УДК 517.9

А. М. Самойленко (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ОБ ОДНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ПОЛИНОМОВ И РАДИУСЕ СХОДИМОСТИ ЕЕ СУММЫ ПУАССОНА – АБЕЛЯ

For a sequence of polynomials that appears in constructing the numerical-analytic method for finding periodic solutions of nonlinear differential equations, we determine the explicit form of the Poisson – Abel sum and the exact equation for the radius of convergence of this sum.

Для деякої послідовності поліномів, що виникла при побудові чисельно-аналітичного методу знаходження періодичних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь, знайдено явний вираз суми Пуассона – Абеля і точне рівняння для визначення радіуса збіжності цієї суми.

В работах [1, 2] рекуррентным соотношением

$$\alpha_n(t) = (1-2t)\int_0^t \alpha_{n-1}(s)\,ds + t\int_0^1 \alpha_{n-1}(s)\,ds, \tag{1}$$

$$\alpha_0 = 1, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad t \in [0;1],$$

определена последовательность полиномов и поставлена задача: найти радиус сходимости ряда Пуассона – Абеля

$$S(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(t)x^n, \quad t \in [0;1], \tag{2}$$

для последовательности (1).

Искомым радиусом является величина

$$r = \inf_{t\in[0;1]} r(t), \tag{3}$$

где $r(t)$ — радиус сходимости степенного ряда (2) при фиксированном значении $t \in [0;1]$.

Эта задача возникла из необходимости обоснования метода последовательных периодических приближений для нахождения периодических решений нелинейных систем дифференциальных уравнений, предложенного автором [1 – 3], составила предмет исследований ряда авторов [4 – 11] и окончательно решена в настоящей работе.

В заключительной части статьи приведены некоторые преобразования рекуррентного соотношения (1), упрощающие его использование.

Перейдем к изложению основной части работы. Вначале докажем, что все полиномы (1) удовлетворяют функциональному уравнению Римана [12]

$$f(t) = f(1-t). \tag{4}$$

Действительно, из (1) следует соотношение

$$\alpha_n(t) = (1-t)\int_0^t \alpha_{n-1}(s)\,ds + t\int_t^1 \alpha_{n-1}(s)\,ds, \tag{5}$$

откуда

$$\alpha_n(1-t) = t\int_0^{1-t} \alpha_{n-1}(s)\,ds + (1-t)\int_{1-t}^1 \alpha_{n-1}(s)\,ds. \tag{6}$$

Если предположить, что $\alpha_{n-1}(t)$ удовлетворяет уравнению (4), то из (6) получаем

$$\alpha_n(1-t) = t\int_0^{1-t}\alpha_{n-1}(1-s)ds + (1-t)\int_{1-t}^{1}\alpha_{n-1}(1-s)ds =$$

$$= t\int_t^1\alpha_{n-1}(s)ds + (1-t)\int_0^t\alpha_{n-1}(s)ds = \alpha_n(t). \qquad (7)$$

Для завершения доказательства на основе метода математической индукции достаточно проверить, что

$$\alpha_1(t) = 2t(1-t) \qquad (8)$$

также удовлетворяет уравнению (4).

Укажем другие свойства полиномов (1). Из (5) следует, что

$$\alpha_n(0) = \alpha_n(1) = 0, \quad \alpha_n(t) > 0, \quad t \in (0;1). \qquad (9)$$

Поскольку

$$\alpha_n(t) = \alpha_n(1-t), \quad n = 1, 2, \ldots, \qquad (10)$$

то

$$\alpha_n'(t) + \alpha_n'(1-t) = 0, \quad n = 1, 2, \ldots, \qquad (11)$$

где через $\alpha_n'(t)$ обозначена производная функции $\alpha_n(t)$. Из (11) делаем вывод, что

$$\alpha_n'\left(\frac{1}{2}\right) = 0. \qquad (12)$$

Докажем неравенство

$$\alpha_n'(t) > 0, \quad t \in \left[0; \frac{1}{2}\right), \quad n = 1, 2, \ldots. \qquad (13)$$

