УДК 517.5

Р. А. Ласурия (Абхаз. ун-т, Сухум)

КРАТНЫЕ СУММЫ ФУРЬЕ НА МНОЖЕСТВАХ $\overline{\psi}$-ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ (небольшая гладкость)

We study behavior of deviations of the rectangular partial Fourier sums on sets of $\overline{\psi}$-differentiable multivariable functions.

Вивчається поведінка відхилень прямокутних частинних сум Фур'є на множинах $\overline{\psi}$-диференційовних функцій багатьох змінних.

1. Пусть $f(x) = f(x_1, \ldots, x_m)$ — 2π-периодическая по каждой из переменных суммируемая на кубе периодов T^m функция ($f \in (T^m)$),

$$S[f] = \sum_{k_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{k_m=0}^{\infty} 2^{-q(k_1,\ldots,k_m)} A_{k_1,\ldots,k_m}(f;x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-q(k)} A_k(f;x), \tag{1}$$

где $q(k) = q(k_1, \ldots, k_m)$ — количество нулевых координат точки $k = (k_1, \ldots$ $\ldots, k_m)$,

$$A_k(f;x) = \sum_{\gamma \in P} a_k(f;\gamma) \prod_{i=1}^{m} \cos\left(k_i x_i - \gamma_i \frac{\pi}{2}\right), \tag{2}$$

P — множество всех точек $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m) \in R^m$, координаты которых имеют значения, равные нулю либо единице,

$$a_k(f;\gamma) = \pi^{-m} \int_{T^m} f(t) \prod_{i=1}^{m} \cos\left(k_i t_i - \gamma_i \frac{\pi}{2}\right) \tag{3}$$

— коэффициенты Фурье функции $f(\cdot)$, соответствующей наборам $k = (k_1, \ldots$ $\ldots, k_m)$ и γ. Объединяя (1)–(3), получаем

$$S[f] = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-q(k)} \pi^{-m} \int_{T^m} f(t) \prod_{i=1}^{m} \cos k_i (t_i - x_i)\, dt. \tag{1'}$$

Выражения (1) и (1′) называются полным рядом Фурье функции f.

Пусть $\overline{m} = \{1, \ldots, m\}$ и $\mu \subset \overline{m}$, $|\mu|$ — количество элементов множества μ. Для любой $f \in L(T^m)$ положим

$$S[f]_\mu = \sum_{k^\mu=0}^{\infty} 2^{-q(k)} \pi^{-|\mu|} \int_{T^{|\mu|}} f(t^\mu + x^{c\mu}) \prod_{i \in \mu} \cos k_i (t_i - x_i)\, dt^\mu, \tag{4}$$

где $k^\mu = (k_{j_1}, \ldots, k_{j_{|\mu|}})$, $j_1, \ldots, j_{|m|} \in \mu$, $t^\mu = (t_1, \ldots, t_m)$, причем $t_i = 0$, если $i \notin \mu$, $c\mu = \overline{m} \setminus \mu$, $x^{c\mu} = (x_1, \ldots, x_m)$ и $x_i = 0$, если $i \in \mu$.

Ряд (4) называется частным рядом Фурье функции $f(\cdot) \in L(T^m)$ по группе переменных x_i, $i \in \mu$. В случае, когда $\mu = \overline{m}$, $S[f]_\mu = S[f]$.

Пусть $\overline{\psi}_i(k_i) = \left(\psi_i^{(1)}(k_i), \psi_i^{(2)}(k_i)\right)$, $i = 1, \ldots, m$, — пары произвольных систем чисел $\psi_i^{(j)}(k_j)$, $j = 1, 2$, $k_i = 0, 1, \ldots$, $\psi_i^{(1)}(0) = 1$, $\psi_i^{(2)}(0) = 0$, $i = 1, \ldots, m$. Предположим, что для данной функции $f \in L(T^m)$ и набора μ ряд

$$\sum_{k^\mu=1}^{\infty} \pi^{-|\mu|} \int_{T^{|\mu|}} f(t^\mu + x^{c\mu}) \prod_{i\in\mu} \frac{\psi_i^{(1)}(k_i)\cos k_i(t_i - x_i) + \psi_i^{(2)}(k_i)\sin k_i(t_i - x_i)}{\overline{\Psi}_i^2(k_i)} dt^\mu,$$

$$\overline{\Psi}_i^{(2)}(k_i) \equiv \left(\psi_i^{(1)}(k_i)\right)^2 + \left(\psi_i^{(2)}(k_i)\right)^2 \neq 0, \quad k_i \in N, \quad i = 1, \ldots, m,$$

является рядом Фурье некоторой функции $\varphi \in L(T^m)$ по переменным x_i, $i \in \in \mu$. Эту функцию обозначим через $f^{\overline{\Psi}_\mu}(\cdot) = D^{\overline{\Psi}_\mu}(f; x)$ и назовем $\overline{\Psi}_\mu$-производной функции $f(\cdot)$. Множество функций $f \in L(T^m)$ таких, что для любого $\mu \subseteq \overline{m}$ существуют производные $f^{\overline{\Psi}_\mu}$, будем обозначать $L^{\overline{\Psi}_m} = L^{\overline{\Psi}}$. Если $f \in \in L^{\overline{\Psi}}$ и для любого $\mu \subset \overline{m}$ $f^{\overline{\Psi}_\mu} \in \mathfrak{N}$, где $\mathfrak{N}$ — некоторое подмножество из $L(T^m)$, то множество таких функций обозначим через $L^{\overline{\Psi}}\mathfrak{N}$.

