теорема 2.1). *Нехай* $\mathbf{E}_\tau = \mathbb{C}/\langle 1, \tau\rangle$ *— гладка еліптична крива,* $\mathbf{E}_{r\tau} = \mathbb{C}/\langle 1, r\tau\rangle$, $\pi_r : \mathbf{E}_{r\tau} \to \mathbf{E}_r$ *— ізогенія степеня* r, d *— ціле число,* $(r, d) = 1$, $\mathcal{L}$ *— довільне лінійне розшарування на* $\mathbf{E}_{r\tau}$ *степеня* d, s *— натуральне число. Тоді*

$$\mathcal{E} = \pi_{r*}(\mathcal{L}) \otimes \mathcal{F}_s$$

є нерозкладним розшаруванням рангу sr *та степеня* sd *на кривій* $\mathbf{E}_\tau$. *Навпаки, якщо* $\mathcal{E}$ *— нерозкладне розшарування рангу* rs *та степеня* ds *на еліптичній кривій* $\mathbf{E}_\tau$ *і* $(r, d) = 1$, *то існує лінійне розшарування* $\mathcal{L}$ *степеня* d *на кривій* $\mathbf{E}_\tau$ *таке, що*

$$\mathcal{E} \cong \pi_{r*}(\mathcal{L}) \otimes \mathcal{F}_s.$$

Зауважимо, що лінійне розшарування на циклі проєктивних прямих визначається мультистепенем $\mathbf{d}$ та неперервним параметром $\lambda \in \mathbf{k}^*$. Аналогом теореми 2 для цього випадку є таке твердження.

Теорема 3 (див. [3], теорема 2.12, [4], теорема 3.2). *Нехай* $\mathbf{E}_k$ *— цикл із* k *прямих (для* $k = 1$ $\mathbf{E}_1$ *є раціональною кривою з однією подвійною точкою),* $\pi_r : \mathbf{E}_{rk} \to \mathbf{E}_k$ *— етальне накриття степеня* k,

$$\mathbf{d} = d_1 d_2 \ldots d_k d_{k+1} d_{k+2} \ldots d_{2k} \ldots d_{(r-1)k+1} d_{(r-1)k+2} \ldots d_{rk},$$

$d_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, \ldots, rk$, *— деяка неперіодична послідовність цілих чисел. У даному контексті неперіодичність означає, що* $\mathbf{d}[t] \neq \mathbf{d}$ *для всіх* $t = 1, \ldots, r-1$, *де послідовність*

$$\mathbf{d}[1] = d_k d_{k+1} d_{k+2} \ldots d_{2k} \ldots d_{(r-1)k+1} d_{(r-1)k+2} \ldots d_{rk} d_1 d_2 \ldots d_k,$$

$\mathbf{d}[t] = (\mathbf{d}[t-1])$ [1]. *Нехай* $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathbf{d}, \lambda)$ *— довільне лінійне розшарування на* $\mathbf{E}_{rk}$ *мультистепеня* $\mathbf{d}$. *Тоді*

$$\mathcal{B}(\mathbf{d}, s, \lambda) = \pi_{r*}(\mathcal{L}) \otimes \mathcal{F}_s$$

є нерозкладним розшаруванням рангу sr *на кривій* $\mathbf{E}_k$. *Навпаки, будь-яке нерозкладне розшарування на кривій* $\mathbf{E}_k$ *ізоморфне деякому розшаруванню* $\mathcal{B}(\mathbf{d}, s, \lambda)$.

Нехай $\mathbf{E}$ — гладка еліптична крива або цикл прямих, $\pi_i : \mathcal{E}_i \to \mathbf{E}$, $i = 1, 2$, — дві ізогенії, $\mathcal{E}_i$ — розшарування на $\mathbf{E}_i$. Виникають запитання:

1. Як тензорно перемножити два розшарування $\pi_{1*}(\mathcal{E}_1) \otimes \pi_{2*}(\mathcal{E}_2)$?
2. Як обчислити $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_\mathbf{E}}(\pi_{1*}(\mathcal{E}_1), \pi_{2*}(\mathcal{E}_2))$?