Для этого, учитывая (10), запишем (5) в виде

$$\alpha_n(t) = (1-t)\int_0^t\alpha_{n-1}(s)ds + t\int_t^1\alpha_{n-1}(1-s)ds =$$

$$= (1-t)\int_0^t\alpha_{n-1}(s)ds + t\int_0^{1-t}\alpha_{n-1}(s)ds, \qquad (14)$$

продифференцируем и в результате получим

$$\alpha_n'(t) = -\int_0^t\alpha_{n-1}(s)ds + (1-t)\alpha_{n-1}(t) + \int_0^{1-t}\alpha_{n-1}(s)ds - t\alpha_{n-1}(t) =$$

$$= \int_t^{1-t}\alpha_{n-1}(s)ds + (1-2t)\alpha_{n-1}(t). \qquad (15)$$

В силу (9) оба слагаемых справа в формуле (15) положительны при

$$t \in \left[0; \frac{1}{2}\right),$$

поэтому верно неравенство (13). Тогда из (11) следует, что

$$\alpha_n'(t) < 0, \quad t \in \left(\frac{1}{2}; 1\right], \quad n = 1, 2, \ldots. \qquad (16)$$

Согласно (12), (13), (16) полиномы $\alpha_n(t)$, $n = 1, 2, \ldots$, имеют максимумы на отрезке $[0; 1]$ в точке $t = 1/2$:

$$\max_{t\in[0;1]} \alpha_n(t) = \alpha_n\left(\frac{1}{2}\right), \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Поэтому

$$\alpha_n(t) \le \alpha_n\left(\frac{1}{2}\right), \quad t \in [0; 1], \quad n = 1, 2, \ldots,$$

и ряд (2) в области (3) мажорируется рядом

$$S\left(\frac{1}{2}, x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n\left(\frac{1}{2}\right) x^n, \quad x \ge 0, \tag{17}$$

радиус сходимости которого

$$r = \min_{t\in[0;1]} r(t) = r\left(\frac{1}{2}\right).$$

С учетом (14) из (1) получим

$$\alpha_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\int_0^1 \alpha_{n-1}(t)\,dt = \int_0^{1/2} \alpha_{n-1}(t)\,dt. \tag{18}$$

Последнее равенство означает, что

$$\alpha_n(t) = (1-2t)\int_0^t \alpha_{n-1}(s)\,ds + 2t\int_0^{1/2} \alpha_{n-1}(t)\,dt. \tag{19}$$

Найдем некоторые оценки для радиуса сходимости ряда (17). Для этого проинтегрируем (1) и в силу (18) получим

$$\int_0^{1/2} \alpha_n(t)\,dt = \int_0^{1/2} (1-2t)\int_0^t \alpha_{n-1}(s)\,ds\,dt + \frac{1}{8}\int_0^1 \alpha_{n-1}(t)\,dt =$$

$$= (t-t^2)\int_0^t \alpha_{n-1}(s)\,ds\Big|_0^{1/2} - \int_0^{1/2}(t-t^2)\alpha_{n-1}(t)\,dt + \frac{1}{4}\int_0^{1/2}\alpha_{n-1}(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{1/2}\alpha_{n-1}(t)\,dt - \int_0^{1/2}(t-t^2)\alpha_{n-1}(t)\,dt = \int_0^{1/2}\left(\frac{1}{2} - t + t^2\right)\alpha_{n-1}(t)\,dt. \tag{20}$$

Поскольку для $t \in [0; 1/2]$ верно неравенство

$$\frac{1}{4} \le \frac{1}{2} - t + t^2 \le \frac{1}{2},$$

то из (9) и (20) следует, что

$$\frac{1}{4}\int_0^{1/2}\alpha_{n-1}(t)\,dt \le \int_0^{1/2}\alpha_n(t)\,dt \le \frac{1}{2}\int_0^{1/2}\alpha_{n-1}(t)\,dt, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{21}$$

С учетом (18) неравенство (21) означает, что

$$\frac{1}{4} \le \frac{\alpha_{n+1}(1/2)}{\alpha_n(1/2)} \le \frac{1}{2}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

откуда в результате получаем оценку

$$2 \leq r \leq 4,$$

которая значительно уточняет гипотезу [11].