Подмножество непрерывных функций из $L^{\overline{\Psi}}\mathfrak{N}$ обозначим через $C^{\overline{\Psi}}\mathfrak{N}$.

Понятие $\overline{\Psi}_\mu$-производной в случае $m = 1$ введено А. И. Степанцом [1]. При $m > 1$ определение $\overline{\Psi}_\mu$-производной для $\mu \subset \overline{m}$ совпадает с определением $(\psi, \beta)_\mu$-производной [2, 3] в том смысле, что любая $\overline{\Psi}_\mu$-производная совпадает с $(\psi, \beta)_\mu$-производной, если определяющие их параметры связаны соотношениями

$$\psi_i^{(1)}(k_i) = \psi_i(k_i)\cos\beta_i\frac{\pi}{2}, \qquad \psi_i^{(2)}(k_i) = \psi_i(k_i)\sin\beta_i\frac{\pi}{2}, \tag{5}$$

а также любая $(\psi, \beta)_\mu$-производная является и $\overline{\Psi}_\mu$-производной, если справедливы равенства (5).

Пусть, далее,

$$S_n(f; x) = \sum_{k=0}^{n-1} 2^{-q(k)} A_k(f; x) = \sum_{k=0}^{n-1} 2^{-q(k)} \pi^{-m} \int_{T^m} f(t) \prod_{i=1}^{m} \cos k_i(t_i - x_i)\, dt,$$

$n - 1 = (n_1 - 1, \ldots, n_m - 1)$ — прямоугольная частная сумма ряда (1) и

$$\rho_n(f; x) = f(x) - S_n(f; x).$$

В настоящей работе изучается поведение уклонений $\rho_n(f; x)$ на классах $C^{\overline{\Psi}}C$. С этой целью приведем еще некоторые определения (см., например, [1]).

Пусть $\mathfrak{M}$ — множество выпуклых вниз и исчезающих на бесконечности последовательностей λ_k, $k = 0, 1, \ldots$, $\mathfrak{M}'$ — подмножество λ_k из $\mathfrak{M}$, для которых

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k}{k} < \infty.$$

Последовательности $\psi_i^{(j)}(k_j)$, $j = 1, 2$, выбираются так, что $\pm\psi_i^{(1)} \in \mathfrak{M}$, $\pm\psi_i^{(2)} \in \mathfrak{M}'$, $i = 1, \ldots, m$. При этом $\psi_i^{(j)}(k_i)$, $j = 1, 2$, $k_i \in N$, удобно рассматривать как сужение на множестве N непрерывных функций $\psi_i^{(j)}(\upsilon_i)$ непрерывного аргумента $\upsilon_i \geq 1$. В дальнейшем $\mathfrak{M}$ — множество функций $\psi(\upsilon)$, для которых $|\psi(\upsilon)|$ являются выпуклыми вниз для любого $\upsilon \geq 1$ и $\lim\limits_{\upsilon\to\infty} \psi(\upsilon) = 0$, $\mathfrak{M}'$ — подмножество из $\mathfrak{M}$, элементы которого удовлетворяют условию

$$\int_1^{\infty} \frac{|\psi(t)|}{t} dt < \infty.$$

Далее, каждой функции $\psi \in \mathfrak{M}$ сопоставим пару функций

$$\eta(t) = \eta(\psi;t) = \psi^{-1}\left(\frac{1}{2}\psi(t)\right), \quad \mu(t) = \mu(\psi;t) = \frac{t}{\eta(t)-t}.$$

Тогда

$$\mathfrak{M}_0 = \{\psi \in \mathfrak{M} : 0 < \mu(t) \le K\}.$$

Пусть, далее, $\mathcal{T}_{\mu,n}$ — множество функций $t_{\mu,n} \in L(T^m)$, которые являются тригонометрическими полиномами порядка $n_i - 1$, $i \in \mu$, .

$$E_{\mu,n}(\varphi) = \inf_{t_{\mu,n} \in \mathcal{T}_{\mu,n}} \|\varphi - t_{\mu,n}\|_C$$

— наилучшее приближение функции $\varphi \in C$ посредством функций $t_{\mu,n} \in \mathcal{T}_{\mu,n}$.

2. Приведем сначала основные результаты данной работы.