Розглянемо розшарований добуток $\tilde{\mathbf{E}}$ многовидів $\mathbf{E}_1$ і $\mathbf{E}_2$ над базою $\mathbf{E}$

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathbf{E}} & \xrightarrow{p_1} & \mathbf{E}_1 \\ \downarrow p_2 & & \downarrow \pi_1 \\ \mathbf{E}_2 & \xrightarrow{\pi_2} & \mathbf{E} \end{array}.$$

Теорема 4. *Нехай* $\tilde{\pi} : \tilde{\mathbf{E}} \to \mathbf{E}$ *— результуюче відображення. Тоді*

$$\pi_{1*}(\mathscr{E}_1) \otimes \pi_{2*}(\mathscr{E}_2) \cong \tilde{\pi}_*\big(p_1^*(\mathscr{E}_1) \otimes p_2^*(\mathscr{E}_2)\big),$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbf{E}}}(\pi_{1*}(\mathscr{E}_1), \pi_{2*}(\mathscr{E}_2)) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\tilde{\mathbf{E}}}}\big(p_1^*(\mathscr{E}_1), p_2^*(\mathscr{E}_2)\big).$$

Доведення. Використовуючи формулу заміни бази та формулу проекції, одержуємо

$$\tilde{\pi}_*\big(p_1^*(\mathscr{E}_1) \otimes p_2^*(\mathscr{E}_2)\big) = \pi_{2*}p_{2*}\big(p_1^*(\mathscr{E}_1) \otimes p_2^*(\mathscr{E}_2)\big) = \pi_{2*}\big(p_{2*}p_1^*(\mathscr{E}_1) \otimes \mathscr{E}_2\big) =$$

$$= \pi_{2*}\big(\pi_2^*\pi_{1*}(\mathscr{E}_1) \otimes \mathscr{E}_2\big) = \pi_{1*}(\mathscr{E}_1) \otimes \pi_{2*}(\mathscr{E}_2).$$

Доведення другої тотожності повністю аналогічне попередньому. Замість формули проекції ми використовуємо спряженість функторів прямого та оберненого образів:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{E}}(\pi_{1*}(\mathscr{E}_1), \pi_{2*}(\mathscr{E}_2)) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{E}_2}(\pi_2^*\pi_{1*}(\mathscr{E}_1), \mathscr{E}_2) =$$

$$= \mathrm{Hom}_{\mathbf{E}_2}(p_{2*}p_1^*(\mathscr{E}_1), \mathscr{E}_2) = \mathrm{Hom}_{\tilde{\mathbf{E}}}(p_1^*(\mathscr{E}_1), p_2^*(\mathscr{E}_2)).$$

Нехай $\mathbf{E}_s$ — цикл із s прямих, $\pi_i : \mathbf{E}_{d_i s} \to \mathbf{E}_s$, $i = 1, 2$, — два етальних накриття. У цьому випадку ми можемо підрахувати розшарований добуток $\mathbf{E}_1$ та $\mathbf{E}_2$ над базою $\mathbf{E}$. Для цього зафіксуємо нумерацію незвідних компонент кривих $\mathbf{E}_1$ та $\mathbf{E}_2$ за допомогою чисел $0, 1, \ldots$. Вважатимемо, що кожне із зображень π_i переводить компоненту з номером 0 кривої $\mathbf{E}_i$ у компоненту з номером 0 кривої $\mathbf{E}$.

Теорема 5. *Нехай* $d = (d_1, d_2)$ *— найбільший спільний дільник,* $D = [d_1, d_2]$ *— найменше спільне кратне чисел* d_1 *і* d_2, $\tilde{\mathbf{E}} = \coprod_{i=1}^{d} \mathbf{E}_{Ds}^{(i)}$, $p_1 : \mathbf{E}_{Ds}^{(i)} \to \mathbf{E}_1$ *— етальне накриття, яке переводить компоненту з номером* i *кривої* $\mathbf{E}_{Ds}^{i}$ *у компоненту з номером* 0 *кривої* $\mathbf{E}_1$. *Тоді* $p_2 : \mathbf{E}_{Ds}^{(i)} \to \mathbf{E}_2$ *є етальним накриттям, яке переводить нульову компоненту в нульову.*