Теперь докажем, что

$$\alpha_n(t) > \alpha_{n+1}(t), \quad t \in (0; 1), \quad n = 0, 1, \ldots . \tag{22}$$

Согласно (1)

$$\alpha_2(t) = \frac{t(1-t)(1+4t-4t^2)}{3},$$

поэтому

$$d_1(t) = \alpha_1(t) - \alpha_2(t) = t(1-t)\left(2 - \frac{1+4t-4t^2}{3}\right) > 0 \tag{23}$$

для $t \in (0; 1)$. Обозначим

$$d_n(t) = \alpha_n(t) - \alpha_{n+1}(t), \quad n = 1, 2, \ldots .$$

В соответствии с (5)

$$d_{n+1}(t) = \alpha_{n+1}(t) - \alpha_{n+2}(t) = (1-t)\int_0^t (\alpha_n(s) - \alpha_{n+1}(s))\,ds \; +$$

$$+ \; t\int_t^1 (\alpha_n(s) - \alpha_{n+1}(s))\,ds = (1-t)\int_0^t d_n(s)\,ds + t\int_t^1 d_n(t)\,dt. \tag{24}$$

Если предположить, что

$$d_n(t) > 0, \quad t \in (0; 1),$$

то из (24) следует, что

$$d_{n+1}(t) > 0, \quad t \in (0; 1).$$

Для завершения доказательства неравенства (22) методом математической индукции достаточно учесть неравенство (23).

Перейдем к нахождению суммы ряда (2) в области

$$x \in [0; r). \tag{25}$$

В силу (19)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(t)x^n = 1 + x\left[(1-2t)\int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(s)x^n\,ds + 2t\int_0^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(t)x^n\,dt\right],$$

поэтому в области (25)

$$S(t,x) = 1 + x\left[(1-2t)\int_0^t S(s,x)\,ds + 2t\int_0^{1/2} S(t,x)\,dt\right]. \tag{26}$$

Из (26) и (17) следует, что

$$S\left(\frac{1}{2}, x\right) = 1 + x\int_0^{1/2} S(t,x)\,dt. \tag{27}$$

Таким образом, радиус сходимости r мажорантного ряда (17) определяется радиусом сходимости ряда

$$U(x) = \int_0^{1/2} S(t, x)\,dt. \tag{28}$$

Обозначим

$$U(t, x) = \int_0^t S(\tau, x)\,d\tau. \tag{29}$$

Тогда уравнение (26) для $U(t, x)$ примет вид дифференциального уравнения

$$U'(t, x) = 1 + x(1-2t)U(t, x) + 2xtU\left(\frac{1}{2}, x\right), \tag{30}$$

где

$$U'(t, x) = \frac{\partial U(t, x)}{\partial t}.$$

Интегрируя (30) с учетом начального значения

$$U(0, x) = 0,$$

определяемого из (29), находим явное выражение для $U(t, x)$:

$$U(t, x) = e^{x(t-t^2)}\left[\int_0^t e^{x(\tau^2-\tau)}\,d\tau + \int_0^t e^{x(\tau^2-\tau)} 2x\tau\,d\tau U\left(\frac{1}{2}, x\right)\right]. \tag{31}$$

Проведем простые преобразования правой части равенства (31). В результате получим

$$\int_0^t e^{x(\tau^2-\tau)} 2x\tau\,d\tau = \int_0^t \frac{d}{d\tau} e^{x(\tau^2-\tau)}\,d\tau + x\int_0^t e^{x\tau^2} e^{-x\tau}\,d\tau =$$

$$= \left(e^{x(t^2-t)} - 1\right) + x\int_0^t e^{x(\tau^2-\tau)}\,d\tau,$$

$$\int_0^t e^{x(\tau^2-\tau)}\,d\tau = e^{-x/4}\int_0^t e^{x(1/2-\tau)^2}\,d\tau = e^{-x/4}\int_{1/2-t}^{1/2} e^{x\tau^2}\,d\tau.$$

