УДК 517.5

В. В. Савчук (Ін-т математики НАН України, Київ)

НАЙКРАЩІ ЛІНІЙНІ МЕТОДИ НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ КЛАСУ ХАРДІ H_p

We obtain exact value of the best linear polynomial approximation of the unit ball from the Hardy space H_p, $1 \le p \le \infty$, on concentric circles $\mathbb{T}\rho = \{z \in \mathbb{C} : |z| = \rho\}$, $0 \le \rho < 1$, in the uniform metric. We construct the best linear method of approximation and prove the uniqueness of this method.

Знайдено точне значення величини найкращого лінійного поліноміального наближення одиничної кулі простору Харді H_p, $1 \le p \le \infty$, на концентричних колах $\mathbb{T}\rho = \{z \in \mathbb{C} : |z| = \rho\}$, $0 \le \rho < 1$, в рівномірній метриці. Побудовано найкращий лінійний метод наближення та доведено єдиність цього методу.

Нехай $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ і H_p, $p > 0$, — простір Харді функцій, голоморфних в $\mathbb{D}$, для яких

$$\|f\|_{H_p} := \sup_{0<\rho<1} \left\{ \int_{\mathbb{T}} |f(\rho w)|^p \, d\sigma(w) \right\}^{1/p} < \infty,$$

де σ — нормована міра Лебега на одиничному колі $\mathbb{T}$.

Через H_∞ позначимо простір обмежених функцій, голоморфних в $\mathbb{D}$, з нормою

$$\|f\|_{H_\infty} := \sup_{z \in \mathbb{D}} |f(z)|,$$

а через B_p — одиничну кулю в H_p, $1 \le p \le \infty$,

$$B_p := \left\{ f \in H_p : \|f\|_{H_p} \le 1 \right\}.$$

Нехай функція $f \in H_p$ і

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}_k z^k, \quad z \in \mathbb{D},$$

— її ряд Тейлора, де

$$\hat{f}_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}.$$

Із зрозумілих причин в такий самий спосіб будемо позначати коефіцієнти Фур'є кожної функції f, визначеної та сумовної на одиничному колі $\mathbb{T}$. При цьому

$$\hat{f}_k = \int_{\mathbb{T}} f(w) w^{-k} \, d\sigma(w), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Добре відомо, що кожна функція f з простору H_p, $1 \le p \le \infty$, майже в кожній точці одиничного кола $\mathbb{T}$ має сумовні в p-му степені (при $p = \infty$ — істотно обмежені) недотичні граничні значення, які надалі будемо позначати також через f, враховуючи, що коефіцієнти Фур'є граничної функції збігаються з коефіцієнтами Тейлора самої функції.

Розглянемо послідовність лінійних операторів $\{U_n\}_0^\infty$, заданих на просторі H_p, що діють за правилом

$$U_n(f)(z) = U_{n,\Lambda}(f)(z) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k^n \hat{f}_k z^k, \tag{1}$$

де λ_k^n — елементи нескінченної нижньо-трикутної матриці $\Lambda := \{\lambda_k^n\}$, $n = \overline{0,\infty}$, $k = \overline{0,n}$, над полем комплексних чисел.

Таким чином, будь-яка нижньо-трикутна матриця Λ породжує за правилом (1) певний лінійний поліноміальний метод наближення функцій простору H_p.

Нехай $C(\mathbb{T}_\rho)$ — простір функцій, неперервних на колі $\mathbb{T}_\rho := \{z \in \mathbb{C} : |z| = \rho\}$, $\rho > 0$, з нормою

$$\|f\|_{C(\mathbb{T}_\rho)} := \max_{z\in\mathbb{T}_\rho} |f(z)|.$$

Величина

$$\mathcal{L}_n(B_p; C(\mathbb{T}_\rho)) := \sup_{f\in B_p} \inf_{\Lambda} \|f - U_n(f)\|_{C(\mathbb{T}_\rho)}, \quad n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\},$$

де інфімум береться за всіма можливими нижньо-трикутними матрицями Λ, називається найкращим лінійним наближенням класу B_p у просторі $C(\mathbb{T}_\rho)$. Якщо для заданих p, $1 \le p \le \infty$, і ρ, $0 \le \rho \le 1$, існує матриця Λ^*, яка породжує послідовність операторів $\{U_n^*\}_0^\infty$ таких, що

$$\sup_{f\in B_p} \|f - U_n^*(f)\|_{C(\mathbb{T}_\rho)} = \mathcal{L}_n(B_p; C(\mathbb{T}_\rho)), \quad n = \overline{0,\infty},$$

то матриця Λ^* називається найкращим методом наближення класу B_p у просторі $C(\mathbb{T}_\rho)$.