Доведення. Достатньо перевірити, що многовид $\tilde{\mathbf{E}}$ задовольняє універсальну властивість розшарованого добутку. Нехай $\mathbf{X}$ — деякий алгебраїчний многовид, $f_i : \mathbf{X} \to \mathbf{E}_i$ — два морфізми такі, що $\pi_1 f_1 = \pi_2 f_2$. Без обмеження загальності можемо вважати многовид $\mathbf{X}$ незвідним. Тоді образ кожного з відображень p_i повністю належить деякій із незвідних компонент кривої $\mathbf{E}_i$, $i = 1, 2$. Припустимо, що образ p_1 належить компоненті з номером a, $0 \le a < d_1 s$, а образ p_2 — компоненті з номером b, $0 \le b < d_2 s$. Потрібно довести, що існує однозначно визначена компонента кривої $\mathbf{E}_{Ds}^{(y)}$, $0 \le y < d$, з номером x, $0 \le x < Ds$, та відображення $\tilde{f} : \mathbf{X} \to \mathbf{E}_{Ds}^{(y)}$ таке, що $p_i \tilde{f} = f_i$, $i = 1, 2$. Це твердження еквівалентне однозначності існування розв'язку системи конгруенцій

$$x + ys \equiv a \mod d_1 s,$$

$$x \equiv b \mod d_2 s$$

з додатковими умовами $0 \le x < Ds$, $0 \le y < d$. Нехай $d_i = dd_i'$, $i = 1, 2$, де d_1', d_2' взаємно прості. З другого рівняння випливає $x = b + kd_2 s$. Використовуючи нерівність $0 \le x < Ds$, одержуємо $0 \le k < d_1'$. Аналогічно, з першого рівняння випливає $x + ys = a + ld_1 s$, $0 \le l \le d_2'$. Тому

$$ys = a - b + ds(ld_1' - kd_2').$$

При виконанні умови $0 \le y < d$ частка $ld_1' - kd_2'$ і остача ys визначені однозначно. Величина $ys - a + b$ кратна ds, тому її максимальне значення може бути $(d_2' - 1)ds$, а мінімальне — $(-d_1' + 1)ds$. Тому

$$(-d_1' + 1)ds \le ld_1' - kd_2' \le (d_2' - 1)ds.$$

Твердження теореми випливає тепер з такої очевидної леми.

Лема 1. *Нехай a, b — натуральні взаємно прості числа, $-a < k < b$. Тоді рівняння $ax - by = k$ має тільки один цілочисловий розв'язок, який належить множині $[0, b) \times [0, a]$.*

Як наслідок, одержуємо такий алгоритм для підрахунку тензорного добутку нерозкладних розшарувань.

Алгоритм 1. Нехай $\mathcal{B}(\mathbf{d}, 1, \lambda)$ і $\mathcal{B}(\mathbf{e}, 1, \mu)$ — два нерозкладні розшарування рангів k та l, $\mathbf{d} = d_1 d_2 \ldots d_k$, $\mathbf{e} = e_1 e_2 \ldots e_l$, D — найменше спільне кратне, d — найбільший спільний дільник k і l. Розглянемо d послідовностей

$$\mathbf{f}_1 = d_1 + e_1,\ d_2 + e_2, \ldots,\ d_k + e_0,$$

$$\mathbf{f}_2 = d_1 + e_2,\ d_2 + e_3, \ldots,\ d_k + e_1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,$$

$$\mathbf{f}_d = d_1 + e_d,\ d_2 + e_{d+1}, \ldots,\ d_k + e_{d-1}$$

(довжина кожної із послідовностей дорівнює D). Тоді

$$\mathcal{B}(\mathbf{d}, 1, \lambda) \otimes \mathcal{B}(\mathbf{e}, 1, \mu) \cong \bigoplus_{i=1}^{d} \mathcal{B}(\mathbf{f}_i, 1, \lambda^{l/d} \mu^{k/d}).$$

Зауважимо, що послідовність $\mathbf{f}_i$ може бути періодичною. Тому ми використовуємо позначення

$$\mathcal{B}(\mathbf{g}^l, 1, \lambda) = \bigoplus_{i=1}^{l} \mathcal{B}(\mathbf{g}, 1, \xi^i \sqrt[l]{\lambda}),$$

де $\mathbf{g}^l = \underbrace{\mathbf{g}\mathbf{g} \ldots \mathbf{g}}_{l}$, ξ — первісний корінь степеня l із одиниці.

За допомогою інших міркувань цей алгоритм вперше побудовано в [6].

3. Стабільні розшарування на раціональній кривій з простою подвійною точкою. Нехай $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{P}^2$ — крива, задана рівнянням $zy^2 = x^3 - zx^2$, $\mathscr{E}$ — локально вільний пучок на X. Згідно з теоремою Рімана – Роха

$$\deg(\mathscr{E}) = \chi(\mathscr{E}) + (p_a(\mathbf{E}) - 1)\operatorname{rank}(\mathscr{E}) = \chi(\mathscr{E}).$$

У випадку, коли $\mathscr{E}$ є когерентним пучком, цю формулу можна вважати визначенням степеня когерентного пучка.