Поэтому согласно (31)

$$U(t, x) = e^{-x(t-1/2)^2}\int_{1/2-t}^{1/2} e^{x\tau^2}\,d\tau +$$

$$+ \left(1 - e^{x(t-t^2)} + xe^{-x(t-1/2)^2}\int_{1/2-t}^{1/2} e^{x\tau^2}\,d\tau\right)U\left(\frac{1}{2}, x\right), \tag{32}$$

откуда находим уравнение для

$$U(x) = U\left(\frac{1}{2}, x\right),$$

которое имеет вид

$$U(x) = \int_0^{1/2} e^{x\tau^2}\,d\tau + \left(1 - e^{x/4} + x\int_0^{1/2} e^{x\tau^2}\,d\tau\right)U(x),$$

следовательно,

$$\left(e^{x/4} - x\int_0^{1/2} e^{x\tau^2}\,d\tau\right)U(x) = \int_0^{1/2} e^{x\tau^2}\,d\tau. \tag{33}$$

Поскольку в области

$$|x| < r$$

ряд (28) определяет голоморфную функцию, то, как видно из (33), это возможно лишь тогда, когда r является положительным корнем уравнения

$$f(x) = e^{x/4} - x\int_0^{1/2} e^{x\tau^2}\,d\tau = 0. \tag{34}$$

Функция $f(x)$ является убывающей, поскольку

$$f'(x) = -\frac{1}{2}\int_0^{1/2} e^{x\tau^2}\,d\tau < 0.$$

Кроме того,

$$f(0) = 1, \quad f(+\infty) < 0.$$

Поэтому на интервале $[0; +\infty)$ существует единственный корень уравнения (34). Используя средства компьютерной алгебры Mathematica 4.0 [13], получаем, что этот корень находится в вилке

$$r_- = 3{,}416130626392787959 1385 < r < 3{,}4161306263927879591386 = r_+.$$

При этом невязка в левой и правой границах равна соответственно

$$f(r_-) = 0{,}19\ldots\cdot 10^{-22}, \quad f(r_+) = -0{,}14\ldots\cdot 10^{-22}.$$

Интересно отметить, что уравнение (34) можно записать через интеграл вероятности Гаусса. Действительно, легко проверить, что (34) — это не что иное, как уравнение

$$4\frac{d}{dx}\ln \operatorname{Erfi}\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right) = 1,$$

в котором использованы обозначения [12]

$$\operatorname{Erfi}(x) = -\frac{i\sqrt{\pi}}{2}\operatorname{erf}(ix) = \int_0^x e^{\sigma^2}\,d\sigma,$$

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

— интеграл вероятности Гаусса.

Запишем теперь $U(x)$ в виде

$$U(x) = \int_0^{1/2}\frac{e^{x\tau^2}\,d\tau}{e^{x/4} - x\int_0^{1/2} e^{x\tau^2}\,d\tau}. \tag{35}$$

Тогда в силу (27)

$$S\left(\frac{1}{2}, x\right) = 1 + xU(x), \tag{36}$$

а в силу (26), (29), (32), (35)

$$S(t,x) = 1 + x[(1-2t)U(t,x) + 2tU(x)]. \tag{37}$$

Тогда из (36), в частности, следует равенство

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e^{1/4}}{e^{1/4} - \int_0^{1/2} e^{\tau^2}\, d\tau},$$

а из (37) — равенство

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(t) = 1 + (1-2t)\left[e^{-(t-1/2)^2} \int\limits_{1/2-t}^{1/2} e^{\tau^2}\, d\tau + \right.$$

$$\left. + \left(e^{t-t^2} + e^{-(t-1/2)^2} \int\limits_{1/2-t}^{1/2} e^{\tau^2}\, d\tau\right) U(1)\right] + U(1),$$

