УДК 517.95

**М. І. Іванчов** (Львів. нац. ун-т)

# ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА З ВІЛЬНОЮ МЕЖЕЮ ДЛЯ РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

We establish conditions for the existence and uniqueness of a solution of inverse problem for a one-dimensional heat conduction equation with unknown time dependent leading coefficient in the case where a part of boundary is unknown.

Встановлено умови існування і єдиності розв'язку оберненої задачі для одновимірного рівняння теплопровідності з невідомим старшим коефіцієнтом, що залежить від часу, у випадку, коли частина межі області є невідомою.

В задачах теплопровідності з вільною межею невідомою є функція, що визначає цю межу, тобто один з параметрів процесу передачі тепла. З цієї точки зору задачі з вільною межею, зокрема однофазну задачу Стефана [1], можна розглядати як обернені задачі і для відшукання невідомої функції задавати деякі додаткові умови — так звані умови перевизначення, які можуть бути відмінними від додаткових умов задачі Стефана і навіть бути заданими не на невідомій межі. Такий підхід дозволяє застосувати до задач з вільною межею методику, розроблену для дослідження обернених задач. Більше того, в одній задачі можна об'єднати пошук як невідомої межі, так і невідомого коефіцієнта рівняння, розглядаючи її як обернену задачу з двома невідомими параметрами. Зауважимо, що обернену задачу для рівняння теплопровідності з невідомим старшим коефіцієнтом в області з відомою рухомою межею було розглянуто в [2].

В області $\Omega_T = \{(x,t): 0 < x < h(t),\ 0 < t < T < \infty\}$ з невідомою межею $x = h(t)$ розглянемо обернену задачу визначення невідомого коефіцієнта $a = a(t)$ в рівнянні

$$u_t = a(t)u_{xx} + f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_T, \tag{1}$$

коли задано початкову умову

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [0, h(0)], \tag{2}$$

крайові умови

$$u(0,t) = \mu_1(t), \qquad u(h(t),t) = \mu_2(t), \quad t \in [0,T], \tag{3}$$

та умови перевизначення

$$a(t)u_x(0,t) = \mu_3(t), \quad t \in [0,T], \tag{4}$$

$$\int_0^{h(t)} u(x,t)dx = \mu_4(t), \quad t \in [0,T]. \tag{5}$$

Заміною змінних $y = x/h(t)$, $t = t$ зведемо задачу (1) – (5) до оберненої задачі стосовно невідомих $a(t)$, $h(t)$, $v(y,t)$:

$$v_t = \frac{a(t)}{h^2(t)}v_{yy} + \frac{yh'(t)}{h(t)}v_y + f(yh(t),t), \quad (y,t) \in Q_T, \tag{6}$$

$$v(y,0) = \varphi(h(0)y), \quad y \in [0,1], \tag{7}$$

$$v(0,t) = \mu_1(t), \qquad v(1,t) = \mu_2(t), \quad t \in [0,T], \tag{8}$$

$$a(t)v_y(0,t) = \mu_3(t)h(t), \quad t \in [0,T], \tag{9}$$

$$h(t)\int_0^1 v(y,t)dy = \mu_4(t), \quad t \in [0,T], \tag{10}$$

де $Q_T = \{(y,t): 0 < y < 1,\ 0 < t < T\}$, $v(y,t) = u(yh(t),t)$.

**Означення.** *Під розв'язком задачі* (6) – (10) *будемо розуміти трійку функцій* $(h(t), a(t), v(y,t))$ *з класу* $C^1[0,T]\times C[0,T]\times C^{2,1}(\overline{Q}_T)$, $h(t)>0$, $a(t)>0$, $t\in[0,T]$, *що задовольняють умови* (6) – (10).

Припустимо, що виконуються такі умови:

A) $\mu_i(t)\in C^1[0,T]$, $\mu_i(t)>0$, $t\in[0,T]$, $i=\overline{1,4}$; $\varphi(x)\in C^2[0,h_0]$, $\varphi(x)>0$, $\varphi'(x)>0$, $x\in[0,h_0]$, де $h_0>0$ є розв'язком рівняння $\int_0^{h_0}\varphi(x)dx = \mu_4(0)$; $f(x,t)\in C^{1,0}([0,H_1]\times[0,T])$, $f(x,t)\ge 0$, $(x,t)\in[0,H_1]\times[0,T]$, де

$$H_1 = \max_{[0,T]}\mu_4(t)\left(\min\left\{\min_{[0,h_0]}\varphi(x),\ \min_{[0,T]}\mu_1(t),\ \min_{[0,T]}\mu_2(t)\right\}\right)^{-1};$$

B) $\varphi(0)=\mu_1(0)$, $\varphi(h(0))=\mu_2(0)$, $\int_0^1\varphi(h(0)x)dx=\mu_4(0)$.