Теорема 1. *Пусть* $\psi_i^{(1)} \in \mathfrak{M}_0$, $\psi_i^{(2)} \in \mathfrak{M}'_0$, $i = 1, \ldots, m$. *Тогда для любой функции* $f \in C^{\overline{\Psi}}C$ *и для каждого* $n \in N^m$

$$\|\rho_n(f;x)\|_C \le \sum_{k=1}^{m} \sum_{|\mu|=k} E_{\mu,n}\left(f^{\overline{\Psi}_\mu}\right) \prod_{l\in\mu} \mathcal{E}_{n_l}\left(C_\infty^{\overline{\Psi}_l}\right) + b_n^{\overline{\Psi}}(f), \tag{6}$$

где

$$\mathcal{E}_{n_l}\left(C_\infty^{\overline{\Psi}_l}\right) \equiv \frac{2}{\pi}\int_{n_l}^{\infty} \frac{|\psi_l^{(2)}(t_l)|}{t_l} dt_l + \frac{4}{\pi^2}\overline{\Psi}_l(n_l)\ln n_l,$$

$$b_n^{\overline{\Psi}}(f) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{|\mu|=k} E_{\mu,n}\left(f^{\overline{\Psi}_\mu}\right) \sum_{\substack{\bar\mu\subset\mu \\ \bar\mu\ne\mu}} \prod_{l\in\bar\mu} \mathcal{E}_{n_l}\left(C_\infty^{\overline{\Psi}_l}\right) \prod_{l\in\mu\setminus\bar\mu} K_l\overline{\Psi}_l(n_l) +$$

$$+ \sum_{k=2}^{m} \sum_{|\mu|=k} E_{\mu,n}\left(f^{\overline{\Psi}_\mu}\right) \prod_{l\in\mu''} \overline{\Psi}_l(n_l) \sum_{\bar\mu\subset\mu'} \prod_{l\in\bar\mu} \mathcal{E}_{n_l}\left(C_\infty^{\overline{\Psi}_l}\right) \prod_{l\in\mu'\setminus\bar\mu} K_l\overline{\Psi}_l(n_l) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} \sum_{|\mu|=k} E_{\mu,n}\left(f^{\overline{\Psi}_\mu}\right) \prod_{l\in\mu} K_l\overline{\Psi}_l(n_l), \tag{7}$$

μ' *и* μ'' — *непустые непересекающиеся подмножества из* μ, *причем* $\mu = \mu' \cup \cup \mu''$, K_l — *величины, равномерно ограниченные по* $n \in N^m$ *и* $f \in C^{\overline{\Psi}}C$.

Утверждение теоремы 1 при $m = 1$ переходит в соответствующее утверждение из работы [1], где, в частности, показано, что в одномерном случае неравенство (6) асимптотически точно на всем пространстве $C^{\overline{\Psi}}C$, а также на ряде важных подмножеств из $C^{\overline{\Psi}}C$.

Отметим некоторые из наиболее важных случаев неравенства (6).

Пусть

$$\mathfrak{M}_C = \{\psi \in \mathfrak{M} : 0 < K_1 \le \mu(t) \le K_2 < \infty,\ t \ge 1\}.$$

Ясно, что $\mathfrak{M}_C \subset \mathfrak{M}_0$. Если $\psi_2 \in \mathfrak{M}_C$, то, как известно [1],

$$\int_n^{\infty} \frac{|\psi_2(t)|}{t} dt \le K_2 |\psi_2(n)|,$$

следовательно, если $\psi_i^{(2)} \in \mathfrak{M}_C$, $\psi_i^{(1)} \in \mathfrak{M}_0$, $i = 1, \ldots, m$, то из неравенства (6) получаем следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть* $\psi_i^{(1)} \in \mathfrak{M}_0$, $\psi_i^{(2)} \in \mathfrak{M}_C$, $i = 1, \ldots, m$. *Тогда для любой функции* $f \in C^{\overline{\Psi}}C$

$$\| \rho_n(f,x) \|_C \le \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{4}{\pi^2}\right)^k \sum_{|\mu|=k} E_{\mu,n}\left(f^{\overline{\psi}_\mu}\right) \prod_{i\in\mu} \overline{\psi}_i(n_i) \ln n_i + b_n^{\overline{\psi}}(f), \qquad (8)$$

где

$$b_n^{\overline{\psi}}(f) \le K \sum_{k=1}^{m} \sum_{|\mu|=k} E_{\mu,n}\left(f^{\overline{\psi}_\mu}\right) \prod_{i\in\mu} \overline{\psi}_i(n_i) \sum_{\substack{\hat\mu\subset\mu \\ \hat\mu\neq\mu}} \prod_{i\in\hat\mu} \ln n_i. \qquad (9)$$