где

$$U(1) = \frac{\int_0^{1/2} e^{\tau^2}\, d\tau}{e^{1/4} - \int_0^{1/2} e^{\tau^2}\, d\tau}.$$

Теперь преобразуем алгоритм (1). Согласно (19)

$$\alpha_n(t) - \alpha_n\left(\frac{1}{2}\right) = (1-2t)\int\limits_0^t \alpha_{n-1}(s)\,ds + (2t-1)\int\limits_0^{1/2} \alpha_{n-1}(t)\,dt,$$

поэтому

$$\frac{\alpha_n(t) - \alpha_n(1/2)}{2(t-1/2)} = \int\limits_t^{1/2} \alpha_{n-1}(s)\,ds, \tag{38}$$

откуда следует, что правая часть (38) делится на $(1/2-t)$. Тогда

$$\frac{\alpha_n(t) - \alpha_n(1/2)}{-2(1/2-t)^2} = \frac{1}{(1/2-t)}\int\limits_t^{1/2} \alpha_{n-1}(s)\,ds =$$

$$= \frac{1}{1/2-t}\int\limits_{t-1/2}^{0} \alpha_{n-1}\left(\frac{1}{2}+s\right)ds = \frac{1}{t-1/2}\int\limits_0^{t-1/2} \alpha_{n-1}\left(\frac{1}{2}+s\right)ds.$$

С другой стороны,

$$\frac{1}{t}\int\limits_0^t \alpha_{n-1}\left(\frac{1}{2}+s\right)ds = \frac{1}{t}\int\limits_0^1 \frac{d}{d\tau}\int\limits_0^{\tau t} \alpha_{n-1}\left(\frac{1}{2}+s\right)ds\,d\tau = \int\limits_0^1 \alpha_{n-1}\left(\frac{1}{2}+\tau t\right)d\tau,$$

поэтому

$$\frac{\alpha_n(t) - \alpha_n(1/2)}{-2(1/2-t)^2} = \int\limits_0^1 \alpha_{n-1}\left(\frac{1}{2}+\tau\left(t-\frac{1}{2}\right)\right)d\tau. \tag{39}$$

В силу (39) и (8) выполняется равенство

$$\frac{\alpha_1(t) - \alpha_1(1/2)}{-2(1/2-t)^2} = 1.$$

Полагая

$$x = \frac{1}{2} - t,$$

из (39) получаем

$$\frac{\alpha_n(1/2 - x) - \alpha_n(1/2)}{-2x^2} = \int_0^1 \alpha_{n-1}\left(\frac{1}{2} - \tau x\right) d\tau =$$

$$= \int_0^1 \frac{\alpha_{n-1}(1/2 - \tau x) - \alpha_{n-1}(1/2)}{-2\tau^2 x^2} (-2\tau^2 x^2) d\tau + \alpha_{n-1}\left(\frac{1}{2}\right) =$$

$$= -2x^2 \int_0^1 \tau^2 \frac{\alpha_{n-1}(1/2 - \tau x) - \alpha_{n-1}(1/2)}{-2\tau^2 x^2} d\tau + \alpha_{n-1}\left(\frac{1}{2}\right), \quad n = 2, 3, \ldots, \tag{40}$$

$$\frac{\alpha_1(1/2 - x) - \alpha_1(1/2)}{-2x^2} = 1 \quad \text{при} \quad n = 1.$$

Введем в рассмотрение полиномы

$$P_0 = 1, \quad P_n(x) = \frac{\alpha_n(1/2 - x) - \alpha_n(1/2)}{-2x^2}, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{41}$$

Тогда в соответствии с (40) получим соотношения

$$P_n(x) = \mu_n - 2x^2 \int_0^1 \tau^2 P_{n-1}(\tau x) d\tau, \quad n = 1, 2, \ldots , \tag{42}$$

где

$$\mu_n = P_n(0) = \alpha_n\left(\frac{1}{2}\right), \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{43}$$