Що стосується наявних в умовах A констант $h_0$, $H_1$, то з припущень $\varphi(x)>0$, $\mu_4(0)>0$ випливає існування єдиного значення $h(0)=h_0>0$, яке задовольняє рівняння

$$\int_0^{h(0)}\varphi(x)dx = \mu_4(0),$$

що входить до умов узгодження B. Визначення числа $H_1>0$ базується на таких міркуваннях. З умов A за принципом максимуму [3] для розв'язку задачі (6) – (8) у випадку довільних неперервних на $[0,T]$ функцій $h(t)>0$, $a(t)>0$ одержимо оцінку

$$v(y,t) \ge M_0 > 0, \quad (y,t)\in\overline{Q}_T, \tag{11}$$

де $M_0 = \min\left\{\min_{[0,h_0]}\varphi(x),\ \min_{[0,T]}\mu_1(t),\ \min_{[0,T]}\mu_2(t)\right\}$. Тоді з (10) отримаємо рівняння

$$h(t) = \frac{\mu_4(t)}{\int_0^1 v(y,t)dy}, \quad t\in[0,T], \tag{12}$$

для розв'язків якого, згідно з (11), справджуються нерівності

$$0 < h(t) \le H_1 < \infty, \quad t\in[0,T], \tag{13}$$

де $H_1 = \frac{1}{M_0}\max_{[0,T]}\mu_4(t)$.

Зведемо задачу (6) – (10) до системи рівнянь. Пряма задача (6) – (8) у випадку довільних неперервних на $[0,T]$ функцій $h(t)>0$, $h'(t)$, $a(t)>0$, еквівалентна рівнянню

$$v(y,t) = v_0(y,t) + \int_0^t\int_0^1 G_1(y,t,\eta,\tau)\eta\frac{h'(\tau)}{h(\tau)}v_\eta(\eta,\tau)d\eta d\tau, \quad (y,t)\in\overline{Q}_T, \tag{14}$$

де $G_1(y,t,\eta,\tau)$ — функція Гріна першої крайової задачі для рівняння [4]

$$v_t = \frac{a(t)}{h^2(t)}v_{yy}, \tag{15}$$

а $v_0(y,t)$ визначається формулою

$$v_0(y,t) = \int_0^1 G_1(y,t,\eta,0)\varphi(h_0\eta)d\eta + \int_0^t G_{1\eta}(y,t,0,\tau)\frac{a(\tau)}{h^2(\tau)}\mu_1(\tau)d\tau -$$

$$- \int_0^t G_{1\eta}(y,t,1,\tau)\frac{a(\tau)}{h^2(\tau)}\mu_2(\tau)d\tau + \int_0^t\int_0^1 G_1(y,t,\eta,\tau)f(\eta h(\tau),\tau)d\eta\, d\tau. \qquad (16)$$

З (14) та (16) знаходимо

$$v_y(y,t) = v_{0y}(y,t) + \int_0^t\int_0^1 G_{1y}(y,t,\eta,\tau)\eta\frac{h'(\tau)}{h(\tau)}v_\eta(\eta,\tau)d\eta\, d\tau, \qquad (17)$$

$$v_{0y}(y,t) = h_0\int_0^1 G_2(y,t,\eta,0)\varphi'(h_0\tau)d\eta - \int_0^t G_2(y,t,0,\tau)\mu_1'(\tau)d\tau +$$

$$+ \int_0^t G_2(y,t,1,\tau)\mu_2'(\tau)d\tau + \int_0^t\int_0^1 G_{1y}(y,t,\eta,\tau)f(\eta h(\tau),\tau)d\eta\, d\tau, \quad (y,t)\in\overline{Q}_T, \quad (18)$$

де $G_2(y,t,\eta,\tau)$ — функція Гріна другої крайової задачі для рівняння (15). При отриманні (18) за допомогою співвідношень

$$G_{1y}(y,t,\eta,\tau) = -G_{2\eta}(y,t,\eta,\tau), \qquad \frac{a(\tau)}{h^2(\tau)}G_{2\eta\eta}(y,t,\eta,\tau) = -G_{2\tau}(y,t,\eta,\tau)$$

було проведено інтегрування частинами.