Л. В. Тайков [1] показав, що для будь-якого $n \in \mathbb{N}_0$

$$\mathcal{L}_n(B_\infty; C(\mathbb{T}_\rho)) = \rho^{n+1} \quad \forall \rho \in [0;1],$$

а найкращий лінійний метод (єдиний) має вигляд

$$\Lambda^* = \left\{1 - \rho^{2(n+1-k)}\right\}, \quad n = \overline{0,\infty}, \quad k = \overline{0,n}.$$

Стосовно цього результату важливо зазначити, що найкращий лінійний метод Λ^* виявився й найкращим агрегатом наближення класу B_∞ в тому розумінні, що підпростір многочленів

$$\mathcal{P}_n(B_\infty) := \left\{P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} (1-\rho^{2(n+1-k)}) a_k z^k : \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \in B_\infty,\ z \in \mathbb{D}\right\}$$

є оптимальним для величин найкращого многочленного і раціонального наближень $E_n(B_\infty; C(\mathbb{T}_\rho))$ і $R_n(B_\infty; C(\mathbb{T}_\rho))$, поперечників за Колмогоровим $d_n(B_\infty; C(\mathbb{T}_\rho))$, за Гельфандом $d^n(B_\infty; C(\mathbb{T}_\rho))$, за Бернштейном $b_n(B_\infty; C(\mathbb{T}_\rho))$ та лінійного $\delta_n(B_\infty; C(\mathbb{T}_\rho))$ (означення цих величин та оптимальних для них підпросторів див., наприклад, в [2]). Крім того,

$$E_n(B_\infty; C(\mathbb{T}_\rho)) = \rho^{n+1}, \qquad R_n(B_\infty; C(\mathbb{T}_\rho)) = \rho^{n+1}, \tag{2}$$

$$d_n(B_\infty; C(\mathbb{T}_\rho)) = d^n(B_\infty; C(\mathbb{T}_\rho)) = b_n(B_\infty; C(\mathbb{T}_\rho)) = \delta_n(B_\infty; C(\mathbb{T}_\rho)) = \rho^{n+1}. \tag{3}$$

Першу рівність в (2) доведено К. І. Бабенком [3], другу — А. Л. Левіним і В. М. Тихомировим [4], рівності (3) доведено В. М. Тихомировим [5].

У випадку, коли $p = 2$, як показано К. Ю. Осипенком та М. І. Стесіним [6],

$$\mathcal{L}_n(B_2; C(\mathbb{T}_\rho)) = d^n(B_2; C(\mathbb{T}_\rho)) = \delta_n(B_2; C(\mathbb{T}_\rho)) = \frac{\rho^{n+1}}{\sqrt{1-\rho^2}} \quad \forall \rho \in [0; 1), \quad (4)$$

при цьому найкращий лінійний метод $\Lambda^* = \{1\}$, $n = \overline{0, \infty}$, $k = \overline{0, n}$, тобто

$$U_{n,\Lambda}(f)(z) = S_n(f)(z) := \sum_{k=0}^{n} \hat{f}_k z^k$$

— n-та частинна сума ряду Тейлора функції f.

Наведені результати вказують на важливість досліджень величин $\mathcal{L}_n(B_p; C(\mathbb{T}_\rho))$ і для інших значень параметра p.

У даній роботі ми знаходимо точні значення величин $\mathcal{L}_n(B_p; C(\mathbb{T}_\rho))$ при $1 \le p < \infty$, $p \ne 2$, $0 \le \rho < 1$ та будуємо найкращий лінійний метод наближення.

Твердженням, що об'єднує результати робіт [1, 6] і отриманий нами результат, є така теорема.