Пусть теперь функции $\psi_i^{(1)}(\cdot)$, $\psi_i^{(2)}(\cdot)$ выбраны согласно равенствам (5) при условии, что $\psi_i(\cdot) \in \mathfrak{M}_C$, $i = 1, \ldots, m$. Тогда $C^{\overline{\psi}}C = C_\beta^\psi C$ и $\psi_i^{(1)}$, $\psi_i^{(2)} \in \mathfrak{M}_C$. Вследствие этого в силу (8) и (9) получаем

$$\| \rho_n(f;x) \|_C \le \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{4}{\pi^2}\right)^k \sum_{|\mu|=k} E_{\mu,n}\left(f_{\beta,\mu}^{\psi}\right) \prod_{i\in\mu} |\psi_i(n_i)| \ln n_i +$$

$$+ K \sum_{k=1}^{m} \sum_{|\mu|=k} E_{\mu,n}\left(f_{\beta,\mu}^{\psi}\right) \prod_{i\in\mu} |\psi_i(k_i)| \sum_{\substack{\hat\mu\subset\mu \\ \hat\mu\neq\mu}} \prod_{i\in\hat\mu} \ln n_i. \qquad (10)$$

Неравенство (10) было получено в [2]. Из неравенства (6), где $\psi_i^{(2)}(\cdot) = 0$, $i = 1, \ldots, m$, для любого $\psi_i^{(1)} \in \mathfrak{M}_0$ вытекает неравенство, также установленное в [2].

3. Для доказательства теоремы 1 нам понадобится ряд вспомогательных предложений.

В одномерном случае справедливо такое утверждение [1].

Лемма 1. *Если $f \in C^{\overline{\psi}}M$, $\psi^{(1)} \in \mathfrak{M}$ и $\psi^{(2)} \in \mathfrak{M}'$, то в каждой точке $x \in R$ выполняется равенство*

$$\rho_n(f;x) = \int_R f^{\overline{\psi}}(x-t)\left[I_2\left(\psi^{(1)};n;t\right)_0 + I_2\left(\psi^{(2)};n;t\right)_1\right] dt +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_T f^{\overline{\psi}}(x-t)(\psi_1(n)\cos nt + \psi_2(n)\sin nt)\, dt, \qquad (11)$$

где M — множество существенно ограниченных функций из $L(T^m)$,

$$I_2\left(\psi^{(1)};n;t\right)_0 = \frac{1}{\pi}\int_n^\infty \psi_1(v)\cos vt\, dv,$$

$$I_2\left(\psi^{(2)};n;t\right)_1 = \frac{1}{\pi}\int_n^\infty \psi_2(v)\cos vt\, dv;$$

если $f \in L^{\overline{\psi}}$, то (11) выполняется почти всюду.

Лемма 2. *Если $f \in C^{\overline{\psi}}M$, $\psi_i^{(1)} \in \mathfrak{M}$ и $\psi_i^{(2)} \in \mathfrak{M}'$, $i = 1, \ldots, m$, то для любых $n \in N^m$ и $x \in R^m$*

$$S_n(f;x) = f(x) + \sum_{k=1}^{m}(-1)^k \sum_{|\mu|=k} \overline{E}_\mu(x) + \sum_{k=1}^{m}(-1)^k \sum_{|\mu|=k} \overline{P}_\mu(x) + \sum_{k=2}^{m}(-1)^k \sum_{|\mu|=k} \overline{Q}_\mu(x); \qquad (12)$$

если $f \in L^{\overline{\psi}}$, то (12) выполняется почти всюду, где

$$\overline{F}_\mu(x) = \overline{F}_\mu\left(f^{\overline{\psi}_\mu};x\right) = \int_{R^{|\mu|}} f^{\overline{\psi}_\mu}\left(x-(t)^\mu\right) \prod_{i\in\mu}\left[I_2\left(\psi_i^{(1)};n_i;t_i\right)_0 + I_2\left(\psi_i^{(2)};n_i;t_i\right)_1\right] dt^\mu, \qquad (13)$$

$$\overline{P}_\mu(x) = \overline{P}_\mu\left(f^{\overline{\psi}_\mu}; x\right) = (2\pi)^{-|\mu|} \prod_{i\in\mu} \overline{\psi}_i(n_i) \int_{T^{|\mu|}} f^{\overline{\psi}_\mu}\left(x-(t)^\mu\right) \prod_{i\in\mu} \sin(n_i t_i + \gamma_{n_i})\, dt^\mu, \tag{14}$$

$$\overline{Q}_\mu(x) = Q_\mu\left(f^{\overline{\psi}_\mu}; x\right) =$$

$$= (2\pi)^{-|\mu''|} \prod_{i\in\mu''} \overline{\psi}_i(n_i) \int_{R^{|\mu'|}} \int_{T^{|\mu''|}} f^{\overline{\psi}_\mu}\left(x-(t)^\mu\right) \prod_{i\in\mu''} \sin(n_i t_i + \gamma_{n_i}) \times$$

$$\times \prod_{i\in\mu'} \left[I_2\left(\psi_i^{(1)}; n_i; t_i\right)_0 + I_2\left(\psi_i^{(2)}; n_i; t_i\right)_1\right] dt^\mu,$$

$$\gamma_{n_i} = \operatorname{arctg}\frac{\psi_i^{(2)}(n_i)}{\psi_i^{(1)}(n_i)}, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{15}$$