З припущень A випливає оцінка

$$h_0\int_0^1 G_2(y,t,\eta,0)\varphi'(h_0\eta)d\eta \ \ge\ h_0\min_{[0,1]}\varphi'(h_0 y) \equiv M_1 > 0, \quad (y,t)\in\overline{Q}_T. \quad (19)$$

Тоді з (17), (18) робимо висновок про існування деякого числа $t_0$, $0 < t_0 \le T$, такого, що при $(y,t)\in\overline{Q}_{t_0}\equiv\{[0,1]\times[0,t_0]\}$ справджується нерівність

$$v_y(y,t) \ge \frac{1}{2}M_1 > 0. \qquad (20)$$

Очевидно, що виконання умови (20) рівносильне виконанню нерівності

$$\left| -\int_0^t G_2(y,t,0,\tau)\mu_1'(\tau)d\tau + \int_0^t G_2(y,t,1,\tau)\mu_2'(\tau)d\tau + \int_0^t\int_0^1 G_{1y}(y,t,\eta,\tau)f(\eta h(\tau),\tau)d\eta\, d\tau + \right.$$

$$\left. + \int_0^t\int_0^1 G_{1y}(y,t,\eta,\tau)\eta\frac{h'(\tau)}{h(\tau)}v_\eta(\eta,\tau)d\eta\, d\tau \right| \le \frac{1}{2}M_1, \quad (y,t)\in\overline{Q}_{t_0}. \qquad (21)$$

Оцінку для числа $t_0$ наведемо пізніше.

Виконання нерівності (20) надає можливість записати (9) у вигляді

$$a(t) = \frac{h(t)\mu_3(t)}{w(0,t)}, \quad t\in[0,t_0], \qquad (22)$$

де $w\equiv v_y$.

Рівняння (12) теж будемо розглядати на проміжку $[0,t_0]$:

$$h(t) = \frac{\mu_4(t)}{\int_0^1 v(y,t)dy}, \quad t\in[0,t_0]. \qquad (23)$$

Продиференціюємо (10) по $t$, використовуючи при цьому (6), внаслідок чого отримаємо

$$p(t) = \frac{1}{\mu_2(t)}\left(\mu_3(t) + \mu_4'(t) - h(t)\int_0^1 f(yh(t),t)dy - \frac{a(t)}{h(t)}w(1,t)\right), \quad t \in [0, t_0], \tag{24}$$

де через $p(t)$ позначено $h'(t)$. До рівнянь (22) – (24) приєднаємо рівняння (14), (17), записані у вигляді

$$v(y,t) = v_0(y,t) + \int_0^t\int_0^1 G_1(y,t,\eta,\tau)\eta\frac{p(\tau)}{h(\tau)}w(\eta,\tau)d\eta d\tau, \quad (y,t) \in \overline{Q}_{t_0}, \tag{25}$$

$$w(y,t) = v_{0y}(y,t) + \int_0^t\int_0^1 G_{1y}(y,t,\eta,\tau)\eta\frac{p(\tau)}{h(\tau)}w(\eta,\tau)d\eta d\tau, \quad (y,t) \in \overline{Q}_{t_0}. \tag{26}$$

Таким чином, якщо $(h(t), a(t), v(y,t))$ є розв'язком задачі (6) – (10) у сенсі наведеного вище означення, то функції $(h(t), a(t), p(t) \equiv h'(t), v(y,t), w(y,t) \equiv \equiv v_y(y,t))$ є неперервним розв'язком системи рівнянь (22) – (26). Правильним є і обернене твердження: якщо $(h(t), a(t), p(t), v(y,t), w(y,t)) \in \in (C[0,t_0])^3 \times \times (C(\overline{Q}_{t_0}))^2$, $h(t) > 0$, $a(t) > 0$, $t \in [0, t_0]$, є розв'язком системи рівнянь (22) – – (26), то функції $(h(t), a(t), v(y,t))$ є розв'язком задачі (6) – (10). Для цього достатньо довести, що ці функції належать класу $C^1[0,t_0] \times C[0,t_0] \times C^{2,1}(\overline{Q}_{t_0})$ і задовольняють умови (6) – (10).