Теорема. *Нехай* $0 \le \rho < 1$, $1 \le p \le \infty$. *Тоді*

$$\mathcal{L}_n(B_p; C(\mathbb{T}_\rho)) = \frac{\rho^{n+1}}{(1-\rho^2)^{1/p}} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0. \quad (5)$$

Найкращий лінійний метод Λ^* *єдиний і має вигляд* $\Lambda^* = \{\lambda_k^n\}$,

$$\lambda_k^n = (1-\rho^2)^{-2/p} \sum_{\nu=0}^{n-k} (-1)^\nu \binom{2/p}{\nu} (\rho^{2\nu} - \rho^{2(n+1-k)}), \quad n = \overline{0, \infty}, \quad k = \overline{0, n},$$

де

$$\binom{2/p}{0} = 1, \quad \binom{2/p}{\nu} := \frac{2/p\,(2/p-1)\ldots(2/p-\nu+1)}{\nu!}, \quad \nu = 1, 2, \ldots .$$

Зауваження. З доведення теореми буде видно, що справджується наступне твердження.

Наслідок. Нехай $1 \le p \le \infty$ *і* $\mathbb{D} \Supset K$, *де* K — *довільна непорожня власна підмножина круга* $\mathbb{D}$. *Тоді*

$$\sup_{f \in B_p} \inf_{\Lambda} \max_{z \in K} |f(z) - U_{n,\Lambda}(f)(z)| = \frac{\rho^{n+1}}{(1-\rho^2)^{1/p}} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0,$$

де $\rho = \max_{z \in K} |z|$.

У доведенні теореми суттєво використовується таке твердження.

Лема. *Для будь-якої функції* $f \in H_p$, $1 \le p \le \infty$, *в кожній точці* $z \in \mathbb{D}$ *виконується нерівність*

$$|f(z)| \le \|f\| \frac{|B_f(z)|}{(1-|z|^2)^{1/p}}, \quad (6)$$

де

$$B_f(z) := z^m \prod_{|z_k| \ne 0} \frac{-\bar{z}_k}{|z_k|} \frac{z - z_k}{1 - \bar{z}_k z}$$

— *добуток Бляшке, побудований за нулями* $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ *функції* f, m — *кількість точок* z_k, *що збігаються з точкою* $z = 0$.

Для будь-якої послідовності $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ *такої, що* $\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |z_k|) < \infty$, *функція*

$$f_*(z) := \left(\frac{1-|z_0|^2}{(1-\bar{z}_0 z)^2}\right)^{1/p} z^m \prod_{|z_k|\neq 0} \frac{-\bar{z}_k}{|z_k|}\frac{z-z_k}{1-\bar{z}_k z}$$

належить H_p *і для неї при* $z = z_0$ *співвідношення* (6) *є рівністю.*

Доведення цього твердження є нескладною вправою (див., наприклад, гл. 8 [7], гл. II [8]).

Доведення теореми. Одразу зазначимо, що в доведенні ми розглянемо також випадки $p = 2$ і $p = \infty$, оскільки використаний нами метод можна застосувати для всіх значень $1 \le p \le \infty$.

Враховуючи, що рівність (5) є тривіальною при $\rho = 0$, надалі будемо вважати, що $0 < \rho < 1$.

Зауважимо, що для кожної функції $f \in H_p$, $1 \le p \le \infty$, виконується співвідношення

$$\int_{\mathbb{T}} f(w) g(w) w \, d\sigma(w) = 0 \quad \forall\, g \in H_q, \quad p^{-1} + q^{-1} = 1.$$

Звідси та згідно з формулою Коші випливає, що для будь-якої нижньо-трикутної матриці Λ різницю $f(z) - U_{n,\Lambda}(f)(z)$ можна подати у вигляді

$$f(z) - U_{n,\Lambda}(f)(z) =$$

$$= \int_{\mathbb{T}} f(w)\left\{\frac{1}{1-\overline{w}z} - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k^n z^k \overline{w}^k\right\} d\sigma(w) =$$

$$= \int_{\mathbb{T}} f(w)\left\{\frac{1}{1-\overline{w}z} - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k^n z^k \overline{w}^k - w g(w)\right\} d\sigma(w)$$

$$\forall\, z \in \mathbb{D} \quad \forall\, g \in H_q, \quad p^{-1} + q^{-1} = 1. \tag{7}$$