Доказательство. Пусть при любом $\nu \in \overline{m}$

$$S_{n_\nu}(f; x) = \sum_{k_\nu=0}^{n_\nu-1} 2^{-q(k_\nu)} \pi^{-m} \int_T f\left(x+t^{\{\nu\}}\right) \cos k_\nu t_\nu\, dt_\nu \tag{16}$$

— сумма Фурье функции $f \in L(T^m)$ порядка $n_\nu - 1$ по переменной x_ν. Очевидно, что для любой функции $f \in L(T^m)$ и для каждого $n \in N^m$ и $x \in R^m$

$$S_n(f; x) = S_{n_m}\left(\ldots\left(S_{n_2}\left(S_{n_1}(f; x); x\right)\ldots; x\right)\right).$$

В силу равенства (11)

$$S_{n_\nu}(f; x) = f(x) - \int_R f^{\overline{\psi}_{\{\nu\}}}\left(x-t^{\{\nu\}}\right) \left[I_2\left(\psi_\nu^{(1)}; n_\nu; t_\nu\right)_0 + I_2\left(\psi_\nu^{(2)}; n_\nu; t_\nu\right)_1\right] dt_\nu -$$

$$- \frac{1}{2\pi}\int_T f^{\overline{\psi}_{\{\nu\}}}\left(x-t^{\{\nu\}}\right)\left(\psi_\nu^{(1)}(n_\nu)\cos n_\nu t_\nu + \psi_\nu^{(2)}(n_\nu)\sin n_\nu t_\nu\right) dt_\nu. \tag{17}$$

В частности, при $\nu = 1$

$$S_{n_1}(f; x) = f(x) - \int_R f^{\overline{\psi}_{\{1\}}}\left(x-t^{\{1\}}\right)\left[I_2\left(\psi_1^{(1)}; n_1; t_1\right)_0 + I_2\left(\psi_1^{(2)}; n_1; t_1\right)_1\right] dt_1 -$$

$$- \frac{1}{2\pi}\int_T f^{\overline{\psi}_{\{1\}}}\left(x-t^{\{1\}}\right)\left(\psi_1^{(1)}(n_1)\cos n_1 t_1 + \psi_1^{(2)}(n_1)\sin n_1 t_1\right) dt_1. \tag{18}$$

Далее, если $m = 2$, то

$$S_{n_2}\left(S_{n_1}(f; x); x\right) = S_{n_1}(f; x) - \int_R \left[S_{n_1}(f; x)\right]^{\overline{\psi}_{\{2\}}}\left(x-t^{\{2\}}\right) \times$$

$$\times \left[I_2\left(\psi_2^{(1)}; n_2; t_2\right)_0 + I_2\left(\psi_2^{(2)}; n_2; t_2\right)_1\right] dt_2 -$$

$$- \frac{1}{2\pi}\int_T \left[S_{n_1}(f; x)\right]^{\overline{\psi}_{\{2\}}}\left(x-t^{\{2\}}\right)\left(\psi_2^{(1)}(n_2)\cos n_2 t_2 + \psi_2^{(2)}(n_2)\sin n_2 t_2\right) dt_2. \tag{19}$$

Согласно (17) и (18)

$$\left[S_{n_1}(f; x)\right]^{\overline{\psi}_{\{2\}}}\left(x-t^{\{2\}}\right) = f^{\overline{\psi}_{\{2\}}}\left(x-t^{\{2\}}\right) -$$

$$- \left(\int_R f^{\overline{\psi}_{\{1\}}}\left(x-t^{\{1\}}\right)\left[I_2\left(\psi_1^{(1)}; n_1; t_1\right)_0 + I_2\left(\psi_1^{(2)}; n_1; t_1\right)_1\right] dt_1\right)^{\overline{\psi}_{\{2\}}}\left(x-t^{\{2\}}\right) -$$

$$- \left(\frac{1}{2\pi}\int_T f^{\overline{\psi}_{\{1\}}}\left(x-t^{\{1\}}\right)\left(\psi_1^{(1)}(n_1)\cos n_1 t_1 + \psi_1^{(2)}(n_1)\sin n_1 t_1\right) dt_1\right)^{\overline{\psi}_{\{2\}}}\left(x-t^{\{2\}}\right). \tag{20}$$

Второе слагаемое в (20) в силу определения производной $f^{\overline{\psi}_{\{1,2\}}}(\cdot)$ равно

$$\int\limits_{R} f^{\overline{\psi}_{\{1,2\}}}\left(x - t^{\{1,2\}}\right)\left[I_2\left(\psi_1^{(1)}; n_1; t_1\right)_0 + I_2\left(\psi_1^{(2)}; n_1; t_1\right)_1\right] dt_1. \tag{21}$$