Отже, нехай $(h(t), a(t), p(t), v(y,t), w(y,t)) \in (C[0,t_0])^3 \times (C(\overline{Q}_{t_0}))^2$, $h(t) > > 0$, $a(t) > 0$, $t \in [0, t_0]$, є розв'язком системи рівнянь (22) – (26). З умов А випливає, що $v_0(y,t) \in C^{1,0}(\overline{Q}_{t_0})$. Продиференціювавши (25) по $y$ і врахувавши єдиність розв'язку інтегральних рівнянь Вольтерри другого роду, отримаємо $w(y,t) \equiv v_y(y,t)$. Тоді на підставі (25) робимо висновок, що $v(y,t)$ належить $C^{2,1}(\overline{Q}_{t_0})$, є розв'язком рівняння

$$v_t = \frac{a(t)}{h^2(t)}v_{yy} + \frac{y\,p(t)}{h(t)}v_y + f(yh(t),t), \quad (y,t) \in Q_{t_0}, \tag{27}$$

і задовольняє умови (7), (8), (10). Із співвідношення $w(y,t) \equiv v_y(y,t)$ і (22) одержуємо виконання умови (9). Залишається довести, що $p(t) \equiv h'(t)$. З того, що $v(y,t) \in C^{2,1}(\overline{Q}_{t_0})$ і $\mu_4(t) \in C^1[0,T]$, випливає $h(t) \in C^1[0,T]$. Продиференціюємо еквівалентну (23) рівність (10) по $t$:

$$h'(t)\int_0^1 v(y,t)dy + h(t)\int_0^1 v_t(y,t)dy = \mu_4'(t).$$

Враховуючи виконання умови (10) і те, що функція $v(y,t)$ є розв'язком рівняння (27), отримуємо

$$\frac{h'(t)}{h(t)}\mu_4(t) + h(t)\left(\frac{a(t)}{h^2(t)}\left(v_y(1,t) - v_y(0,t)\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{p(t)}{h(t)}\int_0^1 y\,v_y(y,t)dy + \int_0^1 f(yh(t),t)dy\right) = \mu_4'(t).$$

Надамо останньому співвідношенню такого вигляду:

$$p(t) = \frac{1}{\mu_2(t)}\left(\mu_3(t) + \mu_4'(t) - h(t)\int_0^1 f(yh(t),t)dy \; - \right.$$

$$\left. - \frac{a(t)}{h(t)} v_y(1,t) + \frac{\mu_4(t)}{h(t)}\big(p(t) - h'(t)\big)\right).$$

Віднімаючи від даної рівності (24), одержуємо

$$p(t) - h'(t) = \frac{\mu_4(t)}{\mu_2(t)h(t)}\big(p(t) - h'(t)\big).$$

Звідси при

$$\frac{\mu_4(t)}{\mu_2(t)h(t)} - 1 \neq 0, \quad t \in [0, t_0], \tag{28}$$

знаходимо $p(t) \equiv h'(t)$, і еквівалентність задачі (6) – (10) та системи рівнянь (22) – (26) у зазначеному вище сенсі доведено. Виконання умови (28) випливає з того, що справджуються співвідношення

$$\mu_2(t) - \frac{\mu_4(t)}{h(t)} = v(1,t) - \int_0^1 v(y,t)dy = \int_0^1 y\, v_y(y,t)dy$$

і нерівність (20).

Для доведення існування розв'язку системи рівнянь (22) – (26) застосуємо теорему Шаудера. За принципом максимуму [3] та згідно з оцінками (11), (13) виконуються нерівності

$$0 < M_0 \leq v(y,t) \leq M_2 < \infty, \quad (y,t) \in \overline{Q}_T, \tag{29}$$

де стала $M_2 > 0$ визначається відомими величинами. Тоді з (10) отримуємо

$$h(t) \geq H_0 > 0, \quad t \in [0, T], \tag{30}$$

з відомою сталою $H_0$. Враховуючи (13) і (20), з (22) знаходимо оцінку $a(t)$ зверху:

$$a(t) \leq A_1 < \infty, \quad t \in [0, t_0]. \tag{31}$$

Використовуючи (13), з (24) одержуємо

$$|p(t)| \leq C_1 + C_2\frac{a(t)}{h(t)}W(t), \quad t \in [0, t_0], \tag{32}$$

де $W(t) = \max\limits_{y\in[0,1]} |w(y,t)|$. Нарешті, згідно з (18) та оцінками функції Гріна [4] з (26) випливає нерівність

$$W(t) \leq C_3 + C_4\int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}} + C_5\int_0^t\left(1 + \frac{1}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\right)\frac{|p(\tau)|}{h(\tau)}W(\tau)d\tau, \tag{33}$$