По формулам (8), (43) вычисляем

$$\mu_1 = \frac{1}{2}, \tag{44}$$

а из (18) находим рекуррентные соотношение для μ_n:

$$\alpha_{n+1}\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{1/2} \alpha_n(t) dt = \int_0^{1/2} \alpha_n\left(\frac{1}{2} - x\right) dx =$$

$$= \int_0^{1/2} \left(\alpha_n\left(\frac{1}{2} - x\right) - \alpha_n\left(\frac{1}{2}\right)\right) dx + \frac{1}{2}\alpha_n\left(\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\alpha_n\left(\frac{1}{2}\right) - 2\int_0^{1/2} x^2 \frac{\alpha_n(1/2 - x) - \alpha_n(1/2)}{-2x^2} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\alpha_n\left(\frac{1}{2}\right) - 2\int_0^{1/2} x^2 P_{n-1}(x) dx, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{45}$$

Таким образом,

$$\mu_{n+1} = \frac{1}{2}\mu_n - 2\int_0^{1/2} x^2 P_{n-1}(x) dx, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{46}$$

Формулы (41) – (46) однозначно определяют как последовательность полиномов $P_n(x)$, так и последовательность полиномов $\alpha_n(x)$. В частности, из (42) следует, что

$$P_n(x) = \mu_n - \frac{2x^2}{3}\mu_{n-1} + \frac{(2x^2)^2}{3\cdot 5} - \ldots + (-1)^n \frac{(2x^2)^n}{(2n+1)!!},$$

где μ_n — постоянные, значения которых вычисляются с помощью рекуррентных формул (44) и (46).

1. *Самойленко А. М.* Численно-аналитический метод исследования периодических систем обыкновенных дифференциальных уравнений. I // Укр. мат. журн. – 1965. – **17**, № 4. – С. 82 – 93.
2. *Самойленко А. М.* Численно-аналитический метод исследования периодических систем обыкновенных дифференциальных уравнений. II // Там же. – 1966. – **18**, № 2. – С. 50 – 59.
3. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы исследования периодических решений. – Киев: Выща шк., 1976. – 184 с.
4. *Самойленко А. М., Лаптинский В. Н.* Об оценках периодических решений дифференциальных уравнений // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1982. – № 1. – С. 30 – 32.
5. *Крейн М. Г., Рутман М. А.* Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха // Успехи мат. наук. – 1948. – **3**, вып. 1. – С. 3 – 95.
6. *Евхута Н. А., Забрейко П. П.* О методе А. М. Самойленко отыскания периодических решений квазилинейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве // Укр. мат. журн. – 1985. – **37**, № 2. – С. 162 – 168.
7. *Евхута Н. А., Забрейко П. П.* О сходимости метода последовательных приближений А. М. Самойленко отыскания периодических решений // Докл. АН БССР. – 1985. – **29**, № 1. – С. 15 – 18.
8. *Трофимчук Е. П.* Интегральные операторы метода последовательных периодических приближений // Мат. физика и нелинейн. механика. – 1990. – Вып. 13. – С. 31 – 36.
9. *Kwapisz M.* Some remarks on an integral equation arising in applications of numerical-analytic method of solving of boundary value problems // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 1. – С. 128 – 132.
10. *Ронто М., Месарош Й.* Некоторые замечания о сходимости численно-аналитического метода последовательных приближений // Там же. – 1996. – **48**, № 1. – С. 90 – 95.
11. *Rontó M., Ronto A., Trofimchuk S. I.* Numerical-analytic method for differential and difference equations in partially ordered Banach space, and some applications. – Miskolc, 1996. – 60 p. (Preprint / Univ. Miskolc. Inst. Math., 96-02).
12. *Математическая* энциклопедия / Гл. ред. И. М. Виноградов: В 5 т. – М.: Сов. энциклопедия, 1979. – Т. 2. – 1104 с.
13. *Дьяконов В. П.* Mathematica 4: учебный курс. – Санкт-Петербург: Питер, 2001. – 656 с.

Получено 06.05.2003