Последнее же слагаемое в (20) равно

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{T} f^{\overline{\psi}_{\{1,2\}}}\left(x - t^{\{1,2\}}\right)\left(\psi_1^{(1)}(n_1)\cos n_1 t_1 + \psi_1^{(2)}(n_1)\sin n_1 t_1\right) dt_1. \tag{22}$$

На основании (22), (21) из (20) получаем

$$\begin{aligned}\left[S_{n_1}(f; x)\right]^{\overline{\psi}_{\{2\}}}\left(x - t^{\{2\}}\right) = {} & f^{\overline{\psi}_{\{2\}}}\left(x - t^{\{2\}}\right) - \\ & - \int\limits_{R} f^{\overline{\psi}_{\{1,2\}}}\left(x - t^{\{1,2\}}\right)\left[I_2\left(\psi_1^{(1)}; n_1; t_1\right)_0 + I_2\left(\psi_1^{(2)}; n_1; t_1\right)_1\right] dt_1 - \\ & - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{T} f^{\overline{\psi}_{\{1,2\}}}\left(x - t^{\{1,2\}}\right)\left(\psi_1^{(1)}(n_1)\cos n_1 t_1 + \psi_1^{(2)}(n_1)\sin n_1 t_1\right) dt_1.\end{aligned} \tag{23}$$

Объединяя (19) и (23), находим

$$\begin{aligned}S_{n_2}\left(S_{n_1}(f; x); x\right) = {} & f(x) - \int\limits_{R} f^{\overline{\psi}_{\{1\}}}\left(x - t^{\{1\}}\right)\left[I_2\left(\psi_1^{(1)}; n_1; t_1\right)_0 + I_2\left(\psi_1^{(2)}; n_1; t_1\right)_1\right] dt_1 - \\ & - \int\limits_{R} f^{\overline{\psi}_{\{2\}}}\left(x - t^{\{2\}}\right)\left[I_2\left(\psi_2^{(1)}; n_2; t_2\right)_0 + I_2\left(\psi_2^{(2)}; n_2; t_2\right)_1\right] dt_2 + \\ & + \int\limits_{R^2} f^{\overline{\psi}_{\{1,2\}}}\left(x - t^{\{1,2\}}\right) \prod_{j \in \{1,2\}}\left[I_2\left(\psi_j^{(1)}; n_j; t_j\right)_0 + I_2\left(\psi_j^{(2)}; n_j; t_j\right)_1\right] dt^{\{1,2\}} - \\ & - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{T} f^{\overline{\psi}_{\{1\}}}\left(x - t^{\{1\}}\right)\left(\psi_1^{(1)}(n_1)\cos n_1 t_1 + \psi_1^{(2)}(n_1)\sin n_1 t_1\right) dt_1 - \\ & - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{T} f^{\overline{\psi}_{\{2\}}}\left(x - t^{\{2\}}\right)\left(\psi_2^{(1)}(n_2)\cos n_2 t_2 + \psi_2^{(2)}(n_2)\sin n_2 t_2\right) dt_2 + \\ & + \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{T^2} f^{\overline{\psi}_{\{1,2\}}}\left(x - t^{\{1,2\}}\right) \prod_{j \in \{1,2\}}\left(\psi_j^{(1)}(n_j)\cos n_j t_j + \psi_j^{(2)}(n_j)\sin n_j t_j\right) dt^{\{1,2\}} + \\ & + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{R}\int\limits_{T} f^{\overline{\psi}_{\{1,2\}}}\left(x - t^{\{1,2\}}\right)\left(\psi_1^{(1)}(n_1)\cos n_1 t_1 + \psi_1^{(2)}(n_1)\sin n_1 t_1\right) \times \\ & \times \left[I_2\left(\psi_2^{(1)}; n_2; t_2\right)_0 + I_2\left(\psi_2^{(2)}; n_2; t_2\right)_1\right] dt^{\{1,2\}} + \\ & + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{T}\int\limits_{R} f^{\overline{\psi}_{\{1,2\}}}\left(x - t^{\{1,2\}}\right)\left(\psi_2^{(1)}(n_2)\cos n_2 t_2 + \psi_2^{(2)}(n_2)\sin n_2 t_2\right) \times \\ & \times \left[I_2\left(\psi_1^{(1)}; n_1; t_1\right)_0 + I_2\left(\psi_1^{(2)}; n_1; t_1\right)_1\right] dt^{\{1,2\}}.\end{aligned}$$

Если $m = 3$, то рассуждая аналогичным образом и учитывая обозначения (13) – (15), получаем

$$\begin{aligned}S_n(f; x) = {} & S_{n_3}\left(S_{n_2}\left(S_{n_1}(f; x); x\right); x\right) = \\ = {} & f(x) + \sum_{k=1}^{3}(-1)^k \sum_{|\mu| = k} \overline{E}_\mu(x) + \sum_{k=1}^{3}(-1)^k \sum_{|\mu| = k} \overline{P}_\mu(x) + \sum_{k=2}^{3}(-1)^k \sum_{|\mu| = k} \overline{Q}_\mu(x).\end{aligned}$$