де $\theta(t) = \int_0^t \frac{a(\tau)}{h^2(\tau)}d\tau$. У відповідності з (30), (31) отримуємо

$$1 + \frac{1}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} = \frac{1 + \sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} \leq \frac{C_6}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}.$$

Тоді (33) набуває вигляду

$$W(t) \le C_3 + C_7 \int_0^t \left(1 + \frac{|p(\tau)|}{h(\tau)} W(\tau)\right) \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}}.$$

На підставі (32) звідси робимо висновок, що

$$W(t) \le C_3 + C_8 \int_0^t \left(1 + \frac{1}{h(\tau)} W(\tau) + \frac{a(\tau)}{h^2(\tau)} W^2(\tau)\right) \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}}. \tag{34}$$

Як видно з рівняння (22),

$$a(t) \ge \frac{C_9}{W(\tau)}.$$

Використавши останню нерівність, подамо (34) у вигляді

$$W_1(t) \le C_{10} + C_{11} \int_0^t \frac{a(\tau) W_1^2(\tau) d\tau}{h^2(\tau)\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}}, \tag{35}$$

де $W_1(t) = W(t) + 1$. Піднесемо обидві частини співвідношення (35) до квадрату, застосовуючи при цьому нерівність Коші:

$$W_1^2(t) \le C_{12} + C_{13} \left(\int_0^t \frac{a(\tau) W_1^2(\tau) d\tau}{h^2(\tau)\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}}\right)^2.$$

Звідси знаходимо

$$\int_0^t \frac{a(\tau) W_1^2(\tau) d\tau}{h^2(\tau)\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}} \le C_{14} + C_{13} \int_0^t \frac{a(\tau)}{h^2(\tau)\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}} \left(\int_0^\tau \frac{a(\sigma) W_1^2(\sigma) d\sigma}{h^2(\sigma)\sqrt{\theta(\tau) - \theta(\sigma)}}\right)^2 d\tau.$$

З нерівності Коші – Буняковського випливає

$$\int_0^t \frac{a(\tau) W_1^2(\tau) d\tau}{h^2(\tau)\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}} \le C_{14} + C_{13} \int_0^t \frac{a(\tau)}{h^2(\tau)\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}} \left(\int_0^\tau \frac{a(\sigma) d\sigma}{h^2(\sigma)\sqrt{\theta(\tau) - \theta(\sigma)}}\right) \times$$

$$\times \left(\int_0^\tau \frac{a(\sigma) W_1^4(\sigma) d\sigma}{h^2(\sigma)\sqrt{\theta(\tau) - \theta(\sigma)}}\right) d\tau,$$

тому

$$\int_0^t \frac{a(\tau) W_1^2(\tau) d\tau}{h^2(\tau)\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}} \le C_{14} + C_{15} \int_0^t \frac{a(\tau)}{h^2(\tau)\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}} \left(\int_0^\tau \frac{a(\sigma) W_1^4(\sigma) d\sigma}{h^2(\sigma)\sqrt{\theta(\tau) - \theta(\sigma)}}\right) d\tau. \tag{36}$$

Змінюючи в останньому інтегралі порядок інтегрування і застосовуючи очевидну рівність

$$\int_0^t \frac{a(\tau) d\tau}{h^2(\tau)\sqrt{(\theta(t) - \theta(\tau))(\theta(\tau) - \theta(\sigma))}} = \pi,$$

із співвідношення (36) одержуємо

$$\int_0^t \frac{a(\tau) W_1^2(\tau) d\tau}{h^2(\tau)\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}} \le C_{14} + C_{16} \int_0^t \frac{a(\sigma) W_1^4(\sigma) d\sigma}{h^2(\sigma)},$$

або, з урахуванням (30), (31),

$$\int_0^t \frac{a(\tau)W_1^2(\tau)d\tau}{h^2(\tau)\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} \le C_{14} + C_{17}\int_0^t W_1^4(\sigma)d\sigma.$$