Означення 1 (див. [11], означення 9.1.1). *Локально вільний пучок $\mathscr{E}$ називається стабільним, якщо для будь-якого пучка без скруту $\mathcal{F}$, який є власним фактор-пучком $\mathscr{E}$, виконується нерівність*

$$\frac{\deg(\mathscr{E})}{\operatorname{rank}(\mathscr{E})} < \frac{\deg(\mathcal{F})}{\operatorname{rank}(\mathcal{F})}.$$

Лема 2. *Нехай $\mathscr{E}$ — локально вільний пучок $\mathcal{F}$ без скруту. Тоді*

$$\deg(\mathscr{E} \otimes \mathcal{F}) = \deg(\mathscr{E})\operatorname{rank}(\mathcal{F}) + \deg(\mathcal{F})\operatorname{rank}(\mathscr{E}).$$

Доведення. Нехай

$$0 \to \mathscr{E}_1 \to \mathscr{E} \to \mathscr{E}_2 \to 0$$

— коротка точна послідовність локально вільних пучків. Тоді індукована коротка точна послідовність

$$0 \to \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{F} \to \mathcal{E} \otimes \mathcal{F} \to \mathcal{E}_2 \otimes \mathcal{F} \to 0$$

є точною. Звідси випливає

$$\deg(\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}) = \deg(\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{F}) + \deg(\mathcal{E}_2 \otimes \mathcal{F}).$$

Отже, твердження леми достатньо довести для випадку, коли $\mathcal{E}$ є лінійним розшаруванням. Але (див. [12], приклад 6.11.4) лінійне розшарування на $\mathbf{E}$ ізоморфне $O_{\mathbf{E}}(D_2 - D_1)$, де D_1 і D_2 є додатними дивізорами Вейля, носій яких належить множині регулярних точок. Розглянемо коротку точну послідовність

$$0 \to O(-D_1) \to O \to O_{D_1} \to 0.$$

Оскільки $\mathcal{F}$ є локально вільним пучком на множині регулярних точок, то $\mathcal{T}or_{O_{\mathbf{E}}}(\mathcal{F}, O_{D_1}) = 0$. Тому послідовність

$$0 \to O(-D_1) \otimes \mathcal{F} \to \mathcal{F} \to O_{D_1} \otimes \mathcal{F} \to 0$$

є точною. Аналогічно, точною є послідовність

$$0 \to O(-D_1) \otimes \mathcal{F} \to O(D_2 - D_1) \otimes \mathcal{F} \to O_{D_2} \otimes \mathcal{F} \to 0.$$

Зауважимо, що оскільки дивізори D_i, $i = 1, 2$, мають носії у регулярних точках, то

$$\deg(O_{D_i} \otimes \mathcal{F}) = \chi(O_{D_i} \otimes \mathcal{F}) = \deg(D_i)\operatorname{rank}(\mathcal{F}).$$

Звідси одержуємо

$$\deg(O(D_2 - D_1) \otimes \mathcal{F}) = \operatorname{rank}(\mathcal{F})(\deg(D_2 - D_1)) + \deg(\mathcal{F}),$$

що й потрібно довести.

Відомо (див., наприклад, [12], наслідок 5.3.4), що будь-яке стабільне розшарування є простим, тобто $\operatorname{End}_O(\mathcal{E}) = \mathbf{k}$. Виявляється (на це автору вказав А. Калдарару), що у випадку кривих арифметичного роду 1 справедливе також і обернене твердження.

Лема 3. *Нехай $\mathcal{E}$ — просте розшарування на кривій $\mathbf{E}$. Тоді розшарування $\mathcal{E}$ є також стабільним.*

Доведення. Припустимо, що розшарування $\mathcal{E}$ не є стабільним. Тоді існує пучок без скруту $\mathcal{F}$ такий, що послідовність $\mathcal{E} \to \mathcal{F} \to 0$ є точною і виконується нерівність

$$\frac{\deg(\mathcal{E})}{\operatorname{rank}(\mathcal{E})} \geq \frac{\deg(\mathcal{F})}{\operatorname{rank}(\mathcal{F})}.$$

Доведемо, що за цих умов $\operatorname{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{E}) \neq 0$. Це означатиме, що існує відображення

$$\mathcal{E} \to \mathcal{F} \to \mathcal{E},$$

яке не дорівнює нулю і не є ізоморфізмом. Тим самим буде одержано суперечність з умовою простоти $\mathcal{E}$.