Продолжая этот процесс при $m > 3$ и учитывая, что

$$\psi_j^{(1)}(n_j)\cos n_j t_j + \psi_j^{(2)}(n_j)\sin n_j t_j = \overline{\psi}_j(n_j)\sin\left(n_j t_j + \gamma_{n_j}\right),$$

$$\gamma_{n_j} = \operatorname{arctg}\frac{\psi_j^{(2)}(n_j)}{\psi_j^{(1)}(n_j)},$$

приходим к утверждению леммы 2.

Поскольку любой тригонометрический полином $t_{n-1}(\cdot)$ является $\overline{\psi}$-производной некоторого полинома $T_{n-1}(\cdot)$, то в силу равенства (11)

$$\int_R t_{n-1}(x-t)\left[I_2\left(\psi^{(1)};n;t\right)_0 + I_2\left(\psi^{(2)};n;t\right)_1\right]dt +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_T t_{n-1}(x-t)\,\overline{\psi}(n)\sin(nt+\gamma_n)\,dt \equiv 0.$$

Следовательно, если $t_{\{\nu\},n}(\cdot) \in \mathcal{T}_{\{\nu\},n}$, то согласно равенству (17) при условии, что $\psi_i^{(1)} \in \mathfrak{M}$ и $\psi_i^{(2)} \in \mathfrak{M}'$, для любого $\nu \in \overline{m}$

$$\int_R t_{\{\nu\},n}\left(x-t^{\{\nu\}}\right)\left[I_2\left(\psi_\nu^{(1)};n_\nu;t_\nu\right)_0 + I_2\left(\psi_\nu^{(2)};n_\nu;t_\nu\right)_1\right]dt_\nu \equiv 0 \qquad (24)$$

и

$$\frac{\overline{\psi}_\nu(n_\nu)}{2\pi}\int_T t_{\{\nu\},n}\left(x-t^{\{\nu\}}\right)\left(\sin n_\nu t_\nu + \gamma_{n_\nu}\right)dt_\nu \equiv 0. \qquad (25)$$

Вследствие (24) и (25) с учетом определения величин (13) – (15) для любого $t_{\mu,n} \in \mathcal{T}_{\mu,n}$, $\mu \subset \overline{m}$, и для любых $\psi_i^{(1)} \in \mathfrak{M}$ и $\psi_i^{(2)} \in \mathfrak{M}'$ имеем

$$\overline{F}_\mu\left(t_{\mu,n};x\right) \equiv \overline{P}_\mu\left(t_{\mu,n};x\right) \equiv \overline{Q}_\mu\left(t_{\mu,n};x\right) \equiv 0.$$

В результате этого из леммы 2 вытекает такое утверждение.

Лемма 3. *Пусть* $f \in C^{\overline{\psi}}M$, $\psi_i^{(1)} \in \mathfrak{M}$, $\psi_i^{(2)} \in \mathfrak{M}'$ *и*

$$\Delta_\mu(x) \equiv f^{\overline{\psi}_\mu}(x) - t_{\mu,n}(x), \qquad t_{\mu,n} \in \mathcal{T}_{\mu,n}.$$

Тогда для любых $n \in N^m$ *и* $x \in R^m$

$$\rho_n(f;x) = \sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}\sum_{|\mu|=k}\overline{F}_\mu(\Delta_\mu;x) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}\sum_{|\mu|=k}\overline{P}_\mu(\Delta_\mu;x) + \sum_{k=2}^{m}(-1)^{k+1}\sum_{|\mu|=k}\overline{Q}_\mu(\Delta_\mu;x). \qquad (26)$$

Анализируя доказательство теоремы 3 из работы [1], можно заключить, что справедливо следующее утверждение.

Лемма 4. *Пусть* $f \in C^{\overline{\psi}}C$, $\psi^{(1)} \in \mathfrak{M}_0$, $\psi^{(2)} \in \mathfrak{M}'_0$. *Тогда для любого* $n \in N^m$

$$\left\|\int_R \Delta_\mu(x-t)\left[I_2\left(\psi^{(1)};n;t\right)_0 + I_2\left(\psi^{(2)};n;t\right)_1\right]dt\right\|_C \le \|\Delta_\mu\|_C\,\delta(n,\overline{\psi}), \qquad (27)$$

где

$$\delta(n,\overline{\psi}) \equiv \frac{2}{\pi}\int_n^\infty \frac{|\psi_2(t)|}{t}dt + \frac{4}{\pi^2}\overline{\psi}(n)\ln n + K\overline{\psi}(n) \equiv \mathcal{E}_n\left(C_\infty^{\overline{\psi}}\right) + K\overline{\psi}(n), \qquad (28)$$

K *— величина, равномерно ограниченная по* $n \in N$ *и* $f \in C^{\overline{\psi}}C$.