Тоді нерівність (35) набуває вигляду

$$W_1(t) \le C_{18} + C_{19}\int_0^t W_1^4(\sigma)d\sigma. \tag{37}$$

Позначаючи

$$r(t) = C_{18} + C_{19}\int_0^t W_1^4(\sigma)d\sigma,$$

з (37) отримуємо

$$r'(t) \le C_{19}r^4(t).$$

Відокремлюючи змінні та інтегруючи це співвідношення, знаходимо оцінку

$$\frac{1}{3r^3(0)} - \frac{1}{3r^3(t)} \le C_{19}t.$$

Надамо їй такого вигляду:

$$r(t) \le \frac{C_{18}}{\sqrt[3]{1-3C_{18}^3C_{19}t}}. \tag{38}$$

Якщо на число $t_0$, $0 < t_0 \le T$, накласти умову

$$1 - 3C_{18}^3C_{19}t_0 > 0, \tag{39}$$

то з (38) отримаємо оцінку

$$r(t) \le C_{20} < \infty, \quad t \in [0, t_0], \tag{40}$$

а разом з нею і оцінку

$$|w(y,t)| \le W(t) \le M_3 < \infty, \quad (y,t) \in \overline{Q}_{t_0}. \tag{41}$$

Виконання співвідношень (41) надає можливість отримати з (32) і (22) такі нерівності:

$$|p(t)| \le M_4 < \infty, \quad t \in [0, t_0], \tag{42}$$

$$a(t) \ge A_0 > 0, \quad t \in [0, t_0]. \tag{43}$$

Отже, апріорні оцінки розв'язків системи рівнянь (22) – (26) знайдено.

Подамо систему рівнянь (22) – (26) у вигляді рівняння

$$\omega = P\omega, \tag{44}$$

де $\omega = (a(t), h(t), p(t), v(y,t), w(y,t))$, а оператор $P$ визначається правими частинами рівнянь (22) – (26). Позначимо

$$\mathcal{N} = \{(a(t), h(t), p(t), v(y,t), w(y,t)) \in (C[0,t_0])^3 \times (C(\overline{Q}_{t_0}))^2 : A_0 \le a(t) \le A_1,$$
$$H_0 \le h(t) \le H_1, \quad |p(t)| \le M_4, \quad M_0 \le v(y,t) \le M_2, \quad \frac{1}{2}M_1 \le w(y,t) \le M_3\}.$$

З оцінок (13), (29) – (31), (41) – (43) випливає, що оператор $P$ відображає множину $\mathcal{N}$ в себе. Те, що оператор $P$ є цілком неперервним, доводиться, як в [4]. Отже, за теоремою Шаудера існує розв'язок $(a(t), h(t), p(t), v(y,t), w(y,t))$

системи рівнянь (22) – (26) з класу $(C[0,t_0])^3 \times (C(\overline{Q}_{t_0}))^2$, а разом з ним і розв'язок задачі (6) – (10) $(a(t), h(t), v(y,t)) \in C[0,t_0] \times C^1[0,t_0] \times C^{2,1}(\overline{Q}_{t_0})$.

**Теорема 1.** *При виконанні умов* A, B *можна вказати таке число* $t_0$, $0 < t_0 \leq \leq T$, *яке визначається вихідними даними, що розв'язок задачі* (6) – (10) *існує при* $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq t \leq t_0$.

***Доведення.*** Як видно з доведеного вище, розв'язок задачі (6) – (10) існує, якщо число $t_0$, $0 < t_0 \leq T$, задовольняє умову (39) і є таким, що виконується умова (21). Для оцінки виразу у лівій частині (21) скористаємось нерівностями [4]

$$G_2(y,t,\eta,\tau) \leq C_{21}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\right),$$

$$\int_0^1 \left|G_{1y}(y,t,\eta,\tau)\right| d\eta \leq C_{22}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\right).$$

Тоді, врахувавши співвідношення (13), (29) – (31), (41) – (43), одержимо

$$\left| -\int_0^1 G_2(y,t,0,\tau)\mu_1'(\tau)d\tau + \int_0^1 G_2(y,t,1,\tau)\mu_2'(\tau)d\tau + \right.$$

$$\left. + \int_0^t\int_0^1 G_{1y}(y,t,\eta,\tau) f(\eta h(\tau),\tau) d\eta d\tau + \int_0^t\int_0^1 G_{1y}(y,t,\eta,\tau)\eta\frac{h'(\tau)}{h(\tau)} v_\eta(\eta,\tau)d\eta d\tau \right| \leq$$

$$\leq \left(C_{21}\left(\max_{[0,T]}\left|\mu_1'(t)\right| + \max_{[0,T]}\left|\mu_2'(t)\right|\right) + C_{22}\left(\max_{[0,H_1]\times[0,T]} f(x,t) + \frac{M_3 M_4}{H_0}\right)\right)\left(t + \frac{2H_1\sqrt{t}}{\sqrt{A_0}}\right),$$

і вибір такого значення $t_0$, $0 < t_0 \leq T$, щоб при $0 \leq t \leq t_0$ виконувались нерівності (21) і (39), стає очевидним. Теорему доведено.