Оскільки $\mathcal{E}$ — локально вільний пучок, можна застосувати теорему про двоїстість Серра:

$$\operatorname{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{E}) = \operatorname{Ext}^1(\mathcal{E}, \mathcal{F}) = H^1(\mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{F}).$$

За теоремою Рімана – Роха

$$h^0(\mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{F}) - h^1(\mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{F}) = \deg(\mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{F}).$$

Але згідно з попередньою лемою

$$\deg(\mathscr{E}^\vee \otimes \mathcal{F}) = -\deg(\mathscr{E})\operatorname{rank}(\mathcal{F}) + \operatorname{rank}(\mathscr{E})\deg(\mathcal{F}) \leq 0.$$

З іншого боку, $h^0(\mathscr{E}^\vee \otimes \mathcal{F}) = \dim_{\mathbf{k}}(\operatorname{Hom}(\mathscr{E}, \mathcal{F})) > 0$. Тому $h^1(\mathscr{E}^\vee \otimes \mathcal{F}) > 0$. Отже, розшарування $\mathscr{E}$ не є простим.

Таким чином, класифікація стабільних розшарувань зводиться до опису простих розшарувань. Розмірність простору ендоморфізмів нерозкладного розшарування можна легко підрахувати, використовуючи таку теорему.

Теорема 6 (див. [4], теорема 4.1, та [10]). *Нехай* $\mathscr{E} = \mathcal{B}(\mathbf{d}, m, \lambda)$, $\mathbf{d} = d_1 d_2 \ldots d_r$, *— нерозкладне розшарування. Тоді*

$$\dim_{\mathbf{k}}(H^0(\mathscr{E})) = m\left(\sum_{i=1}^{r}(d_i+1)^+ - \theta(\mathbf{d})\right) + \delta(\mathbf{d}, \lambda).$$

Дамо пояснення позначень величин, які фігурують в останній формулі:

$$\delta(\mathbf{d}, \lambda) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \overline{d} = 0,\ \lambda = 1; \\ 0 & \text{для решти випадків,} \end{cases}$$

$$k^+ = \begin{cases} k, & \text{якщо } k > 0; \\ 0, & \text{якщо } k \leq 0. \end{cases}$$

Підпослідовність $\mathbf{p} = (d_{k+1}, d_{k+2}, \ldots, d_{k+l})$ із $d_{k+j} \geq 0$ для $1 \leq j \leq l$ називається *додатним блоком* $\mathbf{d}$, якщо або $\mathbf{p} = \mathbf{d}$, або $d_k < 0$, $d_{k+l+1} < 0$. Величина $\theta(\mathbf{d})$ визначається за допомогою функції

$$\theta(\mathbf{p}) = \begin{cases} l, & \text{якщо } l = r \text{ або } \mathbf{p} = 00, \ldots, 0; \\ l+1 & \text{для решти випадків,} \end{cases}$$

підсумовування проводиться за всіма додатними блоками $\mathbf{d}$ послідовності $\mathbf{p}$:

$$\theta(\mathbf{d}) = \sum \theta(\mathbf{p}).$$

Наведемо також співвідношення

$$\mathcal{B}(\mathbf{d}, m, \lambda)^\vee \cong \mathcal{B}(-\mathbf{d}, m, \lambda^{-1}),$$

доведене у вказаних вище роботах.

Знайдемо необхідні та достатні умови для параметрів $\mathbf{d}, m, \lambda$, щоб розшарування $\mathscr{E} = \mathcal{B}(\mathbf{d}, m, \lambda)$ було простим. Використаємо той факт, що

$$\operatorname{End}(\mathscr{E}) = H^0(\mathscr{E}^\vee \otimes \mathscr{E}).$$

Застосовуючи формулу для тензорного добутку, одержуємо необхідні та достатні умови стабільності розшарування $\mathcal{B}(\mathbf{d}, m, \lambda)$.