Нехай $L_p(\mathbb{T})$, $1 \le p \le \infty$, — простір функцій, сумовних в p-му степені (при $p = \infty$ — істотно обмежених) на колі $\mathbb{T}$, і

$$L_{p,n}(\mathbb{T})_+ = \left\{ g \in L_p(\mathbb{T}) : \hat{g}_k = 0,\ k = \overline{-\infty, -(n+1)} \right\}.$$

Застосовуючи до інтегралу в правій частині рівності (7) нерівність Гельдера та враховуючи інваріантність класу B_p відносно повороту ($f \in B_p \Rightarrow f(e^{i\theta}\cdot) \in B_p$ $\forall\, \theta \in [0; 2\pi]$), отримуємо оцінку

$$\mathcal{L}_n(B_p; C(\mathbb{T}_\rho)) = \sup_{f \in B_p} \inf_{\Lambda_n} \left| f(\rho) - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k^n \hat{f}(k) \rho^k \right| \le$$

$$\le \left\{ \int_{\mathbb{T}} \left| \frac{1}{1-\overline{w}\rho} - g(w) \right|^q d\sigma(w) \right\}^{1/q} \quad \forall\, \rho \in (0; 1), \quad p^{-1} + q^{-1} = 1, \tag{8}$$

де g — будь-яка функція з $L_{p,n}(\mathbb{T})_+$, для якої ряд Фур'є має вигляд

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k^n \rho^k w^{-k} + \ldots$$

з першими $n+1$ коефіцієнтами λ_k^n — елементами матриці Λ.

Далі доведення рівності (5) розіб'ємо на два випадки: $1 < p \le \infty$ та $p = 1$.

1. **Нехай $1 < p \le \infty$.** Із співвідношень двоїстості (див., наприклад, гл. 8 [7], гл. IV [8]) випливає, що, з одного боку, існує єдина функція g^* така, що

$$\mathscr{E}(\rho, q) := \inf_{q \in L_{q,n}(\mathbb{T})_+} \left\{ \int_{\mathbb{T}} \left| \frac{1}{1-\overline{w}\rho} - g(w) \right|^q d\sigma(w) \right\}^{1/q} =$$

$$= \left\{ \int_{\mathbb{T}} \left| \frac{1}{1-\overline{w}\rho} - g^*(w) \right|^q d\sigma(w) \right\}^{1/q}, \quad 1 \le q < \infty. \tag{9}$$

а з другого —

$$\mathscr{E}(\rho, q) = \sup_{f \in B_{p,n}(\mathbb{T})} \left| \int_{\mathbb{T}} f(w) \frac{d\sigma(w)}{1-\overline{w}\rho} \right|, \tag{10}$$

де

$$B_{p,n}(\mathbb{T}) := \left\{ f \in L_p(\mathbb{T}) : \|f\|_{L_p(\mathbb{T})} \le 1,\ \hat{f}_k = 0,\ k = \overline{-\infty, n} \right\}, \quad 1 \le p \le \infty$$

(повне доведення цих співвідношень можна знайти, наприклад, в [9]).

Для знаходження супремуму в правій частині (10) зауважимо, що наявний у ній інтеграл є інтегралом Коші функції f з класу B_p, для якої $f(0) = f'(0) = \ldots$ $\ldots = f^{(n)}(0) = 0$. Тому за лемою

$$\mathscr{E}(\rho, q) = \frac{\rho^{n+1}}{(1-\rho^2)^{1/p}}, \tag{11}$$

а супремум в (10) досягається для функції

$$f^*(z) := z^{n+1} \left(\frac{1-\rho^2}{(1-\rho z)^2} \right)^{1/p}.$$

Виберемо у ролі лінійного методу матрицю

$$\Lambda = \left\{ \frac{\widehat{g^*_{-k}}}{\rho^k} \right\}, \quad n = \overline{0, \infty}, \quad k = \overline{0, n}. \tag{12}$$

Тоді, з урахуванням співвідношень (8) – (12), одержимо оцінку зверху

$$\mathcal{L}_n(B_p; C(\mathbb{T}_\rho)) \le \frac{\rho^{n+1}}{(1-\rho^2)^{1/p}}.$$

Для визначення оцінки знизу достатньо зауважити, що

$$f^*(z) = (1-\rho^2)^{1/p} z^{n+1} + \ldots \quad \forall z \in \mathbb{D},$$

тому

$$\inf_{\Lambda} \left| f^*(\rho) - U_{n,\Lambda}(f)(\rho) \right| = \left| f^*(\rho) \right| = \frac{\rho^{n+1}}{(1-\rho^2)^{1/p}},$$

що й треба було довести.