Знайдемо умови єдиності розв'язку задачі (6) – (10).

**Теорема 2.** *Припустимо, що виконуються умови*:

1) $f(y,t) \in C^{1,0}([0,\infty) \times [0,T])$;

2) $\varphi(y) > 0$, $y \in [0,\infty)$, $\mu_i(t) > 0$, $i = 1, 2, 3$, $t \in [0,T]$, $f(y,t) \geq 0$, $(y,t) \in \in [0,\infty) \times [0,T]$.

*Тоді розв'язок задачі* (6) – (10) *єдиний.*

***Доведення.*** Нехай $(a_i(t), h_i(t), v_i(y,t))$, $i = 1, 2,$ — два розв'язки задачі (6) – – (10). Позначимо $\frac{a_i(t)}{h_i^2(t)} = \tilde{a}_i(t)$, $\frac{h_i'(t)}{h_i(t)} = q_i(t)$, $i = 1, 2$. Тоді різниці $a(t) = = \tilde{a}_1(t) - \tilde{a}_2(t)$, $q(t) = q_1(t) - q_2(t)$, $v(y,t) = v_1(y,t) - v_2(y,t)$ задовольняють умови

$$v_t = \tilde{a}_1(t)v_{yy} + yq_1(t)v_y + a(t)v_{2yy}(y,t) + yq(t)v_{2y}(y,t) +$$
$$+ f(yh_1(t),t) - f(yh_2(t),t), \quad (y,t) \in Q_T, \tag{45}$$

$$v(y,0) = 0, \quad y \in [0,1], \tag{46}$$

$$v(0,t) = v(1,t) = 0, \quad t \in [0,T], \tag{47}$$

$$\tilde{a}_1(t)v_y(0,t) = -a(t)v_{2y}(0,t) + \mu_3(t)\left(\frac{1}{h_1(t)} - \frac{1}{h_2(t)}\right), \quad t \in [0,T], \tag{48}$$

$$\int_0^1 v(y,t)dy = \mu_4(t)\left(\frac{1}{h_1(t)} - \frac{1}{h_2(t)}\right), \quad t \in [0,T]. \tag{49}$$

Виразимо $h_i(t)$ через $q_i(t)$:

$$h_i(t) = h_i(0)\exp\left(\int_0^t q_i(\tau)d\tau\right), \quad i = 1, 2. \tag{50}$$

Внаслідок умов теореми $h_1(0) = h_2(0) = h_0$. Тоді

$$\frac{1}{h_1(t)} - \frac{1}{h_2(t)} = \frac{1}{h_0}\left(\exp\left(-\int_0^t q_1(\tau)d\tau\right) - \exp\left(-\int_0^t q_2(\tau)d\tau\right)\right).$$

Звідси з використанням рівності

$$e^x - e^y = (x-y)\int_0^1 e^{y+\tau(x-y)}d\tau$$

отримаємо

$$\frac{1}{h_1(t)} - \frac{1}{h_2(t)} = -\frac{1}{h_0}\int_0^t q(\tau)d\tau\int_0^1 \exp\left(\int_0^t(\sigma q(\tau) - q_2(\tau))d\tau\right)d\sigma. \tag{51}$$

За допомогою функції Гріна $G_1^*(y, t, \eta, \tau)$ розв'язок задачі (45) – (47) подамо у вигляді

$$v(y, t) = \int_0^t\int_0^1 G_1^*(y, t, \eta, \tau)\big(a(\tau)v_{2\eta\eta}(\eta, \tau) + \eta q(\tau)v_{2\eta}(\eta, \tau) +$$

$$+ f(\eta h_1(\tau), \tau) - f(\eta h_2(\tau), \tau)\big)d\eta\, d\tau, \quad (y, t) \in \overline{Q}_T. \tag{52}$$