Розшарування $\mathcal{B}(\mathbf{d}, m, \lambda)$ буде стабільним тоді і тільки тоді, коли виконуються такі умови:

1) $m = 1$;

2) $\left|d_i - d_j\right| \leq 1$ для всіх $1 \leq i, j \leq r$;

3) усі можливі різниці $\mathbf{d} - \mathbf{d}[t]$, де $\mathbf{d}[t] = d_{t+1} \ldots d_r d_1 \ldots d_{t-1} d_t$ — зсув послідовності $\mathbf{d}$, не містять підпослідовності $10 \ldots 01$.

Нехай $\mathscr{E} = \mathcal{B}(\mathbf{d}, 1, \lambda)$ — просте розшарування. За допомогою множення на лінійне розшарування можна отримати послідовність $\mathbf{d}$, що складається з нулів і одиниць.

Припустимо, що $\mathbf{d} = 01$. Тоді $\mathcal{B}(\mathbf{d}, 1, \lambda)$ є простим розшаруванням. Нехай довжина послідовності $\mathbf{d}$ більша, ніж 2. Оскільки послідовність $0101 \ldots 01$ є періодичною (а такі послідовності мають бути виключеними з розгляду), приходимо до висновку, що або 11, або 00 є підпослідовністю **d**, причому з третьої умови, яка характеризує стабільні розшарування, випливає, що одна можливість виключає іншу. Тобто якщо 11 є підпослідовністю **d**, то **d** не може містити 00, і навпаки.

Припустимо, що **d** містить 11. Нехай $\underbrace{11\ldots1}_{k+1 \text{ разів}}$ — найдовший блок із одиниць в **d**. Тоді **d** не може містити блок $\underbrace{11\ldots1}_{\leq k-1 \text{ разів}}$ (це знову випливає з третьої умови, яка характеризує стабільні розшарування). Введемо позначення $a = \underbrace{11\ldots1}_{k+1 \text{ разів}}$, $b = \underbrace{11\ldots1}_{k \text{ разів}}$. Тоді послідовність **d** матиме вигляд

$$0a0a\ldots0b0\ldots.$$

Зауважимо, що **d** однозначно відновлюється за допомогою послідовності

$$aa\ldots abb\ldots ba\ldots.$$

Як легко помітити, нова послідовність повинна задовольняти такі умови:

1) якщо виникла послідовність

$$\underbrace{aa\ldots a}_{k+1 \text{ разів}},$$

то не повинна виникнути підпослідовність

$$b\,\underbrace{aa\ldots a}_{\leq k-1 \text{ разів}}\,b;$$

2) навпаки, якщо виникла підпослідовність

$$\underbrace{bb\ldots b}_{k+1 \text{ разів}},$$

то не повинна виникнути підпослідовність

$$a\,\underbrace{bb\ldots b}_{k-1 \text{ разів}}\,a.$$

Тобто ми одержали ті ж самі умови, що й для послідовності **d**. Проте нова послідовність має меншу довжину. Таким чином, можна рекурентно продовжити цей процес: припустивши, що виникла підпослідовність aa, згрупувати $aa\ldots a$ в нові блоки і т. д.

Оскільки довжина послідовності постійно зменшується, даний процес обірветься через скінченну кількість кроків. Звідси випливає такий алгоритм побудови стабільних розшарувань.

Алгоритм 2. Починаємо з послідовності $aa\ldots ab$. Далі можна „роздути" цю послідовність у нову за допомогою одного з двох способів:

1. Замість кожної літери a підставляємо блок $\underbrace{aa\ldots a}_{k \text{ разів}}$, де $k \geq 2$, замість b — $\underbrace{aa\ldots a}_{k-1 \text{ разів}}$. Між кожним із блоків ставимо літеру b.

2. Замість кожної літери a підставляємо блок $\underbrace{aa\ldots a}_{k \text{ разів}}$, де $k \geq 1$, замість b — $\underbrace{aa\ldots a}_{k+1 \text{ разів}}$. Між кожним із блоків ставимо літеру b.

Нову послідовність можна роздувати далі за наведеним правилом. Припустимо, що на деякому кроці ми одержали послідовність **d**. Тоді можна підставити замість a 1 і замість b 0, або навпаки, замість a 0 і замість b 1.

Проаналізуємо цей алгоритм. Нехай на деякому кроці ми мали x літер a та y літер b. Тоді загальна довжина послідовності буде дорівнювати $x+y$. Таким чином, ми маємо трійку чисел $(x, y, x+y)$. Після ітерації даного алгоритму вона перейде в трійку $(k(x+y)-x, x+y, (k+1)(x+y))$ або ж у $(k(x+y)-y, x+y, (k+1)(x+y))$. Початкова трійка мала вигляд $(x, 1, x+1)$, у ній всі числа були взаємно простими. Але тоді вони залишаться взаємно простими і в „роздутій" трійці. Отже, якщо стабільне розшарування $\mathcal{E}$ має ранг r і степінь d, то вони є взаємно простими, $(r, d) = 1$.