Лінійний метод (12) є й найкращим лінійним методом. Знайдемо його явний вигляд. Для цього досить визначити перші n коефіцієнтів Фур'є з недодатними індексами функції g^*.

Оскільки для функції g^* досягається інфімум у співвідношенні (9), а для f^* — супремум у (10), робимо висновок, що майже скрізь на $\mathbb{T}$ виконується рівність

$$\frac{1}{1-\overline{w}\rho} - g^*(w) = \frac{\rho^{n+1}}{(1-\rho^2)^{1/p}} \overline{f^*(w)} \left| f^*(w) \right|^{p-2},$$

де верхньою рискою позначено операцію комплексного спряження.

Таким чином, майже в кожній точці $w \in \mathbb{T}$

$$g^*(w) = \frac{1}{1-\rho\overline{w}} - \frac{\rho^{n+1}}{(1-\rho^2)^{1/p}} \overline{f^*(w)} \left| f^*(w) \right|^{p-2} =$$

$$= \frac{1}{1-\rho\overline{w}} - \frac{\rho^{n+1}}{(1-\rho^2)^{1/p}} \frac{\left| f^*(w) \right|^{p}}{f^*(w)} = \frac{1}{1-\rho\overline{w}} - \frac{\rho^{n+1}}{(1-\rho^2)^{2/p}} \overline{w}^{n+1}(1-\rho w)^{2/p} \frac{1-\rho^2}{|1-\rho w|^2}.$$

З огляду на цю рівність отримаємо

$$\hat{g}^*(-k) = \rho^k - \frac{\rho^{n+1}}{(1-\rho^2)^{2/p}} \int\limits_{\mathbb{T}} w^{k-n-1}(1-\rho w)^{2/p} \frac{1-\rho^2}{|1-\rho w|^2} d\sigma(w), \quad k = \overline{0,\infty}.$$

Враховуючи, що останній інтеграл є інтегралом Пуассона функції

$$\varphi(w) := w^{k-n-1}(1-\rho w)^{2/p},$$

неважко помітити, що при $k \geq n+1$

$$\hat{g}^*(-k) = \rho^k - \frac{\rho^{n+1}}{(1-\rho^2)^{2/p}} \rho^{k-n-1}(1-\rho^2)^{2/p} = 0.$$

Для обчислення коефіцієнтів $\hat{g}_*(-k)$ при $k = \overline{0,n}$ скористаємось розкладом

$$\varphi(w) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \binom{2/p}{\nu} \rho^{\nu} w^{\nu+k-n-1}.$$

Тоді

$$\int\limits_{\mathbb{T}} \varphi(w) \frac{1-\rho^2}{|1-\rho w|^2} d\sigma(w) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \binom{2/p}{\nu} \rho^{\nu+|\nu+k-n-1|} =$$

$$= \rho^{n+1-k} \sum_{\nu=0}^{n+1-k} (-1)^{\nu} \binom{2/p}{\nu} + \rho^{k-n-1} \sum_{\nu=n+2-k}^{\infty} (-1)^{\nu} \binom{2/p}{\nu} \rho^{2\nu}.$$

Таким чином,

$$\hat{g}^*(-k) = \frac{\rho^k}{(1-\rho^2)^{2/p}} \left((1-\rho^2)^{2/p} - \rho^{2(n+1-k)} \sum_{\nu=0}^{n+1-k} (-1)^{\nu} \binom{2/p}{\nu} - \right.$$

$$\left. - \sum_{\nu=n+2-k}^{\infty} (-1)^{\nu} \binom{2/p}{\nu} \rho^{2\nu} \right) =$$

$$= \frac{\rho^k}{(1-\rho^2)^{2/p}} \left(\sum_{\nu=0}^{n+1-k} (-1)^{\nu} \binom{2/p}{\nu} \rho^{2\nu} - \rho^{2(n+1-k)} \sum_{\nu=0}^{n+1-k} (-1)^{\nu} \binom{2/p}{\nu} \right).$$