З умови (48) з урахуванням (51) одержимо

$$a(t)v_{2y}(0, t) = -\frac{\mu_3(t)}{h_0}\int_0^t q(\tau)d\tau\int_0^1 \exp\left(\int_0^t(\sigma q(\tau) - q_2(\tau))d\tau\right)d\sigma -$$

$$- \tilde{a}_1(t)w(0, t), \quad t \in [0, T], \tag{53}$$

де $w = v_y$ визначається, згідно з (52), за формулою

$$w(y, t) = \int_0^t\int_0^1 G_{1y}^*(y, t, \eta, \tau)\big(a(\tau)v_{2\eta\eta}(\eta, \tau) + \eta q(\tau)v_{2\eta}(\eta, \tau) +$$

$$+ f(\eta h_1(\tau), \tau) - f(\eta h_2(\tau), \tau)\big)d\eta\, d\tau, \quad (y, t) \in \overline{Q}_T. \tag{54}$$

Внаслідок того, що $v_i(y, t)$, $i = 1, 2$, є розв'язками задачі (6) – (10), справджуються рівності, аналогічні (24):

$$q_i(t) = \frac{1}{h_i(t)\mu_2(t)}\left(\mu_3(t) + \mu_4'(t) - h_i(t)\int_0^1 f(y h_i(t), t)dy - \frac{a_i(t)}{h_i(t)}w_i(1, t)\right), \quad t \in [0, T],$$

де $w_i = v_{iy}$. Віднімаючи їх одну від одної, знаходимо

$$q(t) = \frac{1}{\mu_2(t)}\left((\mu_3(t) + \mu_4'(t))\left(\frac{1}{h_1(t)} - \frac{1}{h_2(t)}\right) -\right.$$

$$\left.- \int_0^1 \big(f(yh_1(t), t) - f(yh_2(t), t)\big)dy - \tilde{a}_1(t)w_1(1, t) - \tilde{a}_2(t)w_2(1, t)\right), \quad t \in [0, T]. \tag{55}$$

Виконаємо в (55) такі перетворення:

$$f(yh_1(t),t)-f(yh_2(t),t) = y(h_1(t)-h_2(t))\int_0^1 f_x(y(h_2(t)+\sigma(h_1(t)-h_2(t))),t)d\sigma,$$

$$h_1(t)-h_2(t) = h_0\int_0^t q(\tau)d\tau\int_0^1 \exp\left(\int_0^t(\sigma q(\tau)+q_2(\tau))d\tau\right)d\sigma, \tag{56}$$

$$\bar{a}_1(t)w_1(1,t)-\bar{a}_2(t)w_2(1,t) = \bar{a}_1(t)w(1,t)+a(t)w_2(1,t).$$

Підставляючи (51), (52), (54), (56) у (53) та (55), одержуємо систему однорідних інтегральних рівнянь Вольтерри другого роду (53), (55) відносно невідомих $a(t)$, $q(t)$. З єдиності розв'язку таких систем випливає $a(t)\equiv 0$, $q(t)\equiv 0$, $t\in[0,T]$. Повертаючись до функцій $a_i(t)$, $h_i(t)$, $i=1,2$, отримуємо $a_1(t)\equiv a_2(t)$, $h_1(t)\equiv h_2(t)$, $t\in[0,T]$. Використовуючи це в задачі (45) – (47), знаходимо $v_1(y,t)\equiv v_2(y,t)$, $(y,t)\in\overline{Q_T}$, що завершує доведення теореми.

Зауважимо, що виконання вимоги $v_{2y}(0,t)\neq 0$ забезпечується припущенням $\mu_3(t)>0$. З доведення теореми також видно, як за рахунок додаткових припущень можна досягти того, що похідна $h'(t)$ не буде змінювати знак, а розв'язок задачі (6) – (10) буде визначено при всіх $t\in[0,T]$.

1. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. – М.: Мир, 1968. – 428 с.
2. *Малышев И. Г.* Обратные задачи для уравнения теплопроводности в областях с движущейся границей // Укр. мат. журн. – 1975. – **27**, № 5. – С. 687 – 691.
3. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.
4. *Иванчов Н. И.* Об определении зависящего от времени старшего коэффициента в параболическом уравнении // Сиб. мат. журн. – 1998. – **39**, № 3. – С. 539 – 550.

Одержано 29.01.2002,
після доопрацювання — 14.05.2002