Залишилося дослідити питання існування та однозначності розшарування з фіксованим рангом та степенем.

Нехай $r > 0$ — деяке ціле число, $0 \leq d < r$, $(r, d) = 1$. Без обмеження загальності можемо вважати, що $d \geq r-d$. Припустимо, ми маємо трійку $(d, r-d, r)$. Вона повинна продовжуватися з деякої трійки $(x, y, r-d)$, де $0 \leq$ $\leq y \leq x < r-d$, $x+y = r-d$. Тоді $d = k(r-d)-x$ або $d = k(r-d)-y$. При цьому $x+y=r$, тобто вибір x однозначно визначає y, і навпаки. На підставі додаткової умови $x \geq y$ звідси випливає, що трійка $(x, y, x+y)$ визначена однозначно.

Таким чином, ми довели один із основних результатів цієї статті, сформульований у вигляді теореми 1 у вступі, і тим самим одержали явну класифікацію стабільних розшарувань на раціональній кривій із однією простою подвійною точкою. Нехай $\mathbf{d} = d_1 d_2 \ldots d_r$ — неперіодична послідовність цілих чисел, $m \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbf{k}^*$. Тоді розшарування $\mathcal{B}(\mathbf{d}, m, \lambda)$ є стабільним розшаруванням рангу r, степеня d та детермінанта λ, якщо $d_1 + d_2 + \ldots + d_r = d$, $m = 1$ та послідовність $\mathbf{d}$ одержується за допомогою алгоритму 2.

Приклад. Знайдемо вектор степенів розшарування рангу 19 та степеня 11. Легко здійснити послідовність редукцій

$$(11, 8, 19) \to (5, 3, 8) \to (2, 1, 3).$$

Тому роздуття мають вигляд

$$aab \to aabaabab \to ababaababaabab aab.$$

Залишилося підставити 1 замість a і 0 замість b.

Автор висловлює щиру подяку Ю. Дрозду, А. Калдарару, Б. Кройслеру та І. Юдіну за плідні обговорення результатів статті.

1. *Atiyah M.* Vector bundles over an elliptic curve // Proc. London Math. Soc. – 1957. – **7**. – P. 414 – 452.
2. *Oda T.* Vector bundles on an elliptic curve // Nagoya Math. J. – 1971. – **43**. – P. 41 – 72.
3. *Drozd Yu., Greuel G.-M.* Tame and wild projective curves and classification of vector bundles // J. Algebra. – 2001. – **246**. – P. 1 – 54.
4. *Burban I., Drozd Yu., Greuel G.-M.* Vector bundles on singular projective curves // Appl. Algebr. Geom. Coding Theory, Phys. and Comput. – 2001. – P. 1 – 15.
5. *Burban I., Drozd Yu.* Coherent sheaves on singular projective curves with nodal singularities. – M., 2001. – 21 p. – (Preprint / arxiv: math.AG; № 0101140).
6. *Yudin I.* Tensor product of vector bundles on a cycle of projective lines: Diplomarbeit. – Kaiserslautern, 2001. – 60 p.
7. *Friedman R., Morgan J., Witten E.* Vector bundles over elliptic fibrations // J. Algebr. Geom. – 1999. – **2**, № 8. – P. 279 – 401.
8. *Polishchuk A., Zaslow E.* Categorical mirror symmetry: The elliptic curve // Adv. Theor. Math. Phys. – 1998. – **2**, № 2. – P. 443 – 470.
9. *Kreussler B.* Homological mirror symmetry in dimension one. – 2000. – 20 p. – (Preprint / arxiv: math.AG; № 0012018).
10. *Drozd Yu., Greuel G.-M., Kashuba I.* On Cohen – Macaulay modules over surface singularities. – Bonn, 2000. – 19 p. – (Preprint / MPI; № 76).
11. *Le Potier.* Lectures on vector bundles. — Cambridge Univ. Press, 1997. – 251 p.
12. *Хартсхорн Р.* Алгебраическая геометрия. – М.: Мир, 1981. – 599 с.

Одержано 21.01.2002