4. ***Доказательство теоремы 1.*** Будем считать, что $\mu = \{1, 2, \ldots, s\}$. Рассмотрим выражение

$$I_s(x) = \int_{R^s} \Delta_\mu(x-t) \prod_{i=1}^{s} \left[I_2\left(\psi_i^{(1)}; n_i; t_i\right)_0 + I_2\left(\psi_i^{(2)}; n_i; t_i\right)_1 \right] dt =$$

$$= \int_R \int_{R^{s-1}} \Delta_\mu(x-t) \prod_{i=2}^{s} \left[I_2\left(\psi_i^{(1)}; n_i; t_i\right)_0 + \right.$$

$$\left. + I_2\left(\psi_i^{(2)}; n_i; t_i\right)_1 \right] dt^{\mu \setminus \{1\}} \left[I_2\left(\psi_1^{(1)}; n_1; t_1\right)_0 + I_2\left(\psi_1^{(2)}; n_1; t_1\right)_1 \right] dt_1.$$

Применяя к последнему интегралу неравенство (27), получаем

$$\| I_s(x) \|_C \le \| I_{s-1}(x) \|_C \, \delta(n_1; \overline{\psi}_1).$$

Продолжая применять лемму 4, находим

$$\| I_s(x) \|_C \le \| \Delta_\mu \|_C \prod_{i=1}^{s} \delta(n_i, \overline{\psi}_i). \tag{29}$$

В силу (29) из леммы 3 для величин $\overline{F}_\mu(\Delta_\mu; x)$ и $\overline{Q}_\mu(\Delta_\mu; x)$ будем иметь

$$\| \overline{F}_\mu(\Delta_\mu; x) \|_C \le \| \Delta_\mu \|_C \prod_{i=1}^{s} \delta(n_i, \overline{\psi}_i). \tag{30}$$

Аналогично

$$\| \overline{Q}_\mu(\Delta_\mu; x) \|_C \le$$

$$\le (2\pi)^{-|\mu''|} \prod_{i \in \mu''} \overline{\psi}_i(n_i) \left\| \int_{T^{|\mu''|}} \Delta_\mu\left(x - (t)^\mu\right) \prod_{i \in \mu''} \sin(n_i t_i + \gamma_{n_i}) \, dt^{\mu''} \right\|_C \prod_{i \in \mu'} \delta(n_i, \overline{\psi}_i).$$

Отсюда

$$\| \overline{Q}_\mu(\Delta_\mu; x) \|_C \le \| \Delta_\mu \|_C \prod_{i \in \mu''} \overline{\psi}_i(n_i) \prod_{i \in \mu'} \delta(n_i, \overline{\psi}_i). \tag{31}$$

Далее

$$\| \overline{P}_\mu(\Delta_\mu; x) \|_C \le \| \Delta_\mu \|_C \prod_{i \in \mu} \overline{\psi}_i(n_i). \tag{32}$$

Объединяя (30) – (32), с учетом леммы 3 получаем

$$\| \rho_n(f; x) \|_C \le \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{|\mu|=k} \| \Delta_\mu \|_C \prod_{i \in \mu} \delta(n_i, \overline{\psi}_i) + \sum_{|\mu|=k} \| \Delta_\mu \|_C \prod_{i \in \mu} \overline{\psi}_i(n_i) \right) +$$

$$+ \sum_{k=2}^{m} \sum_{|\mu|=k} \| \Delta_\mu \|_C \prod_{i \in \mu''} \overline{\psi}_i(n_i) \prod_{i \in \mu'} \delta(n_i; \overline{\psi}_i). \tag{33}$$

Если теперь

$$\inf_{t_{\mu,n} \in T_{\mu,n}} \left\| f^{\overline{\psi}_\mu} - t_{\mu,n} \right\|_C = \left\| f^{\overline{\psi}_\mu} - t^*_{\mu,n} \right\|_C = E_{\mu,n}\left(t^{\overline{\psi}_\mu}\right),$$

то вследствие (33) и (28) приходим к утверждению теоремы 1.

1. *Степанец А. И.* Приближение $\overline{\psi}$-интегралов периодических функций суммами Фурье (небольшая гладкость) ч. I, II // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 3. – Ч. I. – С. 274–291; – Ч. II. – С. 388–400.
2. *Степанец А. И., Пачулиа Н. Л.* Кратные суммы Фурье на множествах (ψ, β)-дифференцируемых функций // Кратные суммы Фурье на множествах (ψ, β)-дифференцируемых функций. – Киев, 1990. – С. 1–16. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 90.55).
3. *Степанец А. И., Пачулиа Н. Л.* Кратные суммы Фурье на множествах (ψ, β)-дифференцируемых функций // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 4. – С. 545–555.

Получено 18.03.2002