Звідси, а також з (12) випливає, що при $1 \leq p \leq \infty$

$$\lambda_k^n = (1-\rho^2)^{-2/p} \sum_{\nu=0}^{n-k} (-1)^{\nu} \binom{2/p}{\nu} (\rho^{2\nu} - \rho^{2(n+1-k)}), \quad n = \overline{0,\infty}, \quad k = \overline{0,n}.$$

2. Нехай $p = 1$. У цьому випадку доведення рівності (5) таке ж, як і в попередньому, із заміною p на 1, а єдиність найкращого лінійного методу (12) доводиться так.

Згідно із співвідношеннями двоїстості (див. гл. 8 [7], гл. IV [8])

$$\mathscr{E}(\rho,\infty) := \inf_{g\in L_{\infty,n}} \operatorname*{ess\,sup}_{w\in\mathbb{T}} \left|\frac{1}{1-\overline{w}\rho} - g(w)\right| = \sup_{f\in B_{1,n}(\mathbb{T})} \left|\int_{\mathbb{T}} f(w)\frac{d\sigma(w)}{1-\overline{w}\rho}\right|, \tag{13}$$

але на відміну від попереднього випадку, коли функція g^*, для якої у співвідношенні (9) досягається екстремум, єдина, можна стверджувати лише існування функції $g^* \in L_{\infty,n}$, для якої

$$\mathscr{E}(\rho,\infty) = \operatorname*{ess\,sup}_{w\in\mathbb{T}} \left|\frac{1}{1-\overline{w}\rho} - g^*(w)\right|.$$

З іншого боку, якщо існує функція $f^* \in B_{1,n}(\mathbb{T})$ така, що

$$\int_{\mathbb{T}} f^*(w)\frac{d\sigma(w)}{1-\overline{w}\rho} = \mathscr{E}(\rho,\infty), \tag{14}$$

то функція g^*, для якої досягається екстремум, єдина і майже скрізь на $\mathbb{T}$

$$\left|\frac{1}{1-\overline{w}\rho} - g^*(w)\right| = \mathscr{E}(\rho,\infty). \tag{15}$$

У нашому випадку, з урахуванням (13), з леми випливає рівність

$$\mathscr{E}(\rho,\infty) = \frac{\rho^{n+1}}{1-\rho^2}$$

і те, що функція

$$f^*(z) = z^{n+1}\frac{1-\rho^2}{(1-\rho z)^2}$$

задовольняє (14).

Таким чином, функція g^* єдина, а отже, найкращий лінійний метод (12) також єдиний і в цьому випадку набирає простого вигляду

$$\Lambda^* = \{\lambda_k^n\}, \quad \lambda_k^n = \begin{cases} 1, & k = \overline{0, n-1}; \\ (1-\rho^2)^{-1}, & k = n. \end{cases}$$

Теорему доведено.

1. *Тайков Л. В.* О наилучших линейных методах приближения классов B^r и H^r // Успехи мат. наук. – 1963. – **18**, № 4. – С. 183 – 189.
2. *Pincus A.* n-Widths in approximation theory. – Berlin: Springer, 1985. – 291 p.
3. *Бабенко К. И.* Наилучшие приближения классов аналитических функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1958. – **22**, № 5. – С. 631 – 640.
4. *Левин А. Л., Тихомиров В. М.* О приближениях аналитических функций рациональными // Докл. АН СССР. – 1967. – **147**, № 2. – С. 279 – 282.
5. *Тихомиров В. М.* Поперечники множеств в функциональном пространстве и теория наилучших приближений // Успехи мат. наук. – 1960. – **15**, № 3. – С. 81 – 120.
6. *Осипенко К. Ю., Стесин М. И.* О поперечниках класса Харди H_2 в n-мерном шаре // Там же. – 1990. – **45**, № 5. – С. 193 – 194.
7. *Duren P.* Theory of H^p spaces. – New York: Acad. Press, 1970. – 258 p.
8. *Гарнет Дж.* Ограниченные аналитические функции. – М.: Мир, 1984. – 469 с.
9. *Степанец А. И., Савчук В. В.* Приближения интегралов типа Коши // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 5. – С. 706 – 740.

Одержано 25.06.2002